УДК 539.3

СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ В АНИЗОТРОПНЫХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИНАХ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ С УЧЕТОМ ТЕПЛООБМЕНА С ВНЕШНЕЙ СРЕДОЙ

В. В. КОРОЛЕВИЧ [1)]

[1)]*Международный центр современного образования,*
ул. Штепанска, 61, 110 00, г. Прага, Чешская Республика

Приводится решение осесимметричной стационарной задачи теплопроводности для профилированных полярно-ортотропных кольцевых пластин с учетом теплообмена их с внешней средой через основания. Теплофизические характеристики материала пластины предполагаются не зависящими от температуры. Задаются значения температур на контурах кольцевой пластины. Внутренние источники тепла в ней отсутствуют. Распределение температур в таких пластинах осесимметричное. Представлены аналитические решения стационарной задачи теплопроводности для кольцевых анизотропных пластин: постоянной толщины, обратноконических и конических. При нахождении решения в общем случае записывается интегральное уравнение Вольтерры 2-го рода, соответствующее заданному дифференциальному уравнению стационарной теплопроводности для профилированных анизотропных кольцевых пластин. Приводятся в явном виде ядра интегрального уравнения для анизотропных кольцевых пластин степенного и экспоненциального профилей. Решение интегрального уравнения записывается с помощью резольвенты. Указывается, что из-за наличия иррациональных функций в ядрах интегрального уравнения необходимо применять численные методы при вычислении итерированных ядер либо численно решать интегральное уравнение Вольтерры 2-го рода. Дана формула расчета температур в анизотропных кольцевых пластинах произвольного профиля.

Образец цитирования:
Королевич ВВ. Стационарные температурные поля в анизотропных кольцевых пластинах переменной толщины с учетом теплообмена с внешней средой. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2018;2:58–66.

For citation:
Karalevich UV. Stationary temperature fields in the anisotropic ring plates of variable thickness considering the heat exchange with external environment. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2018;2:58–66. Russian.

Автор:
Владимир Васильевич Королевич – преподаватель.

Author:
Uladzimir V. Karalevich, lecturer.
v.korolevich@mail.ru

Ключевые слова: полярно-ортотропная кольцевая пластина; температура; стационарное уравнение теплопроводности; дифференциальное уравнение; интегральное уравнение Вольтерры 2-го рода; пластина постоянной толщины; обратноконическая пластина; коническая пластина; пластина степенного профиля; пластина экспоненциального профиля.

STATIONARY TEMPERATURE FIELDS IN THE ANISOTROPIC RING PLATES OF VARIABLE THICKNESS CONSIDERING THE HEAT EXCHANGE WITH EXTERNAL ENVIRONMENT

U. V. KARALEVICH [a]

[a]*International Center of Modern Education,*
61 Štěpánská, Praha 1, PSČ 110 00, Czech Republic

The solution of the axisymmetric stationary problem of the heat conductivity for profiled polar-orthotropic annular plates considering the heat exchange with external environment through the bases is presented. Thermophysical characteristics of the material of the plate are assumed to be temperature-independent. The temperature values on the contours of the annular plate are given. There are no internal heat sources in the plate. The temperature distribution in such plates will be axisymmetric. Analytical solutions of the stationary heat conductivity problem for the following anisotropic annular plates are presented: the plate of constant thickness, the back conical and the conical plate. The Volterra integral equation of the second kind corresponding to the given differential equation of the stationary heat conductivity for profiled anisotropic annular plates is written to obtain the solution in the general case. The kernels of the integral equation for anisotropic annular plates of power and exponential profiles are given explicitly. The solution of the integral equation is written by using the resolvent. It is indicated that due to the presence of irrational functions in the kernels of the integral equation it is necessary to apply numerical methods in the calculation of iterated kernels or numerically solve the Volterra integral equation of the second kind. A formula for the calculation of temperatures in anisotropic annular plates of an arbitrary profile is given.

Key words: polar-orthotropic annular plate; temperature; stationary equation of heat conductivity; differential equation; Volterra integral equation of the second kind; plate of a constant thickness; вack conical plate; conical plate; plate of a power profile; plate of an exponential profile.

Введение

В современных турбомашинах, центрифугах, сепараторах, аппаратах пищевой и химической промышленности широко применяются кольцевые пластины из анизотропных материалов. Такие пластины часто находятся в интенсивных неоднородных тепловых полях, совершая при этом теплообмен через основания с внешней средой. Воздействие этих тепловых полей приводит к дополнительным, так называемым температурным напряжениям, которые необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации указанных конструкций.

