



ЖУРНАЛ
БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА ИНФОРМАТИКА

JOURNAL
OF THE BELARUSIAN STATE UNIVERSITY

MATHEMATICS and INFORMATICS

Издается с января 1969 г.
(до 2017 г. – под названием «Вестник БГУ.
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»)

Выходит три раза в год

1

2024

МИНСК
БГУ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор **ХАРИН Ю. С.** – доктор физико-математических наук, академик НАН Беларуси, профессор; директор Научно-исследовательского института прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: kharin@bsu.by

**Заместители
главного редактора** **КРОТОВ В. Г.** – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: krotov@bsu.by

ДУДИН А. Н. – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий лабораторией прикладного вероятностного анализа факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: dudin@bsu.by

**Ответственный
секретарь** **МАТЕЙКО О. М.** – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры общей математики и информатики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: matseika@bsu.by

- Абламейко С. В.* Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Альтенбах Х. Магдебургский университет им. Отто фон Герике, Магдебург, Германия.
Антоневич А. Б. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Бауэр С. М. Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
Беняш-Кривец В. В. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Берник В. И. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Бухштабер В. М. Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
Вабищевич П. Н. Институт проблем безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук, Москва, Россия.
Волков В. М. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Гладков А. Л. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Го В. Китайский университет науки и технологий, Хэфэй, провинция Аньхой, Китай.
Гогинава У. Тбилисский государственный университет им. Иванэ Джавахишвили, Тбилиси, Грузия.
Головкин В. А. Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь.
Гороховик В. В. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Громак В. И. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Демид Г. Институт математики и информатики Вильнюсского университета, Вильнюс, Литва.
Егоров А. Д. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Еремеев В. А. Гданьский политехнический университет, Гданьск, Польша.
Жоландек Х. Институт математики Варшавского университета, Варшава, Польша.
Журавков М. А. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Залесский П. А. Бразильский университет, Бразилиа, Бразилия.
Зубков А. М. Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия.
Каплунов Ю. Д. Университет Кииле, Кииле, Великобритания.
Кашин Б. С. Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
Келлерер Х. Грацский университет им. Карла и Франца, Грац, Австрия.
Кожанов А. И. Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия.
Котов В. М. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.

- Краснопрошин В. В.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Лауринчикас А. П.** Вильнюсский университет, Вильнюс, Литва.
- Мадани К.** Университет Париж-Эст Марн-ла-Валле, Марн-ла-Валле, Франция.
- Макаров Е. К.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Матус П. П.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Медведев Д. Г.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Михасев Г. И.** Харбинский политехнический университет, Харбин, Китай.
- Нестеренко Ю. В.** Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
- Никоноров Ю. Г.** Южный математический институт Владикавказского научного центра Российской академии наук, Владикавказ, Россия.
- Освальд П.** Боннский университет, Бонн, Германия.
- Романовский В. Г.** Мариборский университет, Марибор, Словения.
- Рязанов В. В.** Вычислительный центр им. А. А. Дородницына Российской академии наук, Москва, Россия.
- Сафонов В. Г.** Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь.
- Скиба А. Н.** Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины, Гомель, Беларусь.
- Сотсков Ю. Н.** Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Трофимов В. А.** Южно-Китайский университет технологий, Гуанчжоу, Китай.
- Тузигов А. В.** Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Фильцмозер П.** Венский технический университет, Вена, Австрия.
- Черноусов В. И.** Альбертский университет, Эдмонтон, Канада.
- Чижи́к С. А.** Национальная академия наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Шешок Д.** Вильнюсский технический университет им. Гедиминаса, Вильнюс, Литва.
- Шубэ А. С.** Институт математики и информатики Академии наук Республики Молдова, Кишинев, Молдова.
- Янчевский В. И.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.

EDITORIAL BOARD

Editor-in-chief	KHARIN Y. S. , doctor of science (physics and mathematics), academician of the National Academy of Sciences of Belarus, full professor; director of the Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics, Belarusian State University, Minsk, Belarus. E-mail: kharin@bsu.by
Deputy editors-in-chief	KROTOV V. G. , doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of function theory, faculty of mechanics and mathematics, Belarusian State University, Minsk, Belarus. E-mail: krotov@bsu.by
	DUDIN A. N. , doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the laboratory of applied probabilistic analysis, faculty of applied mathematics and computer science, Belarusian State University, Minsk, Belarus. E-mail: dudin@bsu.by
Executive secretary	MATEIKO O. M. , PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of general mathematics and computer science, faculty of mechanics and mathematics, Belarusian State University, Minsk, Belarus. E-mail: matseika@bsu.by
Ablameyko S. V.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Altenbach H.	Otto-von-Guericke University, Magdeburg, Germany.
Antonevich A. B.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Bauer S. M.	Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia.
Beniash-Kryvets V. V.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Bernik V. I.	Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Buchstaber V. M.	Steklov Institute of Mathematics of Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.
Chernousov V. I.	University of Alberta, Edmonton, Canada.
Chizhik S. A.	National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Dzemyda G.	Institute of Mathematics and Informatics of the Vilnius University, Vilnius, Lithuania.
Egorov A. D.	Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Eremeyev V. A.	Gdansk University of Technology, Gdansk, Poland.
Filzmoser P.	Vienna University of Technology, Vienna, Austria.
Gladkov A. L.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Goginava U.	Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia.
Golovko V. A.	Brest State Technical University, Brest, Belarus.
Gorokhovich V. V.	Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Gromak V. I.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Guo W.	University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui, China.
Kaplunov J. D.	Keele University, Keele, United Kingdom.
Kashin B. S.	Steklov Institute of Mathematics of Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.
Kellerer H.	University of Graz, Graz, Austria.
Kotov V. M.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Kozhanov A. I.	Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia.
Krasnoproshin V. V.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Laurinchikas A. P.	Vilnius University, Vilnius, Lithuania.
Madani K.	Université Paris-Est, Marne-la-Vallée, France.
Makarov E. K.	Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Matus P. P.	Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Medvedev D. G.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Mikhasev G. I.	Harbin Institute of Technology, Harbin, China.
Nesterenko Y. V.	Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.
Nikonov Y. G.	Southern Mathematical Institute of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Russia.

- Oswald P.** University of Bonn, Bonn, Germany.
- Romanovskij V. G.** University of Maribor, Maribor, Slovenia.
- Ryazanov V. V.** Dorodnicyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.
- Safonov V. G.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Šešok D.** Vilnius Gediminas Technical University, Vilnius, Lithuania.
- Skiba A. N.** Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Belarus.
- Sotskov Y. N.** United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Suba A. S.** Institute of Mathematics and Computer Science of the Academy of Sciences of Moldova, Kishinev, Moldova.
- Trofimov V. A.** South China University of Technology, Guangzhou, China.
- Tuzikov A. V.** Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Vabishchevich P. N.** Institute for the Safe Development of Atomic Energy of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.
- Volkov V. M.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.
- Yanchevskii V. I.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Zalesskii P. A.** University of Brazilia, Brazilia, Brazil.
- Zhuravkov M. A.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.
- Zoladek H.** Mathematics Institute of the University of Warsaw, Warsaw, Poland.
- Zubkov A. M.** Lomonosov Moscow State University, Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.

Вещественный, комплексный и функциональный анализ

REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL ANALYSIS

УДК 517.968.23

О РЕШЕНИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПУАНКАРЕ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ОДНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

Т. Р. НАГОРНАЯ¹⁾, К. М. РАСУЛОВ¹⁾

¹⁾Смоленский государственный университет, ул. Пржевальского, 4, 214000, г. Смоленск, Россия

Аннотация. В односвязных областях с гладкими границами рассматривается краевая задача типа задачи Пуанкаре для одного эллиптического дифференциального уравнения второго порядка, порождающего класс обобщенных гармонических функций. При достаточно общих предположениях относительно коэффициентов краевого условия рассматриваемой задачи устанавливается, что ее решение сводится к последовательному решению хорошо изученных интегро-дифференциальной краевой задачи Гильберта и дифференциальной краевой задачи Гильберта в классах аналитических функций комплексной переменной. Кроме того, определяются необходимые и достаточные условия разрешимости исследуемой задачи и доказывается ее нетеровость.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение; обобщенная гармоническая функция; краевая задача Пуанкаре; обобщенная краевая задача Гильберта; интегральное уравнение; односвязная область.

Образец цитирования:

Нагорная ТР, Расулов КМ. О решении краевой задачи Пуанкаре для обобщенных гармонических функций в односвязных областях. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2024;1:6–15. EDN: ANQMOD

For citation:

Nagornaya TR, Rasulov KM. On the solution of the Poincaré boundary value problem for generalised harmonic functions in simply connected domains. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2024;1:6–15. Russian. EDN: ANQMOD

Авторы:

Татьяна Романовна Нагорная – старший преподаватель кафедры математического анализа физико-математического факультета.

Карим Магомедович Расулов – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой математического анализа физико-математического факультета.

Authors:

Tatyana R. Nagornaya, senior lecturer at the department of mathematical analysis, faculty of physics and mathematics.

tani7n@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-5976-7391>

Karim M. Rasulov, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of mathematical analysis, faculty of physics and mathematics.

kahrimanr@yandex.ru

<https://orcid.org/0000-0002-2040-8447>

ON THE SOLUTION OF THE POINCARÉ BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR GENERALISED HARMONIC FUNCTIONS IN SIMPLY CONNECTED DOMAINS

T. R. NAGORNAYA^a, K. M. RASULOV^a

^aSmolensk State University, 4 Przhhevskogo Street, Smolensk 214000, Russia

Corresponding author: T. R. Nagornaya (tani7n@mail.ru)

Abstract. In this paper, a boundary value problem of the Poincaré type is considered for one second-order elliptic differential equation, generating a class of generalised harmonic functions, in simply connected domains with smooth boundaries. It is established that for sufficiently general assumptions about the coefficients of the boundary value condition of the considered problem, its solution reduces to the sequential solution of the well-studied integro-differential Hilbert boundary value problem and the differential Hilbert boundary value problem in classes of analytic functions of a complex variable. In addition, necessary and sufficient solvability conditions of the considered problem are obtained and its Noetherian property is proved.

Keywords: differential equation; generalised harmonic function; Poincaré boundary value problem; generalised Hilbert boundary value problem; integral equation; simply connected domain.

Введение

Пусть L – простая замкнутая кривая Ляпунова, лежащая внутри единичного круга $U_1^+ = \{z : |z| < 1\}$ и заданная параметрическим уравнением вида $z = t(s) = x(s) + iy(s)$, $0 \leq s \leq l$, где s – длина дуги $[1]$, а T^+ – конечная часть комплексной плоскости переменной $z = x + iy$, ограниченная кривой L . В области T^+ рассматривается следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^2 W(z)}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{n(n+1)}{(1 - z\bar{z})^2} W(z) = 0, \quad (1)$$

где $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$; $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$; $W(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ – неизвестная функция; n – некоторое неотрицательное целое число.

В работах [2; 3] было установлено, что всякое регулярное решение уравнения (1) в области T^+ представляется в виде

$$W(z) = \sum_{k=0}^n B_k^n \left(\frac{\bar{z}}{1 - z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(z)}{dz^k} + \overline{\sum_{k=0}^n B_k^n \left(\frac{\bar{z}}{1 - z\bar{z}} \right)^{n-k} \frac{d^k f^+(z)}{dz^k}}, \quad (2)$$

где $B_k^n = \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}$, а $\varphi^+(z)$, $f^+(z)$ – аналитические в области T^+ функции.

Так как при $n = 0$ решения уравнения (1) являются комплекснозначными гармоническими функциями в области T^+ (т. е. регулярными решениями уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 W(z)}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$ в области T^+), то, следуя работам [4; 5], в дальнейшем при $n \geq 1$ решения дифференциального уравнения (1) в области $T^+ \subset U_1^+$ будем называть обобщенными гармоническими функциями порядка n в области T^+ , а функции $\varphi^+(z)$ и $f^+(z)$, входящие в правую часть представления (2), – первой и второй аналитическими компонентами обобщенной гармонической функции $W(z)$ соответственно.

Через $G_n(T^+) \cap H^{(m)}(L)$ обозначим класс обобщенных гармонических функций порядка n в области T^+ , для которых в представлении (2) аналитические компоненты $\varphi^+(z)$, $f^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(m)}(L)$, т. е. $\varphi^+(z)$, $f^+(z)$ непрерывно (в смысле Гёльдера) продолжаются на кривой L вместе со своими производными до порядка m включительно.

Рассматривается следующая краевая задача: требуется найти все обобщенные гармонические функции $W(z)$ порядка n ($n \geq 1$) в области T^+ , принадлежащие классу $G_n(T^+) \cap H^{(n+1)}(L)$ и удовлетворяющие на L условию

$$a(t) \frac{\partial W(t)}{\partial x} + b(t) \frac{\partial W(t)}{\partial y} + c(t)W(t) = q(t), \quad t \in L, \quad (3)$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $q(t)$ – заданные на кривой L комплекснозначные функции из класса $H(L)$ (т. е. удовлетворяющие на L условию Гёльдера).

Исходя из работы [6, с. 80], сформулированную выше задачу будем называть краевой задачей Пуанкаре для обобщенных гармонических функций порядка n , или сокращенно задачей GP_n .

В работах авторов [1; 4; 5] были построены явные решения задачи GP_1 в круге $T_r^+ = \{z: |z| < r\}$, $0 < r < 1$, при определенных предположениях относительно коэффициентов $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ краевого условия (3).

Настоящая статья посвящена построению общего конструктивного метода решения задачи GP_n для обобщенных гармонических функций в произвольных односвязных областях, границами которых служат кривые Ляпунова, лежащие внутри единичного круга. Ради краткости изложения ограничимся рассмотрением предлагаемого метода решения задачи GP_n для обобщенных гармонических функций первого порядка (т. е. при $n = 1$), так как распространение данного метода на случай произвольного n составляет лишь технические сложности (возникают более громоздкие формулы).

Решение задачи GP_1

Рассмотрим случай, когда $a(t)$, $b(t)$, $c(t) \in H(L)$,

$$a(t) + ib(t) \neq 0, \quad a(t) - ib(t) \neq 0, \quad t \in L. \quad (4)$$

Прежде чем изложить метод решения задачи GP_1 , напомним одно вспомогательное интегральное представление для кусочно-аналитических функций комплексной переменной, установленное в монографии [7].

Пусть $\chi = \text{Ind} G_2(t)$ – индекс Коши функции $G_2(t) = a(t) + ib(t)$ вдоль кривой L , причем в силу условий (4) имеем $G_2(t) \neq 0$. Тогда (см., например, [7, с. 354]) справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. Если функция $\varphi^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(2)}(L)$, $G_2(t) \neq 0$, $t \in L$, и $\chi < 2$, то имеет место представление

$$\varphi^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\sigma)}{G_2(\tau)} (\tau - z) \ln \left(1 - \frac{z}{\tau} \right) d\tau + \sum_{k=0}^{-\chi+2} c_k z^k, \quad (5)$$

где $\mu(\sigma) = \mu[\tau(\sigma)]$ – действительная функция переменной $\sigma \in [0, l]$, удовлетворяющая условию Гёльдера, $c_0, c_1, \dots, c_{-\chi+1}$ – комплексные числа, а $c_{-\chi+2}$ – действительное (или чисто мнимое) число, определяемые по заданной функции $\varphi^+(z)$ единственным образом, причем здесь под $\ln \left(1 - \frac{z}{\tau} \right)$ понимается ветвь, исчезающая при $z = 0$.

Лемма 2. Если функция $\varphi^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(2)}(L)$, $G_2(t) \neq 0$, $t \in L$, и $\chi \geq 2$, то имеет место представление

$$\varphi^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\sigma)}{G_2(\tau)} (\tau - z) \ln \left(1 - \frac{z}{\tau} \right) d\tau + c_0, \quad (6)$$

где $c_0 = \varphi^+(0)$; $\mu(\sigma) = \mu[\tau(\sigma)]$ – действительная функция переменной $\sigma \in [0, l]$, которая удовлетворяет условию Гёльдера и определяется по заданной функции $\varphi^+(z)$ с точностью до выражения, линейно зависящего от $2(\chi - 2) + 1$ произвольных действительных постоянных, причем здесь также под $\ln \left(1 - \frac{z}{\tau} \right)$ понимается ветвь, исчезающая при $z = 0$.

Замечание. Отметим, что с помощью дифференцирования из формулы (5) получаются следующие представления:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi^+(z)}{dz} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\sigma)}{G_2(\tau)} \left[\ln \left(1 - \frac{z}{\tau} \right) + 1 \right] d\tau + \sum_{k=1}^{-\chi+2} k c_k z^{k-1}, \\ \frac{d^2\varphi^+(z)}{dz^2} &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\sigma)}{G_2(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + \sum_{k=2}^{-\chi+2} k(k-1) c_k z^{k-2}. \end{aligned}$$

Аналогично из формулы (6) получаем

$$\frac{d\varphi^+(z)}{dz} = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\sigma)}{G_2(\tau)} \left[\ln \left(1 - \frac{z}{\tau} \right) + 1 \right] d\tau,$$

$$\frac{d^2\varphi^+(z)}{dz^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\sigma)}{G_2(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z}.$$

Переходим непосредственно к решению задачи $\mathbf{GP}_1$.

Во-первых, заметим, что с учетом соотношений $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, $\frac{\partial}{\partial y} = i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)$ краевое условие (3) можно переписать в следующем виде:

$$\left[a(t) + ib(t) \right] \frac{\partial W(t)}{\partial t} + \left[a(t) - ib(t) \right] \frac{\partial W(t)}{\partial \bar{t}} + c(t)W(t) = q(t), \quad t \in L, \quad (7)$$

$$\text{где } \frac{\partial W(t)}{\partial t} = \lim_{z \rightarrow t \in L} \frac{\partial W(z)}{\partial z}, \quad \frac{\partial W(t)}{\partial \bar{t}} = \lim_{z \rightarrow t \in L} \frac{\partial W(z)}{\partial \bar{z}}.$$

Во-вторых, из представления (2) при $n = 1$ следует, что всякая обобщенная гармоническая функция $W(z)$ из класса $\mathbf{G}_1(T^+) \cap H^{(2)}(L)$ задается формулой

$$W(z) = \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + \frac{2\bar{z}}{1 - z\bar{z}} \varphi^+(z) + \overline{\frac{df^+(z)}{dz} + \frac{2\bar{z}}{1 - z\bar{z}} f^+(z)}, \quad z \in T^+, \quad (8)$$

где $\varphi^+(z)$, $f^+(z)$ – аналитические в области T^+ функции, которые принадлежат классу $A(T^+) \cap H^{(2)}(L)$.

С учетом представления (8) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(z)}{\partial z} &= \frac{d^2\varphi^+(z)}{dz^2} + \frac{2\bar{z}}{1 - z\bar{z}} \frac{d\varphi^+(z)}{dz} + \frac{2\bar{z}^2}{(1 - z\bar{z})^2} \varphi^+(z) + \frac{2}{(1 - z\bar{z})^2} \overline{f^+(z)}, \\ \frac{\partial W(z)}{\partial \bar{z}} &= \frac{2}{(1 - z\bar{z})^2} \varphi^+(z) + \overline{\frac{d^2f^+(z)}{dz^2} + \frac{2z}{1 - z\bar{z}} \frac{df^+(z)}{dz} + \frac{2z^2}{(1 - z\bar{z})^2} f^+(z)}. \end{aligned} \quad (9)$$

В силу формул (9) краевое условие (7) принимает вид

$$\begin{aligned} &\left[a(t) + ib(t) \right] \frac{d^2\varphi^+(t)}{dt^2} + \left[\left[a(t) + ib(t) \right] \frac{2\bar{t}}{1 - t\bar{t}} + c(t) \right] \frac{d\varphi^+(t)}{dt} + \\ &+ \left[\frac{2\bar{t}^2 [a(t) + ib(t)] + 2[a(t) - ib(t)]}{(1 - t\bar{t})^2} + \frac{2\bar{t}}{1 - t\bar{t}} c(t) \right] \varphi^+(t) + \\ &+ \left[a(t) - ib(t) \right] \overline{\frac{d^2f^+(t)}{dt^2}} + \left[\left[a(t) - ib(t) \right] \frac{2t}{1 - t\bar{t}} + c(t) \right] \overline{\frac{df^+(t)}{dt}} + \\ &+ \left[\frac{2t^2 [a(t) - ib(t)] + 2[a(t) + ib(t)]}{(1 - t\bar{t})^2} + \frac{2t}{1 - t\bar{t}} c(t) \right] \overline{f^+(t)} = q(t). \end{aligned}$$

В свою очередь, последнее равенство можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} &G_2(t) \frac{d^2\varphi^+(t)}{dt^2} + G_1(t) \frac{d\varphi^+(t)}{dt} + G_0(t) \varphi^+(t) + M_2(t) \overline{\frac{d^2f^+(t)}{dt^2}} + \\ &+ M_1(t) \overline{\frac{df^+(t)}{dt}} + M_0(t) \overline{f^+(t)} = q(t), \quad t \in L, \end{aligned} \quad (10)$$

где приняты обозначения

$$\begin{aligned} G_2(t) &= a(t) + ib(t), \quad G_1(t) = \frac{2\bar{t}[a(t) + ib(t)]}{1 - t\bar{t}} + c(t), \\ G_0(t) &= \frac{2\bar{t}^2[a(t) + ib(t)] + 2[a(t) - ib(t)]}{(1 - t\bar{t})^2} + \frac{2\bar{t}c(t)}{1 - t\bar{t}}, \\ M_2(t) &= a(t) - ib(t), \quad M_1(t) = \frac{2t[a(t) - ib(t)]}{1 - t\bar{t}} + c(t), \\ M_0(t) &= \frac{2t^2[a(t) - ib(t)] + 2[a(t) + ib(t)]}{(1 - t\bar{t})^2} + \frac{2tc(t)}{1 - t\bar{t}}. \end{aligned}$$

Теперь, переходя к комплексно-сопряженным значениям, из формулы (10) имеем

$$\begin{aligned} \overline{G_2(t)} \frac{d^2 \overline{\varphi^+(t)}}{dt^2} + \overline{G_1(t)} \frac{d \overline{\varphi^+(t)}}{dt} + \overline{G_0(t)} \overline{\varphi^+(t)} + \overline{M_2(t)} \frac{d^2 f^+(t)}{dt^2} + \\ + \overline{M_1(t)} \frac{df^+(t)}{dt} + \overline{M_0(t)} f^+(t) = \overline{q(t)}, \quad t \in L. \end{aligned} \quad (11)$$

Почленно сложив равенства (10) и (11), а затем разделив обе части полученного равенства на 2, получим

$$\operatorname{Re} \left\{ G_2(t) \frac{d^2 \varphi^+(t)}{dt^2} + G_1(t) \frac{d \varphi^+(t)}{dt} + G_0(t) \varphi^+(t) \right\} = Q(t), \quad t \in L, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} Q(t) &= -\operatorname{Re} \left\{ M_2(t) \frac{d^2 f^+(t)}{dt^2} + M_1(t) \frac{df^+(t)}{dt} + M_0(t) f^+(t) \right\} + \operatorname{Re} q(t) = \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \overline{M_2(t)} \frac{d^2 \overline{f^+(t)}}{dt^2} + \overline{M_1(t)} \frac{d \overline{f^+(t)}}{dt} + \overline{M_0(t)} \overline{f^+(t)} + \right. \\ &\quad \left. + M_2(t) \frac{d^2 f^+(t)}{dt^2} + M_1(t) \frac{df^+(t)}{dt} + M_0(t) f^+(t) \right\} + \frac{1}{2} (q(t) + \overline{q(t)}). \end{aligned} \quad (13)$$

В свою очередь, почленно вычтя из равенства (10) равенство (11), а затем разделив обе части полученного равенства на $2i$, будем иметь

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left\{ G_2(t) \frac{d^2 \varphi^+(t)}{dt^2} + G_1(t) \frac{d \varphi^+(t)}{dt} + G_0(t) \varphi^+(t) + \right. \\ \left. + M_2(t) \frac{d^2 f^+(t)}{dt^2} + M_1(t) \frac{df^+(t)}{dt} + M_0(t) f^+(t) \right\} = \operatorname{Im} q(t), \quad t \in L. \end{aligned} \quad (14)$$

Пусть, как и прежде, $\chi = \operatorname{Ind} G_2(t)$ – индекс Коши функции $G_2(t)$ вдоль кривой L . Предположим, что функция $Q(t)$ известна. Тогда равенство (12) является дифференциальной задачей Гильберта относительно аналитической функции $\varphi^+(z)$ (см., например, [7, с. 357]).

Далее, следуя работе [7, с. 357], если $\chi < 2$, то решения $\varphi^+(z)$ дифференциальной задачи Гильберта (12) будем искать по формуле (5), а если $\chi \geq 2$, то решения $\varphi^+(z)$ данной задачи будем искать по формуле (6). В результате получаем выражение, которое представляет собой интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно неизвестной функции $\mu(s)$:

$$(K\mu)(s) \equiv \mu(s) + \int_L K(s, \sigma) \mu(\sigma) d\sigma = 2Q(s) - \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{-\chi+2} c_k \omega_k(s), \quad (15)$$

где ядро $K(s, \sigma)$ вполне определенным образом выражается через $G_2(t)$; $Q(s) = Q[t(s)]$. Отметим также, что, подставив в краевое условие (12) сумму $\sum_{k=0}^{-\chi+2} c_k t^k$ и ее производные, а затем сгруппировав члены, содержащие одну и ту же постоянную c_k , получим функции $\omega_k(s)$, $k = 1, 2, \dots, -\chi + 2$.

Итак, дифференциальная краевая задача Гильберта (12) равносильна интегральному уравнению Фредгольма (15) в том смысле, что если $\varphi^+(z)$ – некоторое решение задачи Гильберта (12), то найдется функция $\mu(s)$, являющаяся решением уравнения Фредгольма (15) и связанная с $\varphi^+(z)$ по формуле (5) (если $\chi < 2$) или формуле (6) (если $\chi \geq 2$).

Далее введем в рассмотрение однородное интегральное уравнение

$$(K'v)(s) \equiv v(s) + \int_L K(s, \sigma)v(\sigma)d\sigma = 0, \quad (16)$$

союзное с уравнением

$$(K\mu)(s) = 0. \quad (17)$$

Как известно (см., например, [7, с. 175]), для разрешимости неоднородного интегрального уравнения Фредгольма (15) (а значит, и задачи Гильберта (12)) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\int_L Q_1(\sigma)v_k(\sigma)d\sigma = 0, \quad k = 1, 2, \dots, r, \quad (18)$$

где

$$Q_1(\sigma) = 2Q(\sigma) - \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{-\chi+2} c_k \omega_k(\sigma), \quad (19)$$

а $v_1(\sigma), v_2(\sigma), \dots, v_r(\sigma)$ – полная система линейно независимых над полем действительных чисел решений однородного интегрального уравнения (16). При выполнении условий (18) общее решение неоднородного интегрального уравнения Фредгольма (15) задается формулой

$$\mu(s) = Q_1(s) + \int_L R(s, \sigma)Q_1(\sigma)d\sigma + \sum_{j=1}^r \beta_j \mu_j(s), \quad (20)$$

где $R(s, \sigma)$ – обобщенная резольвента ядра $K(s, \sigma)$ (см., например, [8, с. 179]); $\sum_{j=1}^r \beta_j \mu_j(s)$ – общее решение однородного уравнения (17), т. е. здесь $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ – произвольные действительные постоянные.

Наконец, подставляя функцию $\mu(s)$, задаваемую равенством (20), в правую часть формулы (5) (если $\chi < 2$) или формулы (6) (если $\chi \geq 2$), получаем решение дифференциальной задачи Гильберта (12) в виде

$$\begin{aligned} \varphi^+(z) = & \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{G_2(\tau)} \left[Q_1(\sigma) + \int_L R(\sigma, \sigma_1)Q_1(\sigma_1)d\sigma_1 + \sum_{j=0}^r \beta_j \mu_j(\sigma) \right] (\tau - z) \ln \left(1 - \frac{z}{\tau} \right) d\tau + \\ & + \sum_{k=0}^{-\chi+2} c_k z^k = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{Q_1(\tau)}{G_2(\tau)} (\tau - z) \ln \left(1 - \frac{z}{\tau} \right) d\tau + \int_L R_0(z, \tau)Q_1(\tau)d\tau + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{G_2(\tau)} \left[\sum_{j=0}^r \beta_j \mu_{1j}(\tau) \right] (\tau - z) \ln \left(1 - \frac{z}{\tau} \right) d\tau + \sum_{k=0}^{-\chi+2} c_k z^k, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$R_0(z, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{R(\sigma_1, \sigma)}{G_2(\tau_1)} (\tau_1 - z) \ln \left(1 - \frac{z}{\tau_1} \right) d\tau_1,$$

кроме того, здесь учтено, что $\tau = \tau(\sigma)$, $\tau_1 = \tau_1(\sigma_1)$. При $\chi \geq 2$ в правой части формулы (21) сумму $\sum_{k=0}^{-\chi+2} c_k z^k$ нужно заменить на число $c_0 = \varphi^+(0)$.