Постановка задачи

Рассмотрим кольцевую пластину, толщина $h(r)$ которой изменяется вдоль радиуса r по заданному закону. Пластина изготовлена из материала, обладающего цилиндрической анизотропией, причем ось анизотропии совпадает с геометрической осью пластины и в каждой точке тела имеются три взаимно ортогональные плоскости упругой симметрии.

Пусть на внутреннем контуре $(r = r_0)$ пластины поддерживается постоянная температура T_1^*, на внешнем контуре $(r = R)$ – T_2^* $(T_2^* > T_1^*)$, причем температура пластины больше температуры окружающей среды T_0. Предполагается, что температура в тонкой кольцевой пластине не изменяется по толщине и пренебрегается теплообмен через боковую поверхность. Внутренних источников тепла в пластине не имеется. Тепловое поле в такой полярно-ортотропной пластине будет осесимметричным.

В данной работе исследуется распределение температуры в полярно-ортотропных кольцевых пластинах переменной толщины с учетом теплообмена с внешней средой.

Решение задачи

Введем цилиндрическую систему координат $r, \theta, z,$ поместив начало в точке пересечения оси анизотропии со срединной плоскостью пластины.

Уравнение стационарной теплопроводности для полярно-ортотропной пластины переменной толщины с учетом теплообмена с внешней средой через оба основания пластины запишется в виде [1; 2]

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rh(r)\lambda_r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(h(r)\lambda_\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)-2H\left(T-T_0\right)\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{dh}{dr}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=0, \tag{1}$$

где λ_r и λ_θ – радиальный и тангенциальный коэффициенты теплопроводности соответственно; H – коэффициент теплоотдачи. Предполагается, что все эти коэффициенты не зависят от температуры T.

Если тепловое поле осесимметричное, то T не будет зависеть от тангенциальной координаты θ и можно исключить второе слагаемое в уравнении (1). В результате имеем

$$\frac{d^2T}{dr^2}+\left(\frac{h'(r)}{h(r)}+\frac{1}{r}\right)\frac{dT}{dr}-\frac{2H}{\lambda_r h(r)}\left(T(r)-T_0\right)\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(h'(r)\right)^2}=0. \tag{2}$$

Это уравнение отличается от уравнения стационарной теплопроводности [3, с. 136] наличием в (2) выражения $\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(h'(r)\right)^2},$ учитывающего кривизну поверхности пластины переменной толщины.

Введем новую функцию $\Theta_0(r)$:

$$\Theta_0(r)=T(r)-T_0. \tag{3}$$

С учетом (3) уравнение (2) запишется в виде

$$\frac{d^2\Theta_0}{dr^2}+\left(\frac{h'(r)}{h(r)}+\frac{1}{r}\right)\frac{d\Theta_0}{dr}-\frac{2H}{\lambda_r h(r)}\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(h'(r)\right)^2}\,\Theta_0(r)=0. \tag{4}$$

Рассмотрим несколько частных случаев распределения температуры в анизотропных профилированных кольцевых пластинах.

Кольцевая пластина постоянной толщины h_0. Дифференциальное уравнение (4) примет вид

$$\frac{d^2\Theta_0}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\Theta_0}{dr}-\frac{2H}{\lambda_r h_0}\Theta_0(r)=0. \tag{5}$$

Введем новую переменную $x=\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}\,r$ и приведем (5) к модифицированному уравнению Бесселя:

$$x^2\Theta_0''+x\Theta_0'-\left(x^2+0^2\right)\Theta_0(x)=0.$$

Его решение выражается через модифицированную функцию Бесселя 1-го рода нулевого порядка $I_0(x)$ и модифицированную функцию Бесселя 2-го рода нулевого порядка $K_0(x)$ (функцию Макдональда) [4]:

$$\Theta_0(x)=C_1I_0(x)+C_2K_0(x),$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Возвращаясь к переменной r, запишем общее решение уравнения (5) в виде

$$\Theta_0(r)=C_1I_0\left(\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}\,r\right)+C_2K_0\left(\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}\,r\right). \tag{6}$$

Постоянные C_1, C_2 определим из граничных условий:

$$\begin{cases}\Theta_0(r_0)=T_1^*-T_0,\\ \Theta_0(R)=T_2^*-T_0.\end{cases} \tag{7}$$