В свою очередь, с помощью дифференцирования из формулы (21) получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi^+(z)}{dz} = & -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{Q_1(\tau)}{G_2(\tau)} \left[\ln \left(1 - \frac{z}{\tau} \right) + 1 \right] d\tau + \int_L \frac{dR_0(z, \tau)}{dz} Q_1(\tau) d\tau - \\ & - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{G_2(\tau)} \left[\sum_{j=0}^r \beta_j \mu_{1j}(\tau) \right] \left[\ln \left(1 - \frac{z}{\tau} \right) + 1 \right] d\tau + \sum_{k=1}^{-\chi+2} k c_k z^{k-1}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi^+(z)}{dz^2} &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{Q_1(\tau)}{G_2(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + \int_L \frac{d^2 R_0(z, \tau)}{dz^2} Q_1(\tau) d\tau + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{G_2(\tau)} \left[\sum_{j=0}^r \beta_j \mu_j(\sigma) \right] \frac{d\tau}{\tau - z} + \sum_{k=2}^{-\chi+2} k(k-1) c_k z^{k-2}. \end{aligned} \quad (23)$$

При $\chi \geq 2$ в правых частях равенств (22) и (23) суммы $\sum_{k=1}^{-\chi+2} k c_k z^{k-1}$ и $\sum_{k=2}^{-\chi+2} k(k-1) c_k z^{k-2}$ соответственно будут отсутствовать.

Переходя к пределу при $z \rightarrow t \in L$, с учетом формул Сохоцкого, выражений (13) и (19) из формул (21), (22) и (23) соответственно получаем

$$\begin{aligned} \varphi^+(t) &= \sum_{k=0}^2 \int_L R_{1k}(t, \tau) \frac{d^k f^+(\tau)}{d\tau^k} d\tau + \sum_{k=0}^2 \int_L N_{1k}(t, \tau) \frac{\overline{d^k f^+(\tau)}}{d\tau^k} d\tau + \int_L R_1(t, \tau) q_1(\tau) d\tau - \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{G_2(\tau)} \left[\operatorname{Re} \sum_{k=0}^{-\chi+2} c_k \omega_k(\sigma) \right] (\tau - t) \ln \left(1 - \frac{t}{\tau} \right) d\tau - \int_L R_0(t, \tau) \left[\operatorname{Re} \sum_{k=0}^{-\chi+2} c_k \omega_k(\sigma) \right] d\tau + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{G_2(\tau)} \left[\sum_{j=0}^r \beta_j \mu_{1j}(\tau) \right] (\tau - t) \ln \left(1 - \frac{t}{\tau} \right) d\tau + \sum_{k=0}^{-\chi+2} c_k t^k, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi^+(t)}{dt} &= \sum_{k=0}^2 \int_L \frac{dR_{1k}(t, \tau)}{dt} \frac{d^k f^+(\tau)}{d\tau^k} d\tau + \sum_{k=0}^2 \int_L \frac{dN_{1k}(t, \tau)}{dt} \frac{\overline{d^k f^+(\tau)}}{d\tau^k} d\tau + \int_L \frac{dR_1(t, \tau)}{dt} q_1(\tau) d\tau + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{G_2(\tau)} \left[\operatorname{Re} \sum_{k=0}^{-\chi+2} c_k \omega_k(\sigma) \right] \left[\ln \left(1 - \frac{t}{\tau} \right) + 1 \right] d\tau - \int_L \frac{dR_0(t, \tau)}{dt} \left[\operatorname{Re} \sum_{k=0}^{-\chi+2} c_k \omega_k(\sigma) \right] d\tau - \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{G_2(\tau)} \left[\sum_{j=0}^r \beta_j \mu_{1j}(\tau) \right] \left[\ln \left(1 - \frac{t}{\tau} \right) + 1 \right] d\tau + \sum_{k=1}^{-\chi+2} k c_k t^{k-1}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi^+(t)}{dt^2} &= -\frac{1}{2G_2(t)} \left\{ \overline{M_2(t)} \frac{d^2 f^+(t)}{dt^2} + \overline{M_1(t)} \frac{df^+(t)}{dt} + \overline{M_0(t)} f^+(t) + M_2(t) \frac{\overline{d^2 f^+(t)}}{dt^2} + \right. \\ &+ M_1(t) \frac{\overline{df^+(t)}}{dt} + M_0(t) \overline{f^+(t)} \left. \right\} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{M_2(\tau)} \frac{d^2 f^+(\tau)}{d\tau^2} + \overline{M_1(\tau)} \frac{df^+(\tau)}{d\tau} + \overline{M_0(\tau)} f^+(\tau)}{G_2(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} - \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{M_2(\tau) \frac{d^2 f^+(\tau)}{d\tau^2} + M_1(\tau) \frac{df^+(\tau)}{d\tau} + M_0(\tau) \overline{f^+(\tau)}}{G_2(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} + \frac{q_1(t)}{G_2(t)} + \\ &+ \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{q_1(\tau)}{G_2(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} + \sum_{k=0}^2 \int_L R_{2k}(t, \tau) \frac{d^k f^+(\tau)}{d\tau^k} d\tau + \sum_{k=0}^2 \int_L N_{2k}(t, \tau) \frac{\overline{d^k f^+(\tau)}}{d\tau^k} d\tau + \\ &+ 2 \int_L \frac{d^2 R_0(t, \tau)}{dt^2} q_1(\tau) d\tau - \frac{1}{2G_2(t)} \left[\operatorname{Re} \sum_{k=0}^{-\chi+2} c_k \omega_k(s) \right] - \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{G_2(\tau)} \left[\operatorname{Re} \sum_{k=0}^{-\chi+2} c_k \omega_k(\sigma) \right] \frac{d\tau}{\tau - t} - \int_L \frac{d^2 R_0(t, \tau)}{dt^2} \left[\operatorname{Re} \sum_{k=0}^{-\chi+2} c_k \omega_k(\sigma) \right] d\tau + \\ &+ \frac{1}{2G_2(t)} \left[\sum_{j=0}^r \beta_j \mu_j(s) \right] + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{G_2(\tau)} \left[\sum_{j=0}^r \beta_j \mu_j(\sigma) \right] \frac{d\tau}{\tau - t} + \sum_{k=2}^{-\chi+2} k(k-1) c_k t^{k-2}, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{1}{2} \left(q(t) + \overline{q(t)} \right), \quad R_1(t, \tau) = \frac{1}{\pi i} \frac{1}{G_2(\tau)} (\tau - t) \ln \left(1 - \frac{t}{\tau} \right) + 2R_0(t, \tau), \\ R_{1k}(t, \tau) &= -\frac{1}{2} \overline{M_k(\tau)} R_1(t, \tau), \quad N_{1k}(t, \tau) = -\frac{1}{2} M_k(\tau) R_1(t, \tau), \\ R_{2k}(t, \tau) &= -\frac{d^2 R_0(t, \tau)}{dt^2} \overline{M_k(\tau)}, \quad N_{2k}(t, \tau) = -\frac{d^2 R_0(t, \tau)}{dt^2} M_k(\tau), \quad k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Поскольку $f^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(2)}(L)$ и L является кривой Ляпунова, для граничных значений функции $f^+(z)$ и ее производных справедливы следующие формулы (см., например, [7, с. 40]):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^k f^+(t)}{dt^k} &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{d^k f^+(\tau)}{d\tau^k} \frac{d\tau}{\tau - t}, \quad t \in L, \quad k = 0, 1, 2, \\ \frac{1}{2} \frac{\overline{d^k f^+(t)}}{dt^k} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{d^k f^+(\tau)}}{d\tau^k} \frac{[\tau'(\sigma)]^2 d\tau}{\bar{\tau} - \bar{t}}, \quad t \in L, \quad k = 0, 1, 2. \end{aligned} \quad (27)$$

С помощью формул (27) несложно установить справедливость следующих равенств:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\overline{M_k(t)}}{G_2(t)} \frac{d^k f^+(t)}{dt^k} &+ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{M_k(\tau)}}{G_2(\tau)} \frac{d^k f^+(\tau)}{d\tau^k} \frac{d\tau}{\tau - t} = \\ &= \frac{\overline{M_k(t)}}{G_2(t)} \frac{d^k f^+(t)}{dt^k} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[\frac{\overline{M_k(\tau)}}{G_2(\tau)} - \frac{\overline{M_k(t)}}{G_2(t)} \right] \frac{d^k f^+(\tau)}{d\tau^k} \frac{d\tau}{\tau - t} = \\ &= \frac{\overline{M_k(t)}}{G_2(t)} \frac{d^k f^+(t)}{dt^k} + \int_L \Omega_k(t, \tau) \frac{d^k f^+(\tau)}{d\tau^k} d\tau, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{M_k(t)}{G_2(t)} \frac{\overline{d^k f^+(t)}}{dt^k} &+ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{M_k(\tau)}{G_2(\tau)} \frac{\overline{d^k f^+(\tau)}}{d\tau^k} \frac{d\tau}{\tau - t} = \\ &= -\frac{M_k(t)}{G_2(t)} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{d^k f^+(\tau)}}{d\tau^k} \frac{[\tau'(\sigma)]^2 d\tau}{\bar{\tau} - \bar{t}} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[\frac{M_k(\tau)}{G_2(\tau)} - \frac{M_k(t)}{G_2(t)} \right] \frac{\overline{d^k f^+(\tau)}}{d\tau^k} \frac{d\tau}{\tau - t} + \\ &+ \frac{M_k(t)}{G_2(t)} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{d^k f^+(\tau)}}{d\tau^k} \frac{d\tau}{\tau - t} = \frac{M_k(t)}{G_2(t)} \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[\frac{1}{\tau - t} - \frac{[\tau'(\sigma)]^2}{\bar{\tau} - \bar{t}} \right] \frac{\overline{d^k f^+(\tau)}}{d\tau^k} d\tau + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[\frac{M_k(\tau)}{G_2(\tau)} - \frac{M_k(t)}{G_2(t)} \right] \frac{\overline{d^k f^+(\tau)}}{d\tau^k} \frac{d\tau}{\tau - t} = \int_L \Psi_k(t, \tau) \frac{\overline{d^k f^+(\tau)}}{d\tau^k} d\tau, \end{aligned} \quad (29)$$

где приняты обозначения

$$\begin{aligned} \Omega_k(t, \tau) &= \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{\overline{M_k(\tau)}}{G_2(\tau)} - \frac{\overline{M_k(t)}}{G_2(t)} \right] \frac{1}{\tau - t}, \\ \Psi_k(t, \tau) &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \frac{M_k(t)}{G_2(t)} \left[\frac{1}{\tau - t} - \frac{[\tau'(\sigma)]^2}{\bar{\tau} - \bar{t}} \right] + \left[\frac{M_k(\tau)}{G_2(\tau)} - \frac{M_k(t)}{G_2(t)} \right] \frac{1}{\tau - t} \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \end{aligned}$$

причем здесь $\Omega_k(t, \tau)$, $\Psi_k(t, \tau)$ ($k = 0, 1, 2$) – вполне определенные фредгольмовы ядра, так как функции $G_2(t)$, $M_k(t)$ ($k = 0, 1, 2$) удовлетворяют на L условию Гёльдера, а L является кривой Ляпунова.

С учетом равенств (28) и (29) формулу (26) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi^+(t)}{dt^2} = & - \sum_{k=0}^2 \frac{\overline{M_k(t)}}{G_2(t)} \frac{d^k f^+(t)}{dt^k} + \sum_{k=0}^2 \int_L \Omega_{1k}(t, \tau) \frac{d^k f^+(\tau)}{d\tau^k} d\tau - \\ & - \sum_{k=0}^2 \int_L \Psi_{1k}(t, \tau) \frac{d^k f^+(\tau)}{d\tau^k} d\tau + \frac{q_1(t)}{G_2(t)} + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{q_1(\tau)}{G_2(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} + \\ & + 2 \int_L \frac{d^2 R_0(t, \tau)}{dt^2} q_1(\tau) d\tau - \frac{1}{2G_2(t)} \left[\operatorname{Re} \sum_{k=0}^{-\chi+2} c_k \omega_k(s) \right] - \\ & - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{G_2(\tau)} \left[\operatorname{Re} \sum_{k=0}^{-\chi+2} c_k \omega_k(\sigma) \right] \frac{d\tau}{\tau - t} - \int_L \frac{d^2 R_0(t, \tau)}{dt^2} \left[\operatorname{Re} \sum_{k=0}^{-\chi+2} c_k \omega_k(\sigma) \right] d\tau + \\ & + \frac{1}{2G_2(t)} \left[\sum_{j=0}^r \beta_j \mu_j(s) \right] + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{G_2(\tau)} \left[\sum_{j=0}^r \beta_j \mu_j(\sigma) \right] \frac{d\tau}{\tau - t} + \sum_{k=2}^{-\chi+2} k(k-1) c_k t^{k-2}, \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$\Omega_{1k}(t, \tau) = -\Omega_k(t, \tau) + R_{2k}(t, \tau), \quad \Psi_{1k}(t, \tau) = -\Psi_k(t, \tau) + N_{2k}(t, \tau), \quad k = 0, 1, 2.$$

Далее, подставив в левую часть равенства (14) вместо $\varphi^+(t)$, $\frac{d\varphi^+(t)}{dt}$ и $\frac{d^2 \varphi^+(t)}{dt^2}$ их значения, которые задаются с помощью формул (24), (25) и (30) соответственно, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left\{ -\overline{M_2(t)} \frac{d^2 f^+(t)}{dt^2} - \overline{M_1(t)} \frac{df^+(t)}{dt} - \overline{M_0(t)} f^+(t) + \right. \\ \left. + M_2(t) \frac{d^2 \overline{f^+(t)}}{dt^2} + M_1(t) \frac{d\overline{f^+(t)}}{dt} + M_0(t) \overline{f^+(t)} \right\} + \\ + \operatorname{Im} \left\{ \sum_{k=0}^2 \int_L \Omega_{2k}(t, \tau) \frac{d^k f^+(\tau)}{d\tau^k} d\tau + \sum_{k=0}^2 \int_L \Psi_{2k}(t, \tau) \frac{d^k \overline{f^+(\tau)}}{d\tau^k} d\tau \right\} = \\ = \operatorname{Im} \left\{ q(t) + \sum_{j=0}^l \alpha_j \rho_j(t) \right\}, \quad t \in L, \end{aligned} \quad (31)$$

где $\Omega_{2k}(t, \tau)$, $\Psi_{2k}(t, \tau)$ ($k = 0, 1, 2$) – вполне определенные фредгольмовы ядра; $\rho_j(t)$ ($j = 0, 1, \dots, l$) – вполне определенные функции, принадлежащие классу $H(L)$, α_j ($j = 0, 1, \dots, l$) – произвольные действительные постоянные,

$$l = \begin{cases} r + 2, & \text{если } \chi \geq 2, \\ r + 2(2 - \chi), & \text{если } \chi < 2. \end{cases}$$

Так как для комплексной функции $\Phi(t) = \operatorname{Re} \Phi(t) + i \operatorname{Im} \Phi(t)$ справедливо соотношение $\operatorname{Im} \{ -\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} \} = \operatorname{Im} \{ -2i \operatorname{Im} \Phi(t) \} = -2 \operatorname{Im} \Phi(t) = 2 \operatorname{Re} \{ i \Phi(t) \}$, то равенство (31) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ i \overline{M_2(t)} \frac{d^2 f^+(t)}{dt^2} + i \overline{M_1(t)} \frac{df^+(t)}{dt} + i \overline{M_0(t)} f^+(t) \right\} + \\ + \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i}{2} \left(\sum_{k=0}^2 \int_L \Omega_{2k}(t, \tau) \frac{d^k f^+(\tau)}{d\tau^k} d\tau + \sum_{k=0}^2 \int_L \Psi_{2k}(t, \tau) \frac{d^k \overline{f^+(\tau)}}{d\tau^k} d\tau \right) \right\} = \\ = \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i}{2} \left(q(t) - q_1(t) + \sum_{j=0}^l \alpha_j \rho_j(t) + \sum_{k=0}^3 \int_L P_k(t, \tau) d\tau \right) \right\}, \quad t \in L, \end{aligned} \quad (32)$$

Однако представление (32) есть не что иное, как краевое условие исследованной (см., например, [7, с. 357]) интегро-дифференциальной задачи Гильберта относительно аналитической функции $f^+(z)$.