Удовлетворяя решение (6) граничным условиям (7), получим следующую систему алгебраических уравнений относительно неизвестных C_1, C_2:

$$\begin{cases} C_1 I_0\left(\sqrt{\dfrac{2H}{\lambda_r h_0}}\, r_0\right) + C_2 K_0\left(\sqrt{\dfrac{2H}{\lambda_r h_0}}\, r_0\right) = T_1^* - T_0, \\ C_1 I_0\left(\sqrt{\dfrac{2H}{\lambda_r h_0}}\, R\right) + C_2 K_0\left(\sqrt{\dfrac{2H}{\lambda_r h_0}}\, R\right) = T_2^* - T_0. \end{cases} \tag{8}$$

Решение системы (8) есть

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{\Delta_1}\left[K_0\left(\sqrt{\dfrac{2H}{\lambda_r h_0}}\, R\right)\left(T_1^* - T_0\right) - K_0\left(\sqrt{\dfrac{2H}{\lambda_r h_0}}\, r_0\right)\left(T_2^* - T_0\right)\right], \\ C_2 = -\dfrac{1}{\Delta_1}\left[I_0\left(\sqrt{\dfrac{2H}{\lambda_r h_0}}\, R\right)\left(T_1^* - T_0\right) - I_0\left(\sqrt{\dfrac{2H}{\lambda_r h_0}}\, r_0\right)\left(T_2^* - T_0\right)\right], \end{cases} \tag{9}$$

где $\Delta_1 = \left[I_0\left(\sqrt{\dfrac{2H}{\lambda_r h_0}}\, r_0\right) K_0\left(\sqrt{\dfrac{2H}{\lambda_r h_0}}\, R\right) - I_0\left(\sqrt{\dfrac{2H}{\lambda_r h_0}}\, R\right) K_0\left(\sqrt{\dfrac{2H}{\lambda_r h_0}}\, r_0\right)\right].$

По формуле (3), учитывая решение (6) и выражения (9), получим распределение температуры $T(r)$ в полярно-ортотропной кольцевой пластине постоянной толщины h_0 при учете теплообмена ее с внешней средой:

$$\begin{aligned} T(r) = T_1^* \frac{1}{\Delta_1}&\left[I_0\left(\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}\, r\right) K_0\left(\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}\, R\right) - I_0\left(\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}\, R\right) K_0\left(\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}\, r\right)\right] + \\ + T_2^* \frac{1}{\Delta_1}&\left[I_0\left(\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}\, r_0\right) K_0\left(\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}\, r\right) - I_0\left(\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}\, r\right) K_0\left(\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}\, r_0\right)\right] + \\ + T_0 &\left\{1 + \frac{1}{\Delta_1}\left[I_0\left(\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}\, R\right) - I_0\left(\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}\, r_0\right)\right] K_0\left(\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}\, r\right) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{\Delta_1}\left[K_0\left(\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}\, R\right) - K_0\left(\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}\, r_0\right)\right] I_0\left(\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}\, r\right)\right\}. \end{aligned}$$

Обратноконическая кольцевая пластина. Закон изменения толщины $h(r)$ вдоль радиуса r для такой пластины описывается формулой $h(r) = h_0\left(\dfrac{r}{r_0}\right)$, где h_0 – толщина пластины на внутреннем контуре $(r = r_0)$. Дифференцируя функцию $h(r)$ и подставляя в уравнение (4), получим

$$\frac{d^2\Theta_0}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\Theta_0}{dr} - \frac{H\sqrt{h_0^2 + 4r_0^2}}{\lambda_r h_0}\frac{1}{r}\Theta_0(r) = 0. \tag{10}$$

Обозначим $\dfrac{H\sqrt{h_0^2 + 4r_0^2}}{\lambda_r h_0} = b$ и введем новую функцию $Z_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r}\right)$:

$$\Theta_0(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} Z_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r}\right). \tag{11}$$

Подставляя выражение (11) в уравнение (10), для функции $Z_1(t)$ получим модифицированное уравнение Бесселя

$$t^2 Z_1''(t) + t Z_1'(t) - \left(t^2 + 1^2\right) Z_1(t) = 0, \tag{12}$$

где аргумент $t = 2\sqrt{b}\sqrt{r}$.