Решая задачу Гильберта (32) (в случае ее разрешимости), определяем аналитическую функцию $f^+(z)$. Подставляя в правую часть краевого условия (12) вместо $f^+(t)$, $\frac{df^+(t)}{dt}$ и $\frac{d^2f^+(t)}{dt^2}$ граничные значения найденной функции $f^+(z)$ и ее производных и решая дифференциальную задачу Гильберта (12), определяем аналитическую функцию $\varphi^+(z)$. Наконец, подставляя значения найденных аналитических функций $\varphi^+(z)$ и $f^+(z)$ в правую часть формулы (8), получаем решение искомой задачи GP_1 .

Из приведенных выше рассуждений вытекает справедливость следующего основного утверждения.

Теорема 1. Пусть $a(t) + ib(t) \neq 0$, $a(t) - ib(t) \neq 0$, $t \in L$. Тогда решение граничной задачи GP_1 сводится к последовательному решению интегро-дифференциальной задачи Гильберта вида (32) относительно аналитической функции $f^+(z)$ и дифференциальной задачи Гильберта вида (12) относительно аналитической функции $\varphi^+(z)$. Для того чтобы граничная задача GP_1 была разрешимой, необходимо и достаточно, чтобы одновременно были разрешимы вспомогательные задачи Гильберта (32) и (12).

В заключение важно отметить, что при выполнении условий $a(t) + ib(t) \neq 0$, $a(t) - ib(t) \neq 0$, $t \in L$, дифференциальная задача Гильберта (12) и интегро-дифференциальная задача Гильберта (32) в классах аналитических функций являются нетеровыми (см., например, [7, с. 362]), т. е. как число p линейно независимых решений соответствующих задач (12) и (32) однородных задач, так и число q условий разрешимости вспомогательных неоднородных задач являются конечными. Таким образом, в силу представления (8) и теоремы 1 задача GP_1 при выполнении условий (4) также будет нетеровой.

Библиографические ссылки

1. Нагорная ТР, Расулов КМ. Алгоритм явного решения задачи Пуанкаре для обобщенных гармонических функций второго порядка в круговых областях. *Научно-технический вестник Поволжья*. 2022;11:24–27. EDN: KIPYRE.
2. Bauer KW. Über eine der Differentialgleichung $(1 \pm z\bar{z})^2 W_{z\bar{z}} \pm n(n+1)W = 0$ zugeordnete Funktionentheorie. [S. l.]: [s. n.]; 1965. 98 S. (Bonner mathematische Schriften; Nummer 23).
3. Bauer KW, Ruscheweyh S. *Differential operators for partial differential equations and function theoretic applications*. Berlin: Springer-Verlag; 1980. V, 258 p. (Dold A, Eckmann B, editors. Lecture notes in mathematics; volume 791). DOI: 10.1007/BFb0103468.
4. Нагорная ТР, Расулов КМ. О краевой задаче Пуанкаре для обобщенных гармонических функций в круговых областях. *Научно-технический вестник Поволжья*. 2022;7:32–35. EDN: FCWCDP.
5. Расулов КМ, Нагорная ТР. О решении в явном виде краевой задачи Неймана для дифференциального уравнения Бауэра в круговых областях. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2021;21(3):326–335. DOI: 10.18500/1816-9791-2021-21-3-326-335.
6. Бицадзе АВ. *Уравнения математической физики*. Москва: Наука; 1976. 295 с.
7. Гахов ФД. *Краевые задачи*. 3-е издание. Москва: Наука; 1977. 640 с.
8. Мусхелишвили НИ. *Сингулярные интегральные уравнения: граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике*. 3-е издание. Москва: Наука; 1968. 511 с.

References

1. Nagornaya TR, Rasulov KM. A solution algorithm of the Poincaré boundary value problem for the second-order generalized harmonic functions in circular domains. *Scientific and Technical Volga Region Bulletin*. 2022;11:24–27. Russian. EDN: KIPYRE.
2. Bauer KW. Über eine der Differentialgleichung $(1 \pm z\bar{z})^2 W_{z\bar{z}} \pm n(n+1)W = 0$ zugeordnete Funktionentheorie. [S. l.]: [s. n.]; 1965. 98 S. (Bonner mathematische Schriften; Nummer 23).
3. Bauer KW, Ruscheweyh S. *Differential operators for partial differential equations and function theoretic applications*. Berlin: Springer-Verlag; 1980. V, 258 p. (Dold A, Eckmann B, editors. Lecture notes in mathematics; volume 791). DOI: 10.1007/BFb0103468.
4. Nagornaya TR, Rasulov KM. On the Poincaré boundary value problem for generalized harmonic functions in circular domains. *Scientific and Technical Volga Region Bulletin*. 2022;7:32–35. Russian. EDN: FCWCDP.
5. Rasulov KM, Nagornaya TR. The explicit solution of the Neumann boundary value problem for Bauer differential equation in circular domains. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2021;21(3):326–335. Russian. DOI: 10.18500/1816-9791-2021-21-3-326-335.
6. Bitsadze AV. *Uравneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow: Nauka; 1976. 295 p. Russian.
7. Gakhov FD. *Kraevye zadachi* [Boundary value problems]. 3rd edition. Moscow: Nauka; 1977. 640 p. Russian.
8. Muskhelishvili NI. *Singulyarnye integral'nye uravneniya: granichnye zadachi teorii funktsii i nekotorye ikh prilozheniya k matematicheskoi fizike* [Singular integral equations: boundary value problems of function theory and some of their applications to mathematical physics]. 3rd edition. Moscow: Nauka; 1968. 511 p. Russian.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

THEORETICAL AND PRACTICAL MECHANICS

УДК 532, 519.6

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ИЗ ОДНОРОДНОГО ГАЗА В ГАЗОВЗВЕСЬ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ДИСПЕРСНОЙ ФАЗЫ

Д. А. ТУКМАКОВ¹⁾

¹⁾Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН,
ул. Лобачевского, 2, 420111, г. Казань, Россия

Аннотация. Представлена численная модель распространения ударной волны в газовзвеси, реализующая континуальную методику моделирования динамики неоднородных сред (для каждого из компонентов смеси решается полная гидродинамическая система уравнений движения). Несущая среда описана как вязкий, сжимаемый, теплопроводный газ. В математической модели учтены обмен импульсом и теплообмен между компонентами смеси. Уравнения модели решены явным конечно-разностным методом Мак-Кормака. Для получения монотонного решения применена схема нелинейной коррекции. Рассмотрен процесс взаимодействия ударной волны, проходящей из однородного газа в газовзвесь. Принято, что дисперсная фаза в камере низкого давления имеет периодическое пространственное распределение концентрации. Определена связь между периодичностью распределения концентрации частиц и величиной перепада давления газа при прохождении ударной волны через газовзвесь. Проанализировано влияние интенсивности ударной волны на величину перепада давления газа при прохождении участков газовзвеси с циклически распределенной концентрацией дисперсной фазы.

Ключевые слова: монодисперсная газовзвесь; взаимопроникающие континуумы; явная схема Мак-Кормака; ударные волны.

Благодарность. Работа выполнена в рамках государственного задания Казанского научного центра РАН «Развитие механики многофазных и аэрогидроупругих систем, оболочечных конструкций с приложениями в машиностроении и нефтедобыче».

Образец цитирования:

Тукмаков ДА. Численное исследование распространения ударной волны из однородного газа в газовзвесь с периодическим распределением дисперсной фазы. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2024;1:16–28.
EDN: AJKLQQ

For citation:

Tukmakov DA. A numerical study of the propagation of a shock wave from a homogeneous gas into a gas suspension with a periodic distribution of the dispersed phase. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2024;1:16–28. Russian.
EDN: AJKLQQ

Автор:

Дмитрий Алексеевич Тукмаков – кандидат физико-математических наук; научный сотрудник лаборатории механики сплошной среды.

Author:

Dmitry A. Tukmakov, PhD (physics and mathematics); researcher at the laboratory of continuum mechanics.
tukmakovda@imm.knc.ru

A NUMERICAL STUDY OF THE PROPAGATION OF A SHOCK WAVE FROM A HOMOGENEOUS GAS INTO A GAS SUSPENSION WITH A PERIODIC DISTRIBUTION OF THE DISPERSED PHASE

D. A. TUKMAKOV^a

^a*Institute of Mechanics and Engineering, Kazan Scientific Centre, Russian Academy of Sciences,
2 Lobachevskogo Street, Kazan 420111, Russia*

Abstract. In this paper, we present a numerical model of shock wave propagation in a gas suspension. The mathematical model realised a continuum technique for modelling the dynamics of inhomogeneous media, namely, for each component of the suspension, a complete hydrodynamic system of motion equations was solved. The carrier medium was described as a viscous, compressible heat-conducting gas. The mathematical model took into account the exchanges of momentum heat between the components of the mixture. The equations of the mathematical model were solved by the explicit McCormack finite-difference method. To obtain a monotonic solution, a non-linear correction scheme was used. The process of interaction of a shock wave passed from a homogeneous gas into a gas suspension was considered. The dispersed phase in the low-pressure chamber had a periodic spatial distribution of the concentration. The influence of the periodicity of the particle concentration distribution on the pressure drop during the passage of a shock wave through a gas suspension was determined. The influence of the intensity of the shock wave on the value of the gas pressure drop when passing through sections of a gas suspension with a cyclically distributed concentration of the dispersed phase was considered.

Keywords: monodisperse gas suspension; interpenetrating continua; explicit McCormack scheme; shock waves.

Acknowledgements. The work was carried out within the framework of the state assignment of the Kazan Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences «Development of the mechanics of multiphase and aerohydroelastic system, shell structures with applications in mechanical engineering and oil production».

Введение

Многие задачи механики жидкости и газа имеют нелинейный характер и решаются преимущественно не аналитическими [1], а численными методами [1–28]. В отличие от классической гидродинамики [1] в динамике неоднородных сред [2–6] характер течения зависит от межфазного взаимодействия. Общая теория динамики многофазных сред представлена в монографии [2]. В работе [3] исследованы проблемы движения газожидкостных сред с большими скоростями, изложены теоретические основы, расчетные методы и прикладные задачи. В книге [4] рассмотрены вопросы математического моделирования ударно-волновых процессов в многофазных средах, приведены уравнения и найдена структура ударной волны в смеси газов и в двухфазной смеси. Работа [5] посвящена численным расчетам динамики запыленных, газокapельных и порошковых сред в одномерном приближении на основе модели идеального газа. В монографии [6] разработаны численные алгоритмы и приведены результаты расчетов ударно-волновых и детонационных процессов в газовзвесах металлических частиц.

В статье [7] предложен численный алгоритм решения задачи Римана для моделей сжимаемого двухфазного потока, содержащих неконсервативные слагаемые, отвечающие за взаимодействие фаз. В работе [8] представлена нестационарная модель фокусировки инерционных частиц за счет силы Саффмэна с использованием ударных волн в микроканале постоянного сечения. Рассчитано течение разреженной дисперсной смеси за плоской ударной волной, движущейся с постоянной скоростью в двумерной области. В статье [9] предложен алгоритм расчета параметров стационарной одномерной детонационной волны в смесях газа с химически инертными частицами. Рассчитаны минимальная масса частиц и характерный размер облака, необходимые для подавления детонации. Проанализировано влияние термодинамических параметров частиц на процесс подавления детонации. Определено, что самыми эффективными являются частицы с более высокой теплоемкостью и (при наличии плавления) большей теплотой фазового перехода. В работе [10] методами механики многофазных сред исследовано взаимодействие гомогенных и гетерогенных детонационных волн в смесях, содержащих частицы алюминия и капли воды. Выполнено моделирование подавления детонации с помощью облаков инертных частиц. В публикации [11] приведены результаты численного исследования прерывания распространения детонационных волн в газовзвесах унитарного топлива слоем неоднородных инертных частиц. Установлено, что при фиксированной общей массе взвеси детонационные волны лучше ослабляются слоем с линейно убывающей концентрацией инертных частиц, чем слоем с линейно возрастающей и однородной концентрацией таких частиц. В работе [12] исследованы и реализованы разностная схема типа TVD

и метод крупных частиц для решения математических моделей механики гетерогенных сред с различными скоростями движения и давлениями компонентов. В качестве приложения рассмотрена задача об отражении ударной волны от стенки в неоднородной по концентрации смеси. В исследовании [13] на основе модели взаимопроникающих континуумов выполнено численное моделирование нестационарного течения газозвеси, возникающего при взаимодействии ударной волны со слоем инертных частиц. Приведены ударно-волновая структура течения и пространственно-временные зависимости концентрации частиц. В статье [14] изучены динамика движения скачка уплотнения в газе и его взаимодействие с ограниченным слоем газозвеси для различных размеров дисперсных частиц. Задача характеризуется двумя распадами разрывов – отраженной и преломленной ударными волнами.

В работе [15] представлена математическая модель распространения воздушных ударных волн в сети выработок угольной шахты после мгновенного взрыва метановоздушной смеси. Предложен подход к реализации метода решения задач о распространении воздушных ударных волн в разветвленной сети горных выработок с учетом произвольных углов их сопряжения.

В статье [16] численно моделируется взаимодействие ударной волны с плотной засыпкой частиц. Математическая модель реализует континуальную методику моделирования динамики многофазных сред. Изучается влияние параметров дисперсной фазы и свойств вычислительного алгоритма на характеристики моделируемого процесса. Работа [17] посвящена численному исследованию распространения ударной волны в среде с неравномерным распределением плотности. Математическая модель основана на уравнениях Эйлера. Рассмотрены задачи о распространении ударной волны в среде при прохождении участков конечной длины с линейно увеличивающейся и уменьшающейся концентрацией дисперсной фазы. Также исследован случай непрерывного изменения плотности среды перед ударной волной по синусоидальному закону. Возникающее при этом течение описано и объяснено с использованием результатов, полученных для случая линейного градиента плотности. В публикации [18] представлена математическая модель, описывающая гетерогенную детонацию газозвесей с неоднородными концентрациями частиц. Изучены проблемы возникновения и развития ячеистой детонации газозвесей, содержащих микронные частицы алюминия, в плоских каналах. Проанализированы закономерности формы переднего фронта волны и скорости распространения детонации в каналах с продольными или поперечными градиентами концентрации частиц. В статье [19] разработана одномерная численная модель динамики газокapельной среды на основе гибридного подхода Эйлера – Лагранжа для исследования взаимодействия распространяющихся ударных волн и дисперсной фазы – испаряющихся капель воды. Принята двусторонняя связь для межфазного обмена массой, импульсом и энергией. Установлено, что скачок давления газа может затухать до звуковой волны и даже дозвуковой волны, когда объемная доля капельной фазы велика или число Маха падающей ударной волны мало.