Решение уравнения (12) выражается через модифицированную функцию Бесселя 1-го рода 1-го порядка $I_1(t)$ и модифицированную функцию Бесселя 2-го рода 1-го порядка $K_1(t)$ (функцию Макдональда):

$$Z_1(t) = \tilde{C}_1 I_1(t) + \tilde{C}_2 K_1(t),$$

где $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ – произвольные постоянные.

Возвращаясь к замене (11), запишем решение дифференциального уравнения (10):

$$\Theta_0(r) = \frac{1}{\sqrt{r}}\left[\tilde{C}_1 I_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r}\right) + \tilde{C}_2 K_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r}\right)\right]. \tag{13}$$

Постоянные $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ определим из граничных условий. Подстановка решения (13) в условия (7) приводит к системе алгебраических уравнений относительно неизвестных $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$:

$$\begin{cases} \tilde{C}_1 I_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r}\right) + \tilde{C}_2 K_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}\right) = \sqrt{r_0}\left(T_1^* - T_0\right), \\ \tilde{C}_1 I_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{R}\right) + \tilde{C}_2 K_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{R}\right) = \sqrt{R}\left(T_2^* - T_0\right). \end{cases} \tag{14}$$

Решение системы (14) есть

$$\begin{cases} \tilde{C}_1 = \frac{\sqrt{r_0}}{\Delta_2} K_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{R}\right)\left(T_1^* - T_0\right) - \frac{\sqrt{R}}{\Delta_2} K_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}\right)\left(T_2^* - T_0\right), \\ \tilde{C}_2 = -\frac{\sqrt{r_0}}{\Delta_2} I_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{R}\right)\left(T_1^* - T_0\right) + \frac{\sqrt{R}}{\Delta_2} I_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}\right)\left(T_2^* - T_0\right), \end{cases} \tag{15}$$

где $\Delta_2 = \left[I_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}\right)K_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{R}\right) - I_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{R}\right)K_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}\right)\right]$.

По формуле (3), учитывая решение (13) и выражения (15), получим распределение температуры $T(r)$ в полярно-ортотропной обратноконической кольцевой пластине при учете теплообмена ее с внешней средой:

$$\begin{aligned} T(r) = T_1^* &\left\{\frac{1}{\Delta_2}\sqrt{\frac{r_0}{r}}\left[I_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r}\right)K_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{R}\right) - I_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{R}\right)K_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r}\right)\right]\right\} + \\ + T_2^* &\left\{\frac{1}{\Delta_2}\sqrt{\frac{R}{r}}\left[I_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}\right)K_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r}\right) - I_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r}\right)K_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}\right)\right]\right\} + \\ + T_0 &\left\{1 + \frac{1}{\Delta_2}\left[\sqrt{R}K_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}\right) - \sqrt{r_0}K_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{R}\right)\right]\frac{1}{\sqrt{r}} I_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r}\right) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{\Delta_2}\left[\sqrt{r_0}I_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{R}\right) - \sqrt{R}I_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r_0}\right)\right]\frac{1}{\sqrt{r}} K_1\left(2\sqrt{b}\sqrt{r}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Коническая кольцевая пластина. Профили конических кольцевых пластин или пластин прямолинейного профиля задаются формулой $h(r) = h_0^*\left(1 - \frac{r}{R_1}\right)$, где h_0^* – толщина пластины в центре $(r = 0)$; R_1 – радиус окружности пересечения образующих конуса $(R \le R_1)$. Дифференцируя функцию $h(r)$ и подставляя в уравнение (4), получим

$$\frac{d^2\Theta_0}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{(R_1 - r)}\right)\frac{d\Theta_0}{dr} - \frac{H\sqrt{h_0^{*2} + 4R_1^2}}{\lambda_r h_0^*}\frac{1}{(R_1 - r)}\Theta_0(r) = 0. \tag{16}$$

Обозначив $\frac{H\sqrt{h_0^{*2} + 4R_1^2}R_1}{\lambda_r h_0^*} = b^*$ и сделав замену переменной $s = \frac{r}{R_1}$, где $s \in [\delta_0; \delta_1]$, $\delta_0 = \frac{r_0}{R_1} > 0$, $\delta_1 = \frac{R}{R_1} < 1$, преобразуем уравнение (16) к виду

$$s(1 - s)\Theta_0''(s) + (1 - 2s)\Theta_0'(s) - b^* s\,\Theta_0(s) = 0. \tag{17}$$

Уравнение (17) обладает двумя особыми регулярными точками $s = 0$ и $s = 1$. Согласно общей теории дифференциальных уравнений, для каждой особой регулярной точки существуют решения в виде сходящихся в этой окрестности степенных рядов, при этом вторые частные решения могут содержать логарифмические члены.

Так как в нашем случае определяющее уравнение $\rho(\rho-1)+\rho=0$ относительно особой точки $s=0$ имеет корни $\rho_1=\rho_2=0$, то общее решение дифференциального уравнения (17) есть

$$\Theta_0(s)=\widehat{C}_1\Theta_0^{(1)}(s)+\widehat{C}_2\Theta_0^{(2)}(s), \tag{18}$$

где $\widehat{C}_1, \widehat{C}_2$ – произвольные постоянные. Здесь первое частное решение будет

$$\Theta_0^{(1)}(s)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k s^k,$$

а второе частное решение примет вид

$$\Theta_0^{(2)}(s)=\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_k s^k\right)\ln s+\sum_{k=0}^{\infty}b_k s^k.$$

Коэффициенты a_k и b_k находятся из рекуррентных соотношений [3, с. 137]:

$$a_{k+1}=\frac{k}{k+1}a_k+\frac{b^*}{(k+1)^2}a_{k-1} \quad (k\geq 2),$$

$$a_0=1, \quad a_1=0;$$

$$b_{k+1}=\frac{k}{k+1}b_k+\frac{b^*}{(k+1)^2}b_{k-1}-\frac{2}{k+1}a_{k+1}+\frac{2k+1}{(k+1)^2}a_k \quad (k\geq 2),$$

$$b_0=0, \quad b_1=1.$$

Постоянные $\widehat{C}_1, \widehat{C}_2$ определим из граничных условий. Подстановка решения (18) в граничные условия (7) приводит к системе алгебраических уравнений относительно неизвестных $\widehat{C}_1, \widehat{C}_2$:

$$\begin{cases}\widehat{C}_1\Theta_0^{(1)}(\delta_0)+\widehat{C}_2\Theta_0^{(2)}(\delta_0)=T_1^*-T_0,\\ \widehat{C}_1\Theta_0^{(1)}(\delta_1)+\widehat{C}_2\Theta_0^{(2)}(\delta_1)=T_2^*-T_0,\end{cases} \tag{19}$$

откуда

$$\begin{cases}\widehat{C}_1=\dfrac{1}{\Delta_3}\left[\Theta_0^{(2)}(\delta_1)\left(T_1^*-T_0\right)-\Theta_0^{(2)}(\delta_0)\left(T_2^*-T_0\right)\right],\\ \widehat{C}_2=-\dfrac{1}{\Delta_3}\left[\Theta_0^{(1)}(\delta_1)\left(T_1^*-T_0\right)-\Theta_0^{(1)}(\delta_0)\left(T_2^*-T_0\right)\right],\end{cases} \tag{20}$$

где $\Delta_3=\left[\Theta_0^{(1)}(\delta_0)\Theta_0^{(2)}(\delta_1)-\Theta_0^{(1)}(\delta_1)\Theta_0^{(2)}(\delta_0)\right]$.

По формуле (3), учитывая (18)–(20), получим распределение температуры $T(r)$ в полярно-ортотропной конической кольцевой пластине при учете теплообмена ее с внешней средой:

$$T(r)=T_1^*\frac{1}{\Delta_3}\left[\Theta_0^{(2)}(\delta_1)\Theta_0^{(1)}(s)-\Theta_0^{(1)}(\delta_1)\Theta_0^{(2)}(s)\right]+T_2^*\frac{1}{\Delta_3}\left[\Theta_0^{(1)}(\delta_0)\Theta_0^{(2)}(s)-\Theta_0^{(2)}(\delta_0)\times\right.$$

$$\left.\times\Theta_0^{(1)}(s)\right]+T_0\left\{1+\frac{1}{\Delta_3}\left[\Theta_0^{(2)}(\delta_0)-\Theta_0^{(2)}(\delta_1)\right]\Theta_0^{(1)}(s)+\frac{1}{\Delta_3}\left[\Theta_0^{(1)}(\delta_0)-\Theta_0^{(1)}(\delta_1)\right]\Theta_0^{(2)}(s)\right\}.$$