Анализ работ, посвященных динамике неоднородных сред, показывает, что задача описания динамики газозвесей имеет разнообразные практические применения – от проблем, связанных с разработкой горных выработок, до совершенствования аэрокосмических технологий. В данной статье рассматриваются динамические процессы в газозвесах с учетом межфазного взаимодействия: моделируется распространение ударной волны в неоднородной среде с периодическим распределением концентрации дисперсной фазы. Кроме того, исследуется влияние распределения концентрации дисперсной фазы на пространственное распределение газодинамических параметров несущей среды.

Методика исследования

В работе применяется континуальная модель динамики газозвеси для двухтемпературной двухскоростной монодисперсной смеси газа и частиц [5; 20–25]. Система уравнений динамики газозвеси включает в себя уравнение неразрывности для несущей среды

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_1 v_1)}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

уравнения сохранения компонент импульса газа, записанные с учетом межфазного обмена импульсом в виде

$$\frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 u_1^2 + p - \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_1 u_1 v_1 - \tau_{xy})}{\partial y} = -F_x + \alpha \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho_1 v_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 u_1 v_1 - \tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_1 v_1^2 + p - \tau_{yy})}{\partial y} = -F_y + \alpha \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (3)$$

уравнение сохранения полной энергии

$$\begin{aligned} \frac{\partial(e_1)}{\partial t} + \frac{\partial\left((e_1 + p - \tau_{xx})u_1 - \tau_{xy}v_1 + \lambda \frac{\partial T_1}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left((e_1 + p - \tau_{yy})v_1 - \tau_{xy}u_1 + \lambda \frac{\partial T_1}{\partial y}\right)}{\partial y} = \\ = -Q - |F_x|(u_1 - u_2) - |F_y|(v_1 - v_2) + \alpha \frac{\partial(pu_1)}{\partial x} + \alpha \frac{\partial(pv_1)}{\partial y}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь p , ρ_1 , u_1 , v_1 – давление, плотность, декартовы составляющие скорости движения несущей среды в направлении осей x и y соответственно; τ_{xx} , τ_{yy} , τ_{xy} – составляющие тензора вязких напряжений; F_x , F_y – силы межфазного взаимодействия; α – объемное содержание дисперсной фазы; T_1 , e_1 – температура и полная энергия газа; λ – теплопроводность газа; Q – теплообмен между несущей средой и дисперсной фазой.

Температура и давление несущей среды определяются выражениями

$$\begin{aligned} T_1 &= (\gamma - 1) \frac{\left(\frac{e_1}{\rho_1} - 0,5(u_1^2 + v_1^2)\right)}{R}, \\ p &= (\gamma - 1) \left(e_1 - 0,5\rho_1(u_1^2 + v_1^2)\right), \end{aligned}$$

где γ – постоянная адиабаты; R – газовая постоянная несущей среды.

Составляющие тензора вязких напряжений задаются формулами

$$\tau_{xx} = \mu \left(2 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{2}{3} D\right), \quad \tau_{yy} = \mu \left(2 \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{2}{3} D\right), \quad \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x}\right).$$

Здесь $D = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}$; μ – динамическая вязкость несущей среды.

Средняя плотность дисперсной фазы определяется как $\rho_2(t, x, y) = \rho_{20}\alpha(t, x, y)$, где $\rho_{20} = \text{const}$ – физическая плотность материала дисперсного компонента смеси. Система уравнений динамики дисперсной фазы включает в себя уравнение неразрывности, уравнения сохранения компонент импульса, записанные с учетом межфазного обмена импульсом, и уравнение сохранения тепловой энергии:

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2 u_2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_2 v_2)}{\partial y} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial(\rho_2 u_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2 u_2^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_2 u_2 v_2)}{\partial y} = F_x - \alpha \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial(\rho_2 v_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2 u_2 v_2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_2 v_2^2)}{\partial y} = F_y - \alpha \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial(e_2)}{\partial t} + \frac{\partial(e_2 u_2)}{\partial x} + \frac{\partial(e_2 v_2)}{\partial y} = Q. \quad (8)$$

Здесь ρ_2 , e_2 , u_2 , v_2 – средняя плотность, внутренняя энергия, декартовы составляющие скорости движения дисперсной фазы в направлении осей x и y соответственно.

Межфазный обмен импульсом включает в себя силу аэродинамического сопротивления, динамическую силу Архимеда и силу присоединенных масс:

$$F_x = F_{Cx} + F_{Ax} + F_{mx}, \quad F_{Cx} = \frac{3}{4} \frac{\alpha}{d} C_d \rho_1 \sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2} (u_1 - u_2),$$

$$F_{Ax} = \alpha \rho_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right), \quad F_{mx} = 0,5 \alpha \rho_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t} - u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} - v_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} \right);$$

$$F_y = F_{Cy} + F_{Ay} + F_{my}, F_{Cy} = \frac{3}{4} \frac{\alpha}{d} C_d \rho_1 \sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2} (v_1 - v_2),$$

$$F_{Ay} = \alpha \rho_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} \right), F_{my} = 0,5 \alpha \rho_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial t} - u_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} - v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} \right).$$

Здесь символы C, A, m в нижнем индексе обозначают силу аэродинамического сопротивления, динамическую силу Архимеда и силу присоединенных масс соответственно [2]; d – диаметр частицы; C_d – коэффициент сопротивления сферической частицы.

Внутренняя энергия взвешенной в газе дисперсной фазы определяется как $e_2 = \rho_2 C_{p2} T_2$, где C_{p2} – удельная теплоемкость единицы массы вещества дисперсной фазы; T_2 – температура дисперсной фазы.

Теплообмен между несущей средой и дисперсной фазой описывается выражением $Q = \frac{6\alpha\lambda Nu_1(T_1 - T_2)}{d^2}$.

Здесь Nu_1 – относительное число Нуссельта [5], определяемое с помощью известной аппроксимации в зависимости от относительного числа Маха (M_1), относительного числа Рейнольдса (Re_1) и числа Прандтля (Pr) [2; 3; 5]:

$$M_1 = \frac{|\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2|}{c}, \mathbf{V}_i = [u_i, v_i], Pr = C_p \mu \lambda^{-1}, Nu_1 = 2 \exp(-M_1) + 0,459 Re_1^{0,55} Pr^{0,33},$$

где c – скорость звука; C_p – теплоемкость газа при постоянном давлении.

Система уравнений динамики монодисперсной газозвеси (1)–(8) решалась явным конечно-разностным методом Мак-Кормака [26] с расщеплением по пространственным направлениям [27] и схемой нелинейной коррекции [20; 28], реализованным в программном коде.

Монотонность решения достигалась за счет применения алгоритма нелинейной коррекции [20; 28] к вектору искомых функций $\mathbf{q} = (\rho_1, u_1, v_1, e_1, \rho_2, u_2, v_2, e_2)^T$ системы уравнений после перехода на новый временной слой при $t = t^{n+1}$. Алгоритм коррекции выполнялся последовательно вдоль координаты x , а затем вдоль координаты y в расчетной области. Нижний индекс обозначает номер узла сетки в направлении оси x или y соответственно: $U_j = \tilde{U}_j + \kappa \left(\delta\Phi_{j+\frac{1}{2}} - \delta\Phi_{j-\frac{1}{2}} \right)$, где $\delta\Phi_{j+\frac{1}{2}} = \delta\tilde{U}_{j+\frac{1}{2}}$, если

$\delta\tilde{U}_{j-\frac{1}{2}} \delta\tilde{U}_{j+\frac{1}{2}} < 0$ или $\delta\tilde{U}_{j+\frac{1}{2}} \delta\tilde{U}_{j+\frac{3}{2}} < 0$, и $\delta\Phi_{j+\frac{1}{2}} = 0$ в любом другом случае. Здесь использованы обозначения $\delta\tilde{U}_{j-\frac{1}{2}} = \tilde{U}_j - \tilde{U}_{j-1}$, $\delta\tilde{U}_{j+\frac{1}{2}} = \tilde{U}_{j+1} - \tilde{U}_j$, $\delta\tilde{U}_{j+\frac{3}{2}} = \tilde{U}_{j+2} - \tilde{U}_{j+1}$, где $\tilde{U}_j$ – значение функции после

перехода на $(n+1)$ -й временной слой по схеме Мак-Кормака; $\kappa = 0,125$ – коэффициент. В двумерной конечно-разностной аппроксимации на границах расчетной области для газа и дисперсной фазы задавались следующие граничные условия:

$$u_1(t, 1, j) = 0, u_2(t, 1, j) = 0, v_1(t, 1, j) = 0, v_2(t, 1, j) = 0,$$

$$u_1(t, N_x, j) = 0, u_2(t, N_x, j) = 0, v_1(t, N_x, j) = 0, v_2(t, N_x, j) = 0,$$

$$u_1(t, i, 1) = u_1(t, i, 2), u_2(t, i, 1) = u_2(t, i, 2),$$

$$v_1(t, i, 1) = v_1(t, i, 2), v_2(t, i, 1) = v_2(t, i, 2),$$

$$u_1(t, i, N_y) = u_1(t, i, N_y - 1), u_2(t, i, N_y) = u_2(t, i, N_y - 1),$$

$$v_1(t, i, N_y) = v_1(t, i, N_y - 1), v_2(t, i, N_y) = v_2(t, i, N_y - 1),$$

$$\rho_1(t, 1, j) = \rho_1(t, 2, j), \rho_2(t, 1, j) = \rho_2(t, 2, j),$$

$$\rho_1(t, N_x, j) = \rho_1(t, N_x - 1, j), \rho_2(t, N_x, j) = \rho_2(t, N_x - 1, j),$$

$$\begin{aligned}\rho_1(t, i, 1) &= \rho_1(t, i, 2), \quad \rho_2(t, i, 1) = \rho_2(t, i, 2), \\ \rho_1(t, i, N_y) &= \rho_1(t, i, N_y - 1), \quad \rho_2(t, i, N_y) = \rho_2(t, i, N_y - 1), \\ e_1(t, 1, j) &= e_1(t, 2, j), \quad e_2(t, 1, j) = e_2(t, 2, j), \\ e_1(t, N_x, j) &= e_1(t, N_x - 1, j), \quad e_2(t, N_x, j) = e_2(t, N_x - 1, j), \\ e_1(t, i, 1) &= e_1(t, i, 2), \quad e_2(t, i, 1) = e_2(t, i, 2), \\ e_1(t, i, N_y) &= e_1(t, i, N_y - 1), \quad e_2(t, i, N_y) = e_2(t, i, N_y - 1), \\ p(t, 1, j) &= p(t, 2, j), \quad p(t, N_x, j) = p(t, N_x - 1, j), \\ p(t, i, 1) &= p(t, i, 2), \quad p(t, i, N_y) = p(t, i, N_y - 1).\end{aligned}$$

Здесь N_x и N_y – количество узлов сетки в направлении осей x и y соответственно.

Реализация программного кода на языке GNU Fortran имеет следующую структуру.

Шаг 1. Строится конечно-разностная сетка.

Шаг 2. Задаются физические параметры фаз.

Шаг 3. Задаются начальные и граничные условия для газа и дисперсной фазы.

Шаг 4. Определяется значение величин межфазного обмена импульсом и теплообмена.

Шаг 5. Реализуется основной вычислительный цикл, переводящий зависимые газодинамические переменные (газ, дисперсная фаза) на следующий временной слой.

Шаг 6. Проводится нелинейная коррекция сеточных функций, при необходимости включается механизм фильтрации.

Шаг 7. Задаются граничные условия на новом временном слое.

С заданной периодичностью осуществляется файловый вывод пространственных полей и временных реализаций выбранных функций в определенных узлах. Программный комплекс состоит из нескольких подпрограмм: подпрограммы задания граничных условий, подпрограммы формирования конечно-разностного разбиения физической области, подпрограммы расчета взаимодействия компонентов смеси, основной программы численного решения уравнений динамики газозвеси.

В статье [21] с помощью описанной методики выполнено численное моделирование процесса разрыва в газозвеси с равномерным распределением концентрации дисперсной фазы. В работе [22] численно исследовано влияние дисперсности и плотности частиц монодисперсной газозвеси при распространении ударной волны из однородного газа в газозвесь. В публикации [23] проведено сравнение численных расчетов, выполненных описанным вычислительным комплексом, с известными из литературы численными расчетами ударно-волновой динамики газозвеси. В статье [24] результаты численных расчетов данной модели сопоставлены с результатами физического эксперимента по распространению ударной волны из газозвеси в чистый газ, а в публикации [25] – с результатами физического эксперимента по акустическим колебаниям газозвеси.

Результаты и их обсуждение

В качестве газозвеси рассматривался воздух со взвешенными в нем частицами кварцевого песка. Заданные при моделировании физические параметры фаз приведены в табл. 1. Расчетная область представляла собой канал длиной $L = 1$ м, шириной $h = 0,1$ м, который был разделен диафрагмой на две части – камеры высокого (p_2) и низкого (p_1) давления [1; 5]. Сетка включала в себя $N_x = 400$ узлов в продольном направлении и $N_y = 40$ узлов в поперечном направлении (рис. 1). В камере высокого давления при $x < \frac{L}{2}$ находится однородный газ с давлением p_2 , а в камере низкого давления (p_1) при $x > \frac{L}{2}$ задано распределение средней

плотности дисперсной фазы по периодическому закону: $\rho_2(x, y) = \rho_{20} \alpha_0 \left(0,5 + 0,5 \sin \left(4\pi k \left(x - \frac{L}{2} \right) \right) \right)$,

где α_0 – начальное объемное содержание частиц; k – волновое число (рис. 2).