Для всех остальных профилей кольцевых пластин общее решение найдем с помощью интегрального уравнения Вольтерры 2-го рода. Полагаем

$$\frac{d^2\Theta_0}{dr^2}=\eta_0(r). \tag{21}$$

Последовательно интегрируя выражение (21), имеем

$$\frac{d\Theta_0}{dr} = \int_{r_0}^{r} \eta_0(s)ds + \dot{\Theta}_0(r_0),\ \Theta_0(r) = \int_{r_0}^{r} (r-s)\eta_0(s)ds + \dot{\Theta}_0(r_0)(r-r_0) + \Theta_0(r_0). \tag{22}$$

Здесь использовалась формула Дирихле

$$\underbrace{\int_{r_0}^{r} dr_1 \int_{r_0}^{r_1} dr_2 \ldots \int_{r_0}^{r_{n-1}}}_{n\text{ раз}} \eta_0(r_n)dr_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_{r_0}^{r}(r-s)^{n-1}\eta_0(s)ds.$$

Подставив в уравнение (4) вместо функции $\Theta_0(r)$ и ее производных правые части выражений (21), (22), получим искомое линейное интегральное уравнение Вольтерры 2-го рода

$$\eta_0(r) = \lambda\int_{r_0}^{r} K_0(r,s)\eta_0(s)ds + f_0(r), \tag{23}$$

где $\lambda = -1$ есть числовой параметр; $K_0(r,\ s) = \left\{\left(\frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{r}\right) - \frac{H}{\lambda_r}\sqrt{\frac{4}{h^2(r)} + \left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)^2}\,(r-s)\right\}$ – ядро интегрального уравнения; $f_0(r) = \frac{\partial K_0(r,\ s)}{\partial s}\Theta_0(r_0) - K_0(r,\ r_0)\dot{\Theta}_0(r_0)$ – свободный член интегрального уравнения.

Запишем в явном виде ядра интегрального уравнения (23) для пластин степенного и экспоненциального профилей.

Толщина пластины *степенного профиля* задается формулой $h(r) = h_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$, где h_0 – толщина пластины в центре на внутреннем контуре $(r = r_0)$. Ядро интегрального уравнения (23) в этом случае имеет вид

$$K_0(r,\ s) = \left[\frac{(1-\alpha)}{r} - \frac{2H}{\lambda_r h_0}\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{h_0}{r_0}\right)^2\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 + \left(\frac{r_0}{r}\right)^{-2\alpha}}\,(r-s)\right].$$

Для кольцевой пластины *экспоненциального профиля*, толщина которой описывается формулой $h(r) = h_0^* e^{\beta\left(\frac{r}{R}\right)}$, $\beta = \ln\left(\frac{h_1}{h_0^*}\right)$ $(h_1 < h_0^*)$, где h_0^* – толщина пластины в центре $(r = 0)$; h_1 – толщина пластины на внешнем контуре $(r = R)$, ядро интегрального уравнения (23) есть

$$K_0(r,\ s) = \left[\left(\frac{\beta}{R} + \frac{1}{r}\right) - \frac{2H}{\lambda_r h_0^*}\sqrt{\frac{1}{4}\left(\beta\frac{h_0^*}{R}\right)^2 + e^{2\beta\left(\frac{r}{R}\right)}}\,(r-s)\right].$$

Общее решение линейного интегрального уравнения Вольтерры 2-го рода (23) записывается с помощью *резольвенты* $R_0(r,\ s;\ \lambda)$ в виде [5]

$$\eta_0(r) = \lambda\int_{r_0}^{r} R_0(r,\ s;\ \lambda)f_0(s)ds + f_0(r). \tag{24}$$

Здесь функция $R_0(r,\ s;\ \lambda)$ определяется функциональным рядом:

$$R_0(r,\ s;\ \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m K_{0,\,m+1}(r,\ s),$$

который для непрерывных ядер $K_{0,\,m}(r,\ s)$ сходится абсолютно и равномерно.

Повторяющиеся, или *итерированные*, *ядра* $K_{0,\,m}(r,\ s)$ вычисляются по рекуррентным формулам:

$$K_{0,1}(r, s) = K_0(r, s),$$

$$K_{0,2}(r, s) = \int_s^r K_0(r, t) K_{0,1}(t, s)\,dt,$$

……………………………………..

$$K_{0,m}(r, s) = \int_s^r K_0(r, t) K_{0,m-1}(t, s)\,dt.$$

Если свободный член $f_0(r)$ непрерывен в $[r_0, R]$, а ядро $K_0(r, s)$ непрерывно при $r_0 \le r \le R$, $r_0 \le s \le r$, то линейное интегральное уравнение Вольтерры 2-го рода (23) имеет при любом параметре $\lambda(\lambda \ne 0)$ единственное непрерывное решение, определяемое формулой (24).