Таблица 1

Заданные при моделировании
физические параметры фаз газозвеси

Table 1

Physical parameters
of gas suspension phases specified during modelling

Параметры	Значение
<i>Дисперсная фаза (кварцевый песок)</i>	
Физическая плотность (ρ_{20}), кг/м ³	2500
Диаметр частиц (d), мкм	2
Начальное объемное содержание частиц (α_0)	0,001
<i>Несущая среда (воздух)</i>	
Молярная масса (M), кг/моль	$29 \cdot 10^{-3}$
Теплопроводность (λ), Вт/(м · К)	0,025 53
Динамическая вязкость (μ), Па · с	$1,72 \cdot 10^{-5}$
Постоянная адиабаты (γ)	1,4
Газовая постоянная (R), Дж/(моль · К)	8,31

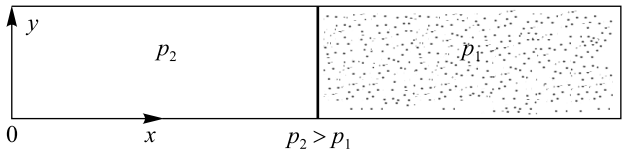


Рис. 1. Общая схема моделируемого процесса
Fig. 1. General diagram of the simulated process

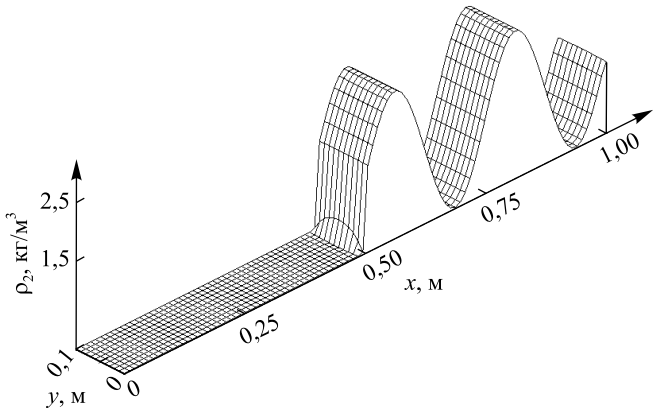


Рис. 2. Начальное пространственное распределение
средней плотности дисперсной фазы
Fig. 2. Initial spatial distribution
of the average density of the dispersed phase

Сопоставляя результаты расчетов распространения ударных волн в различных средах, можно видеть, что при распространении ударной волны из однородного газа в газозвесь с равномерным распределением концентрации дисперсной фазы ($\rho_2(x, y) = \rho_{20}\alpha_0$) наблюдаются меньшая скорость распространения ударной волны и большее давление газа на переднем крае ударной волны (рис. 3). В газозвеси с периодическим распределением концентрации дисперсной ($k = 2$) фазы скорость распространения ударной волны ниже, чем в однородном газе, но выше, чем в газозвеси с равномерным распределением концентрации частиц. Давление газа на переднем крае ударной волны в газозвеси с периодическим распределением концентрации частиц имеет большее значение, чем в однородном газе, и меньшее значение, чем в газозвеси с равномерным распределением концентрации частиц.

По мере движения ударной волны по газозвеси с периодическим распределением концентрации частиц наблюдается повышение (понижение) давления газа на участках с увеличением (уменьшением) концентрации частиц (рис. 4).

На участках канала с наибольшей средней плотностью твердых частиц отмечаются увеличение давления газа и уменьшение скорости движения несущей среды, в то время как на участках с локальными минимумами концентрации дисперсной фазы скорость движения газа возрастает, а давление несущей среды несколько снижается. Данное явление связано с тем, что при прохождении спутным потоком газа локальных максимумов плотности происходит переход кинетической энергии газа в потенциальную (тепловую) энергию, за счет чего повышается давление газа (рис. 5).

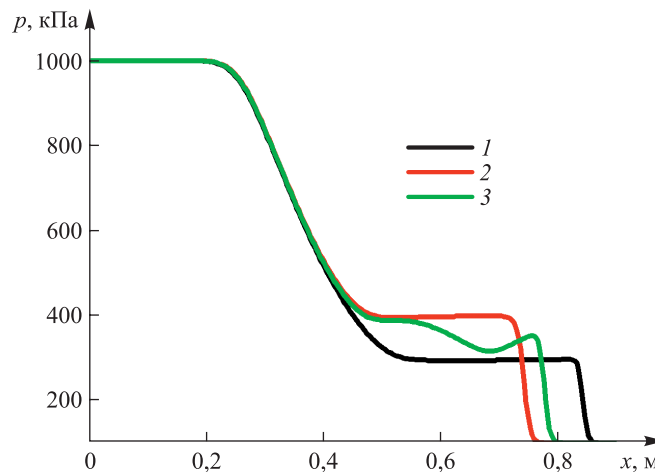


Рис. 3. Пространственное распределение давления газа при распространении ударной волны в однородном газе (1), газозвеси с равномерным распределением концентрации дисперсной фазы (2) и газозвеси с периодическим распределением концентрации дисперсной фазы (3) в момент времени $t = 0,7$ мс

Fig. 3. Spatial distribution of gas pressure during the propagation of a shock wave in a homogeneous gas (1), a gas suspension with a uniform distribution of the dispersed phase concentration (2) and a gas suspension with a periodic distribution of the dispersed phase concentration (3) at time $t = 0.7$ ms

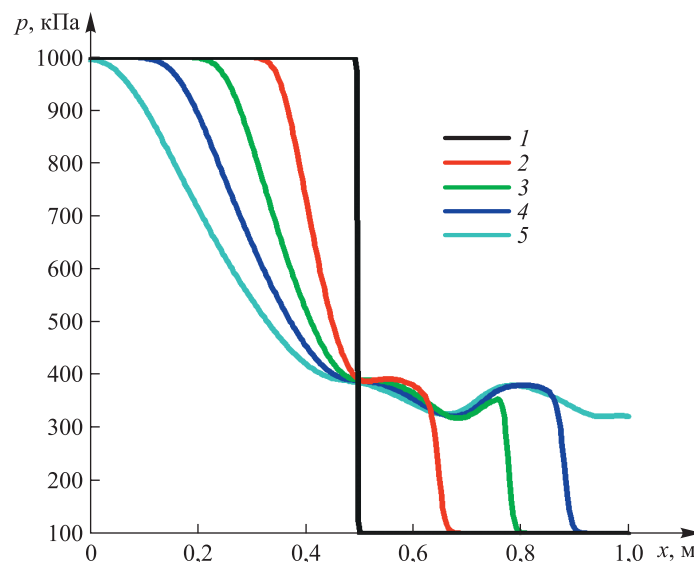


Рис. 4. Пространственное распределение давления газа в газозвеси с периодическим распределением концентрации дисперсной фазы в момент времени $t = 0$ мс (1), $t = 0,1$ мс (2), $t = 0,7$ мс (3), $t = 1,0$ мс (4), $t = 1,3$ мс (5)

Fig. 4. Spatial distribution of gas pressure in a gas suspension with a periodic distribution of the dispersed phase concentration at time $t = 0$ ms (1), $t = 0.1$ ms (2), $t = 0.7$ ms (3), $t = 1.0$ ms (4), $t = 1.3$ ms (5)

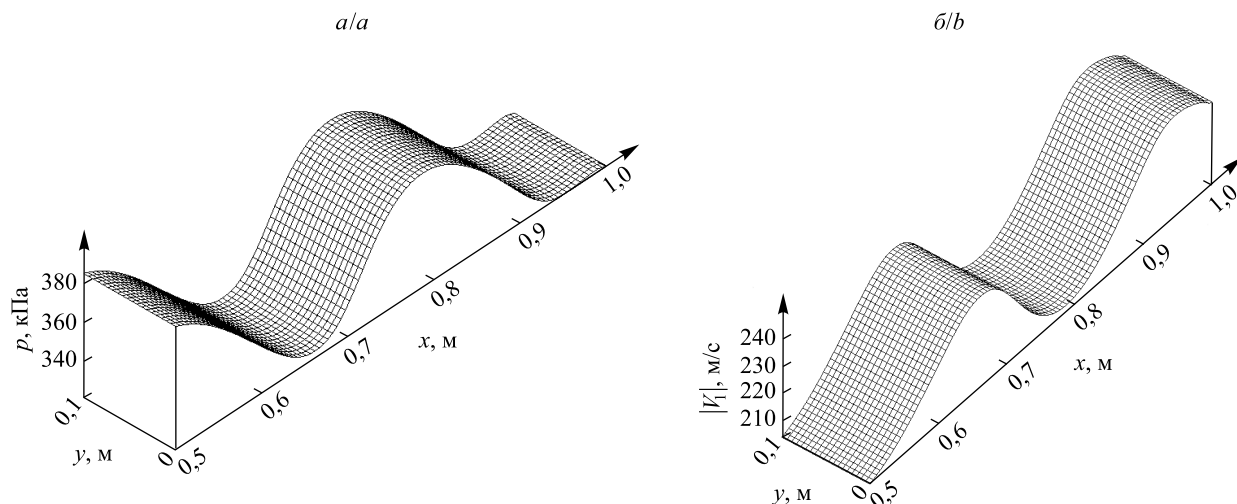


Рис. 5. Пространственное распределение давления (а) и модуля скорости движения газа (б) в момент времени $t = 1,3$ мс

Fig. 5. Spatial distribution of gas pressure (a) and gas velocity modulus (b) at time $t = 1.3$ ms

Значение волнового числа периодической концентрации частиц дисперсной фазы оказывает влияние на интенсивность изменения давления и скорости движения газа при прохождении ударной волны через участки с циклическим изменением концентрации частиц. Увеличение частоты колебаний концентрации частиц приводит к уменьшению значений перепада давления и скорости движения газа при прохождении через периодически распределенную дисперсную фазу. Данную закономерность можно объяснить тем, что при уменьшении периода изменения концентрации частиц скорость движения газа не успевает существенно измениться при прохождении через участки изменения концентрации (рис. 6).

Рассмотрим влияние интенсивности ударной волны на максимальное значение перепада давления газа при прохождении участков изменения концентрации дисперсных частиц. На рис. 7 представлены результаты численных расчетов давления и модуля скорости движения газа для ударных волн различной интенсивности.

Для интенсивных ударных волн ($p_2/p_1 = 2$) (см. рис. 7, а и б) и для ударных волн малой интенсивности ($p_2/p_1 = 1,1$) (см. рис. 7, в и г) наблюдается формирование периодической структуры давления несущей среды. Максимальное значение перепада давления газа в областях с повышенной и пониженной концентрацией дисперсных частиц составляет $p_a = 6989$ Па для интенсивной ударной волны ($p_2/p_1 = 2$) и $p_a = 465$ Па для ударной волны малой интенсивности ($p_2/p_1 = 1,1$) (табл. 2).

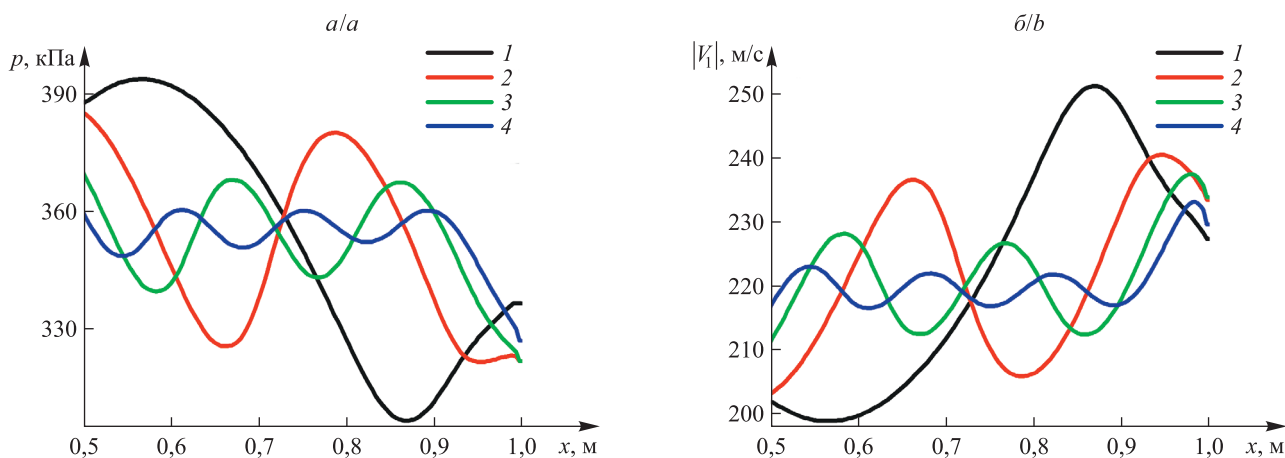


Рис. 6. Пространственное распределение давления (а) и модуля скорости движения газа (б) в момент времени $t = 1,3$ мс при значении волнового числа $k = 1$ (1), $k = 2$ (2), $k = 3$ (3), $k = 4$ (4)

Fig. 6. Spatial distribution of gas pressure (a) and gas velocity modulus (b) at time $t = 1.3$ ms for the wave number value $k = 1$ (1), $k = 2$ (2), $k = 3$ (3), $k = 4$ (4)

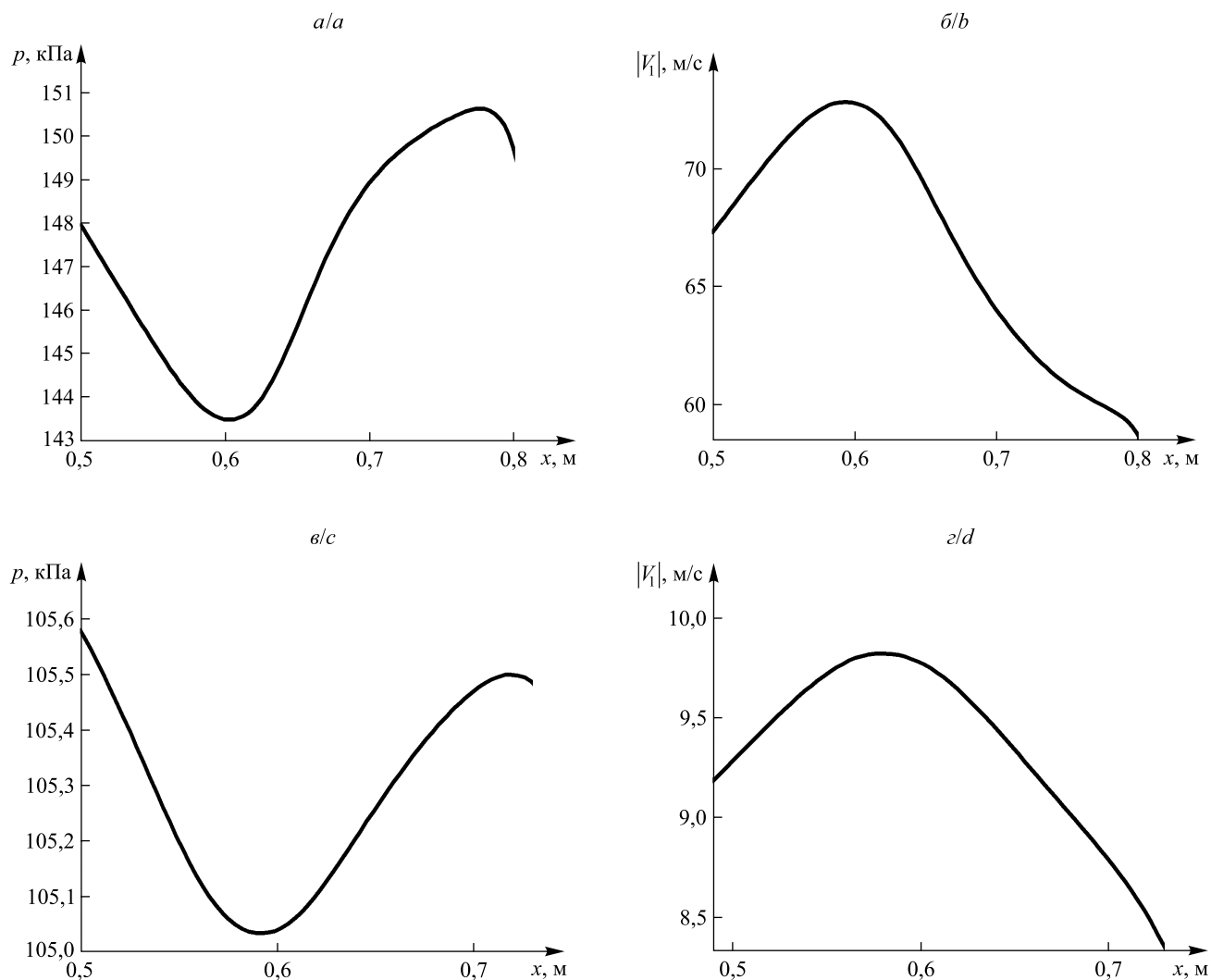


Рис. 7. Пространственное распределение давления (а, в) и модуля скорости движения газа (б, г) для интенсивности разрыва давлений $p_2/p_1 = 2$ (а, б) и $p_2/p_1 = 1,1$ (в, г) в момент времени $t = 1,3$ мс