Ввиду наличия иррациональностей от степенных или экспоненциальных функций в ядре интегрального уравнения вычисление интегралов итерированных ядер следует вести численными методами.

Отметим, что интегральные уравнения Вольтерры 2-го рода можно решать и другими аналитическими и численными методами, указанными, например, в [6].

Используя вторую формулу (22) и граничные условия (7), получим распределение температуры $T(r)$ в полярно-ортотропной кольцевой пластине произвольного профиля при учете теплообмена ее с внешней средой:

$$T(r) = \int_{r_0}^{r} (r - s)\eta_0(s)\,ds - \left(\frac{r - r_0}{R - r_0}\right)\int_{r_0}^{R} (R - s)\eta_0(s)\,ds + \left(\frac{R - r}{R - r_0}\right)T_1^* + \left(\frac{r - r_0}{R - r_0}\right)T_2^*. \quad (25)$$

Температура T_0 окружающей среды входит неявно в функцию $\eta_0(s)$ формулы (25).

Заключение

Приведенные точные решения стационарной задачи теплопроводности для трех профилей анизотропных кольцевых пластин (постоянной толщины, обратноконической и конической) применяются для расчета температурных напряжений в таких пластинах. В случае использования в машиностроительных или авиационных конструкциях анизотропных кольцевых пластин более сложных профилей надо воспользоваться формулой (25) с численным решением интегрального уравнения Вольтерры 2-го рода (23).

Библиографические ссылки

1. Уздалев АИ. *Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела*. Саратов: Издательство Саратовского университета; 1967.
2. Уздалев АИ, Брюханова ЕН. Уравнение теплопроводности для пластины переменной толщины с неоднородными теплофизическими свойствами. В: Уздалев АИ, редактор. *Задачи прикладной теории упругости*. Саратов: Саратовский политехнический институт; 1985. С. 3–7.
3. Коваленко АД. *Пластинки и оболочки в роторах турбомашин*. Киев: Издательство АН УССР; 1955.
4. Бронштейн ИН, Семендяев КА. *Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов*. Москва: Наука; 1981.
5. Краснов МЛ, Киселев АИ, Макаренко ГИ. *Интегральные уравнения: задачи и примеры с подробными решениями*. Москва: КомКнига; 2007.
6. Верлань АФ, Сизиков ВС. *Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы*. Киев: Наукова думка; 1986.

References

1. Uzdalev AI. *Nekotorye zadachi termouprugosti anizotropnogo tela* [Some problems of thermoelasticity of an anisotropic body]. Saratov: Izdatel'stvo Saratovskogo universiteta; 1967. Russian.
2. Uzdalev AI, Bryukhanova EN. Equations of thermal conductivity for plates of variable thickness with inhomogeneous thermophysical properties. In: Uzdalev AI, editor. *Zadachi prikladnoi teorii uprugosti* [Problems of Applied Theory of Elasticity]. Saratov: Saratov Polytechnic Institute; 1985. p. 3–7. Russian.

3. Kovalenko AD. *Plastinki i obolochki v rotorakh turbomashin* [Plates and shells in rotors of turbomachines]. Kiev: Izdatel'stvo AN USSR; 1955. Russian.

4. Bronshtein IN, Semendiaev KA. *Spravochnik po matematike dlya inzhenerov i uchashchikhsya VTUZov* [A handbook on mathematics for engineers and students VTUZov]. Moscow: Nauka; 1981. Russian.

5. Krasnov ML, Kiselev AI, Makarenko GI. *Integral'nye uravneniya: zadachi i primery s podrobnymi resheniyami* [Integral equations: problems and examples with detailed solutions]. Moscow: KomKniga; 2007. Russian.

6. Verlan' AF, Sizikov VS. *Integral'nye uravneniya: metody, algoritmy, programmy* [Integral equations: methods, algorithms, programs]. Kiev: Naukova dumka; 1986. Russian.

Статья поступила в редколлегию 27.10.2017.
Received by editorial board 27.10.2017.