Fig. 7. Spatial distribution of gas pressure (a, c) and gas velocity modulus (b, d) for the pressure burst intensity $p_2/p_1 = 2$ (a, b) and $p_2/p_1 = 1.1$ (c, d) at time $t = 1.3$ ms

Таблица 2

Максимальные значения перепада давления несущей среды при прохождении максимумов и минимумов концентрации дисперсной фазы для различных начальных интенсивностей ударной волны

Table 2

Maximum values of the pressure drop of the carrier medium during the passage of maxima and minima of the dispersed phase concentration for different initial intensities of the shock wave

Начальный перепад давления газа (p_2/p_1)	Максимальное значение перепада давления газа при прохождении областей с периодическим распределением концентрации частиц (p_a), Па
4	23 507
3	14 969
2	6989
1,1	465

Из табл. 2 следует, что с увеличением интенсивности ударной волны возрастает абсолютное значение перепада давления газа на участках с циклическим изменением концентрации частиц. Это можно объяснить повышением скорости движения спутного потока газа в ударных волнах при увеличении их интенсивности. Также для менее интенсивных ударных волн большее влияние оказывает диссипация, вызванная межфазным взаимодействием.

Заключение

В работе численно моделировалось движение ударной волны из однородного газа в газовзвесь с большой массовой долей дисперсной фазы и периодическим распределением концентрации дисперсных включений. Примененная математическая модель реализует континуальную методику описания динамики многофазных сред, учитывающую взаимодействие между несущей средой и дисперсной фазой. Численные расчеты показывают, что при распространении ударной волны по газовзвеси с периодическим распределением концентрации дисперсной фазы в процессе движения несущей среды формируется периодическая структура волн давления и скорости движения газа. Выявлено, что увеличение частоты изменения концентрации частиц приводит к уменьшению значений перепада давления и скорости движения газа. Также определено, что при увеличении интенсивности ударной волны возрастает максимальное значение перепада давления газа на циклической структуре распределения концентрации частиц. Выявленные закономерности можно использовать как при моделировании течений газодисперсных сред с большим объемным содержанием дисперсной фазы, так и при расчетах аппаратов и технологических процессов, связанных с динамикой газовзвесей.

Библиографические ссылки

1. Лойцянский ЛГ. *Механика жидкости и газа*. 7-е издание. Москва: Дрофа; 2003. 840 с. (Классики отечественной науки).
2. Нигматулин РИ. *Основы механики гетерогенных сред*. Москва: Наука; 1978. 336 с.
3. Дейч МЕ, Филиппов ГА. *Газодинамика двухфазных сред*. 2-е издание. Москва: Энергоиздат; 1981. 472 с.
4. Киселев СП, Руев ГА, Трунев АП, Фомин ВМ, Шавалиев МШ. *Ударно-волновые процессы в двухкомпонентных и двухфазных средах*. Шокин ЮИ, редактор. Новосибирск: Наука; 1992. 261 с.
5. Кутушев АГ. *Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах*. Санкт-Петербург: Недра; 2003. 284 с.
6. Федоров АВ, Фомин ВМ, Хмель ТА. *Волновые процессы в газовзвесах частиц металлов*. Новосибирск: Параллель; 2015. 301 с.
7. Deledicque V, Papalexandris MV. An exact Riemann solver for compressible two-phase flow models containing non-conservative products. *Journal of Computational Physics*. 2007;222(1):217–245. DOI: 10.1016/j.jcp.2006.07.025.
8. Осипцов АН, Рыбдылова ОД. Эффект фокусировки аэрозольных частиц за ударной волной, движущейся в микроканале. *Доклады Академии наук*. 2010;433(3):346–349. EDN: MTJMKH.
9. Фомин ПА, Чен Дж-Р. Влияние химически инертных частиц на параметры и подавление детонации в газах. *Физика горения и взрыва*. 2009;45(3):77–88. EDN: KPGYOP.
10. Тропин ДА, Лаврук СА. Физико-математическое моделирование ослабления гомогенных и гетерогенных детонационных волн облаками капель воды. *Физика горения и взрыва*. 2022;58(3):80–90. DOI: 10.15372/FGV20220308.
11. Назаров УА. Прерывание распространения детонационных волн в газовзвесах унитарного топлива слоем неоднородных инертных частиц. *Физика горения и взрыва*. 2021;57(6):65–76. DOI: 10.15372/FGV20210608.
12. Жилин АА, Федоров АВ. Применение схемы TVD для расчета двухфазных течений с различными скоростями и давлениями компонентов. *Математическое моделирование*. 2008;20(1):29–47.
13. Волков КН, Емельянов ВН, Карпенко АГ, Тетерина ИВ. Моделирование нестационарного течения газовзвеси, возникающего при взаимодействии ударной волны со слоем частиц. *Вычислительные методы и программирование*. 2020;21(1):96–114. DOI: 10.26089/NumMet.v21r109.
14. Садин ДВ. Приложение гибридного метода крупных частиц к расчету взаимодействия ударной волны со слоем газовзвеси. *Компьютерные исследования и моделирование*. 2020;12(6):1323–1338. DOI: 10.20537/2076-7633-2020-12-6-1323-1338.
15. Мазепа ЕЕ, Кусаинов ПИ, Лукашов ОЮ, Крайнов АЮ. О численном решении задачи распространения воздушных ударных волн в горных выработках шахты. *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2020;64:108–120. DOI: 10.17223/19988621/64/8.
16. Уткин ПС. Математическое моделирование взаимодействия ударной волны с плотной засыпкой частиц в рамках двухжидкостного подхода. *Химическая физика*. 2017;36(11):61–71. DOI: 10.7868/S0207401X17090151.
17. Порошина ЯЭ, Лопато АИ, Уткин ПС. Характеристический анализ динамики распространения ударной волны в среде с неравномерным распределением плотности. *Химическая физика*. 2022;41(8):48–58. EDN: LTTGKD.
18. Khmel T, Lavruk S. Detonation flows in aluminium particle gas suspensions, inhomogeneous in concentrations. *Journal of Loss Prevention in the Process Industries*. 2021;72:104522. DOI: 10.1016/j.jlp.2021.104522.
19. Huang Z, Zhang H. On the interactions between a propagating shock wave and evaporating water droplets. *Physics of Fluids*. 2020;32(12):123315. DOI: 10.1063/5.0035968.
20. Тукмаков АЛ. Численное моделирование колебаний монодисперсной газовзвеси в нелинейном волновом поле. *Прикладная механика и техническая физика*. 2011;52(2):36–43. EDN: NRCZJD.
21. Губайдуллин ДА, Тукмаков ДА. Численное изучение динамики ударных волн в газовзвесах. *Известия высших учебных заведений. Авиационная техника*. 2013;2:38–42. EDN: STGIHV.

22. Губайдуллин ДА, Тукмаков ДА. Влияние свойств дисперсной фазы на характеристики ударной волны при прохождении прямого скачка уплотнения из чистого газа в газовзвесь. *Известия высших учебных заведений. Авиационная техника*. 2017; 3:128–132. EDN: ZNEAZH.
23. Губайдуллин ДА, Тукмаков ДА. Численное исследование эволюции ударной волны в газовзвеси с учетом неравномерного распределения частиц. *Математическое моделирование*. 2014;26(10):109–119.
24. Нигматулин РИ, Губайдуллин ДА, Тукмаков ДА. Ударно-волновой разлет газовзвесей. *Доклады Академии наук*. 2016; 466(4):418–421. DOI: 10.7868/S0869565216040101.
25. Tukmakov DA. Comparison of the physical experiment of the gas oscillations in the acoustic resonator with numerical calculations. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019;1328:012087. DOI: 10.1088/1742-6596/1328/1/012087.
26. Флетчер К. *Вычислительные методы в динамике жидкостей. Том 2, Методы расчета различных течений*. Каменецкий ВФ, переводчик; Турчак ЛИ, редактор. Москва: Мир; 1991. 552 с.
27. Ковеня ВМ, Тарнавский ГА, Черный СГ. *Применение метода расщепления в задачах аэродинамики*. Шокин ЮИ, редактор. Новосибирск: Наука; 1990. 246 с.
28. Музафаров ИФ, Утюжников СВ. Применение компактных разностных схем к исследованию нестационарных течений сжимаемого газа. *Математическое моделирование*. 1993;5(3):74–83.

References

1. Loitsyanskii LG. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Mechanics of liquid and gas]. 7th edition. Moscow: Drofa; 2003. 840 p. (Klassiki otechestvennoi nauki). Russian.
2. Nigmatulin RI. *Osnovy mekhaniki geterogennykh sred* [Fundamentals of mechanics of heterogeneous media]. Moscow: Nauka; 1978. 336 p. Russian.
3. Deich ME, Filippov GA. *Gazodinamika dvukhfaznykh sred* [Gas dynamics of two-phase media]. 2nd edition. Moscow: Energoizdat; 1981. 472 p. Russian.
4. Kiselev SP, Ruev GA, Trunev AP, Fomin VM, Shavaliyev MSh. *Udarno-volnovye protsessy v dvukhkompnentnykh i dvukhfaznykh sredakh* [Shock-wave processes in two-component and two-phase media]. Shokin YuI, editor. Novosibirsk: Nauka; 1992. 261 p. Russian.
5. Kutushev AG. *Matematicheskoe modelirovanie volnovykh protsessov v aerodispersnykh i poroshkoobraznykh sredakh* [Mathematical modeling of wave processes in aerodispersed and powdery media]. Saint Petersburg: Nedra; 2003. 284 p. Russian.
6. Fedorov AV, Fomin VM, Khmel' TA. *Volnovye protsessy v gazovzvesyakh chastits metallov* [Wave processes in gas suspensions of metal particles]. Novosibirsk: Parallel'; 2015. 301 p. Russian.
7. Deledicque V, Papalexandris MV. An exact Riemann solver for compressible two-phase flow models containing non-conservative products. *Journal of Computational Physics*. 2007;222(1):217–245. DOI: 10.1016/j.jcp.2006.07.025.
8. Osipov AN, Rybdylova OD. [Focusing effect for aerosol particles behind a shock wave moving in a microchannel]. *Doklady Akademii nauk*. 2010;433(3):346–349. Russian. EDN: MTJKMH.
9. Fomin PA, Chen J-R. [Effect of chemically inert particles on parameters and suppression of detonation in gases]. *Fizika gorenii i vzryva*. 2009;45(3):77–88. Russian. EDN: KPGYOP.
10. Tropin DA, Lavruk SA. [Physicomathematical modeling of attenuation of homogeneous and heterogeneous detonation waves by clouds of water droplets]. *Fizika gorenii i vzryva*. 2022;58(3):80–90. Russian. DOI: 10.15372/FGV20220308.
11. Nazarov UA. [Interruption of detonation wave propagation in monofuel – air mixtures by a layer of inhomogeneous inert particles]. *Fizika gorenii i vzryva*. 2021;57(6):65–76. Russian. DOI: 10.15372/FGV20210608.
12. Zhilin AA, Fedorov AV. Application of the TVD scheme for the two-phase flow calculations at different component velocities and pressures. *Matematicheskoe modelirovanie*. 2008;20(1):29–47. Russian.
13. Volkov KN, Emelyanov VN, Karpenko AG, Teterina IV. Simulation of unsteady gas – particle flow induced by the shock-wave interaction with a particle layer. *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye*. 2020;21(1):96–114. Russian. DOI: 10.26089/NumMet.v21r109.
14. Sadin DV. Application of a hybrid large-particle method to the computation of the interaction of a shock wave with a gas suspension layer. *Computer Research and Modeling*. 2020;12(6):1323–1338. Russian. DOI: 10.20537/2076-7633-2020-12-6-1323-1338.
15. Mazepa EE, Kusainov PI, Lukashov OYu, Kraynov AYU. On the numerical solution to the problem of air shock wave propagation in mine workings. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*. 2020;64:108–120. Russian. DOI: 10.17223/19988621/64/8.
16. Utkin PS. [Mathematical modeling of the interaction of a shock wave with a dense backfill of particles within the framework of a two-fluid approach]. *Khimicheskaya fizika*. 2017;36(11):61–71. Russian. DOI: 10.7868/S0207401X17090151.
17. Poroshina YaE, Lopato AI, Utkin PS. [Characteristic analysis of the dynamics of shock wave propagation in a medium with an uneven density distribution]. *Khimicheskaya fizika*. 2022;41(8):48–58. Russian. EDN: LTTGKD.
18. Khmel' T, Lavruk S. Detonation flows in aluminium particle gas suspensions, inhomogeneous in concentrations. *Journal of Loss Prevention in the Process Industries*. 2021;72:104522. DOI: 10.1016/j.jlp.2021.104522.
19. Huang Z, Zhang H. On the interactions between a propagating shock wave and evaporating water droplets. *Physics of Fluids*. 2020;32(12):123315. DOI: 10.1063/5.0035968.
20. Tukmakov AL. [Numerical simulation of oscillations of a monodisperse gas – particle mixture in a nonlinear wave field]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*. 2011;52(2):36–43. Russian. EDN: NRCZJD.
21. Gubaidullin DA, Tukmakov DA. Numerical study of shock-wave dynamics in a gas suspension. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Aviatcionnaya tekhnika*. 2013;2:38–42. Russian. EDN: STGIHV.
22. Gubaidullin DA, Tukmakov DA. Influence of the disperse phase properties on characteristics of the shock wave passing the direct shock from pure gas in the gas mixture. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Aviatcionnaya tekhnika*. 2017;3:128–132. Russian. EDN: ZNEAZH.
23. Gubaidullin DA, Tukmakov DA. Numerical research of evolution of the shock wave in gas – particles suspension with account uneven distribution of particles. *Matematicheskoe modelirovanie*. 2014;26(10):109–119. Russian.

24. Nigmatulin RI, Gubaidullin DA, Tukmakov DA. Shock wave dispersion of gas – particle mixtures. *Doklady Akademii nauk*. 2016;466(4):418–421. Russian. DOI: 10.7868/S0869565216040101.
25. Tukmakov DA. Comparison of the physical experiment of the gas oscillations in the acoustic resonator with numerical calculations. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019;1328:012087. DOI: 10.1088/1742-6596/1328/1/012087.
26. Fletcher CAJ. *Computational techniques for fluid dynamics. Volume 2, Specific techniques for different flow categories*. Berlin: Springer-Verlag; 1988. XI, 484 p. (Armand J-L, Holt M, Hut P, Keller HB, Killeen J, Orszag SA, et al., editors. Springer series in computational physics).
Russian edition: Fletcher C. *Vychislitel'nye metody v dinamike zhidkosti. Tom 2, Metody rascheta razlichnykh techenii*. Kamenetskii VF, translator; Turchak LI, editor. Moscow: Mir; 1991. 552 p.
27. Kovenya VM, Tarnavskii GA, Chernyi SG. *Primenenie metoda rasshchepleniya v zadachakh aerodinamiki* [Application of the splitting method in aerodynamics problems]. Shokin YuI, editor. Novosibirsk: Nauka; 1990. 246 p. Russian.
28. Muzafarov IF, Utyuzhnikov SV. Application of compact difference schemes to investigation of unstationary gas flows. *Matematicheskoe modelirovanie*. 1993;5(3):74–83. Russian.

Получена 27.10.2023 / исправлена 14.02.2024 / принята 14.02.2024.
Received 27.10.2023 / revised 14.02.2024 / accepted 14.02.2024.

УДК 519.64

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ТИПА ГАУССА С ДИАГОНАЛЬНОЙ ВЕСОВОЙ МАТРИЦЕЙ ДЛЯ МАТРИЧНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

М. В. ИГНАТЕНКО¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Аннотация. Рассматривается проблема приближенного вычисления интегралов от функциональных матриц, в частности вопросы построения и исследования квадратурных формул наивысшей алгебраической степени точности для матричнозначных функций, которые являлись бы обобщениями соответствующих квадратурных правил (типа Гаусса) в случае скалярных функций. Получены квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности в различной форме для приближенного интегрирования матричнозначных функций второго порядка и, как обобщение, произвольного фиксированного порядка. Проанализированы частные случаи квадратурных правил, когда в качестве веса выступает скалярная функция либо диагональная функциональная матрица. Исследована сходимость предложенного квадратурного процесса к точному значению матричного интеграла. Представленные результаты основаны на применении отдельных известных фактов теории интерполирования и приближенного интегрирования скалярных функций. Изложение материала проиллюстрировано примерами.

Ключевые слова: интерполяционная квадратурная формула; алгебраическая степень точности; квадратуры типа Гаусса; матричнозначная функция; матричный алгебраический многочлен.

Благодарность. Работа выполнена в рамках государственной программы научных исследований «Конвергенция-2025» (подпрограмма «Математические модели и методы», задание 1.4.01.2).

Образец цитирования:

Игнатенко МВ. Квадратурные формулы типа Гаусса с диагональной весовой матрицей для матричнозначных функций. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2024;1:29–44. EDN: AEJHDH

For citation:

Ignatenko MV. Quadrature formulas of the Gaussian type with a diagonal weight matrix for matrix-valued functions. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2024;1:29–44. Russian. EDN: AEJHDH

Автор:

Марина Викторовна Игнатенко – кандидат физико-математических наук, доцент; заведующий кафедрой веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета.

Author:

Marina V. Ignatenko, PhD (physics and mathematics), docent; head of the department of web-technologies and computer simulation, faculty of mechanics and mathematics. ignatenkomv@bsu.by
<https://orcid.org/0000-0002-8029-1842>

QUADRATURE FORMULAS OF THE GAUSSIAN TYPE WITH A DIAGONAL WEIGHT MATRIX FOR MATRIX-VALUED FUNCTIONS

M. V. IGNATENKO^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Abstract. This paper in the field of matrix analysis is devoted to the problem of approximate calculation of functional matrix integrals. In particular, questions of constructing and studying quadrature formulas of the highest algebraic degree of accuracy for matrix-valued functions, which would be generalisations of the corresponding (Gaussian type) quadrature rules in the case of scalar functions, are considered. Quadrature formulas of the highest algebraic degree of accuracy of various form are constructed for the approximate integration of matrix-valued functions of the second order and, as a generalisation, of an arbitrary fixed order. Particular cases of quadrature rules are considered, when a scalar or diagonal functional matrix acts as a weight function. The convergence of the proposed quadrature process to the exact value of the matrix integral is investigated. The obtained results are based on the application of certain known facts of the theory of interpolation and approximate integration of scalar functions. The presentation of the material is illustrated by some examples.

Keywords: interpolation quadrature formula; algebraic degree of accuracy; quadratures of the Gaussian type; matrix-valued function; matrix algebraic polynomial.

Acknowledgements. This work was supported by the state programme of scientific research «Convergence-2025» (sub-programme «Mathematical models and methods», assignment 1.4.01.2).

Введение

Исследования в области матричного анализа вызывают интерес с точки зрения развития его теории и приложений. Квадратурные правила для вычисления интегралов от функций находят широкое применение при построении приближенных методов решения различных классов задач (например, решение интегральных уравнений).

Одним из обобщений задачи приближенного интегрирования функций является задача аппроксимации матричных интегралов. Основные вопросы, которые здесь возникают, – это разрешимость самой задачи, построение формул приближенного интегрирования матричнозначных функций, изучение их погрешностей, сходимости к точному значению матричного интеграла и др. Как и в скалярном случае, важным классом квадратурных формул для интегралов от функциональных матриц являются правила наивысшей алгебраической степени точности.

Цель работы состоит в построении квадратурных формул наивысшей алгебраической степени точности для приближенного вычисления матричных интегралов, которые являлись бы обобщением соответствующих квадратурных правил типа Гаусса, известных для скалярного случая.

В работе приведены необходимые сведения из теории полиномиальных матриц: их определение, представление в виде матричного многочлена, основные действия над матричными многочленами (сложение, вычитание, правое и левое умножение и деление) с учетом свойства некоммутативности умножения матриц. Определено понятие ортогональных матричных полиномов.

Построены квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности в различной форме для приближенного интегрирования матричнозначных функций второго порядка и, как обобщение, произвольного фиксированного порядка. Рассмотрены частные случаи квадратурных правил, когда в качестве веса выступает скалярная функция либо диагональная функциональная матрица. Исследована сходимость предложенного квадратурного процесса к точному значению матричного интеграла. Полученные результаты базируются на применении фактов теории приближенного интегрирования скалярных функций, понятия ортогональных матричных полиномов и обобщают класс квадратурных правил типа Гаусса, известных для скалярного случая.

Приведенные примеры направлены на реализацию алгоритмов для вычисления приближенных значений матричных интегралов частного вида и демонстрацию их эффективности.

Предварительные сведения из теории полиномиальных матриц

Пусть $A(x)$ – квадратная матрица порядка n , элементами которой являются алгебраические многочлены относительно скалярной переменной x с коэффициентами из некоторого заданного числового поля:

$$A(x) = [a_{ik}(x)]_{i,k=1}^n = \left[a_{ik}^{(0)}x^m + a_{ik}^{(1)}x^{m-1} + \dots + a_{ik}^{(m)} \right]_{i,k=1}^n. \quad (1)$$

Матрицу $A(x)$ вида (1) можно представить в форме матричного многочлена

$$A(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m \quad (2)$$

по степеням переменной x , где матричные коэффициенты $A_j = \left[a_{ik}^{(j)} \right]_{i,k=1}^n$ ($j = 0, 1, \dots, m$). Число m называется степенью многочлена (2), если $A_0 \neq 0$, а значение n – его порядком. Будем говорить [1], что многочлен (2) регулярный, если $\det A_0 \neq 0$.

Рассмотрим [1] основные действия над матричными многочленами. Пусть $A(x)$ и $B(x)$ – матричные многочлены одинакового порядка, а m – наибольшая из их степеней. Тогда эти многочлены можно записать в виде

$$A(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m, \quad B(x) = B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \dots + B_m.$$

Сумма (разность) данных матричных многочленов одного и того же порядка может быть представлена в форме многочлена, степень которого не превосходит большей из степеней этих многочленов:

$$A(x) \pm B(x) = (A_0 \pm B_0)x^m + (A_1 \pm B_1)x^{m-1} + \dots + (A_m \pm B_m).$$

Пусть заданы матричные многочлены $A(x)$ и $B(x)$ степеней m и p соответственно одинакового порядка n :

$$A(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m \quad (A_0 \neq 0), \quad B(x) = B_0 x^p + B_1 x^{p-1} + \dots + B_p \quad (B_0 \neq 0).$$

Тогда их произведение

$$A(x)B(x) = A_0 B_0 x^{m+p} + (A_0 B_1 + A_1 B_0)x^{m+p-1} + \dots + A_m B_p. \quad (3)$$

Если же изменить порядок множителей, т. е. умножить $B(x)$ на $A(x)$, то в общем случае получим другой многочлен.

Заметим, что в отличие от произведения скалярных многочленов произведение матричных многочленов (3) может иметь степень, которая меньше суммы степеней множителей. Если хотя бы один из двух множителей является регулярным многочленом, то в этом случае степень произведения равна сумме степеней множителей.

Пусть, как и ранее, $A(x)$ и $B(x)$ – два матричных многочлена степеней m и p соответственно одинакового порядка n , причем $B(x)$ – регулярный многочлен:

$$A(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m \quad (A_0 \neq 0), \quad B(x) = B_0 x^p + B_1 x^{p-1} + \dots + B_p \quad (|B_0| \neq 0).$$

Будем говорить, что матричные многочлены $Q(x)$ и $R(x)$ являются соответственно правым частным и правым остатком при делении $A(x)$ на $B(x)$, если

$$A(x) = Q(x)B(x) + R(x) \quad (4)$$

и степень остатка $R(x)$ меньше степени делителя $B(x)$. Аналогично будем называть многочлены $\hat{Q}(x)$ и $\hat{R}(x)$ соответственно левым частным и левым остатком при делении $A(x)$ на $B(x)$, если

$$A(x) = B(x)\hat{Q}(x) + \hat{R}(x) \quad (5)$$

и степень остатка $\hat{R}(x)$ меньше степени делителя $B(x)$. В общем случае многочлены $Q(x)$ и $R(x)$ не совпадают с многочленами $\hat{Q}(x)$ и $\hat{R}(x)$.

Известно [1], что как правое, так и левое деление матричных многочленов одинакового порядка всегда выполнимо и однозначно, если делитель является регулярным многочленом.

Формулы (4) и (5) будут использоваться далее при построении квадратурных формул наивысшей алгебраической степени точности для интегралов от матричнозначных функций.

О квадратурных формулах наивысшей алгебраической степени точности

Пусть $F(x)$ – функциональная матрица с элементами $f_{ij}(x)$. Рассмотрим матричнозначный интеграл со скалярным весом $p(x)$ вида

$$\int_a^b p(x)F(x)dx = \int_a^b p(x) \begin{bmatrix} f_{1j}(x) \\ \vdots \\ f_{nj}(x) \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} \int_a^b p(x)f_{1j}(x)dx \\ \vdots \\ \int_a^b p(x)f_{nj}(x)dx \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Для приближенного вычисления интеграла (6) обратимся к формуле

$$\int_a^b p(x)F(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_k F(x_k), \quad (7)$$

где квадратурная сумма

$$\sum_{k=1}^n A_k F(x_k) = \sum_{k=1}^n A_k [f_{ij}(x_k)] = \left[\sum_{k=1}^n A_k f_{ij}(x_k) \right]$$

содержит в качестве параметров коэффициенты A_k , узлы x_k (чаще $x_k \in [a, b]$, что необязательно) ($k = 1, 2, \dots, n$) и целое неотрицательное число n . Выбор этих параметров не всегда произволен и обычно подчинен одной или нескольким целям: 1) минимизации погрешности квадратурной формулы; 2) упрощению вычислений (для этого можно выбрать узлы равноотстоящими или же потребовать равенства коэффициентов $A_k \equiv C$ и рассмотреть формулу $\int_a^b p(x)F(x)dx \approx \left[C \sum_{k=1}^n f_{ij}(x_k) \right]$, которая имеет $n + 2$ параметра: $C, n, x_1, x_2, \dots, x_n$); 3) увеличению степени точности для определенных (например, алгебраических) матричных многочленов до наивысшей возможной.

Так как число параметров A_k и x_k равно $2n$, то естественно ожидать, что квадратурная формула (7) при заданном числе n узлов будет иметь алгебраическую степень точности $2n - 1$. Можно предполагать, что такая степень точности является, как правило, наивысшей возможной.

Известно (см., например, [2]), что в случае скалярных функций $f_{ij}(x)$ при произвольном выборе парно различных точек $x_1, x_2, \dots, x_n$ квадратурная формула $\int_a^b p(x)f_{ij}(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f_{ij}(x_k)$ с весом $p(x)$ ($p(x) \geq 0, x \in [a, b], \int_a^b p(x)dx > 0$) и коэффициентами

$$A_k = \int_a^b p(x) \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k)\omega'_n(x_k)} dx \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (8)$$

где $\omega_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$, является точной (инвариантной) для алгебраических многочленов степени не выше $n - 1$. Иными словами, если $f_{ij}(x)$ – алгебраические многочлены степени, меньшей или равной $n - 1$, то $\int_a^b p(x)f_{ij}(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k f_{ij}(x_k)$, что влечет $\int_a^b p(x)F(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k F(x_k)$.

Если же в дополнение к указанному правилу (8) для коэффициентов A_k в качестве квадратурных узлов x_k ($k = 1, 2, \dots, n$) выбрать корни многочлена $\omega_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$, ортогонального относительно веса $p(x)$ на отрезке $[a, b]$ к любому алгебраическому многочлену степени не выше $n - 1$, то алгебраическая степень точности квадратурной формулы (7) увеличится и станет максимально возможной, равной $2n - 1$.

Вышеприведенная схема выбора узлов и коэффициентов квадратурного правила $\int_a^b p(x)f_{ij}(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f_{ij}(x_k)$ с весом $p(x)$ ($p(x) \geq 0, x \in [a, b], \int_a^b p(x)dx > 0$) обеспечивает (см., например, [2]) его существование и единственность для любого натурального значения n , что влечет существование и единственность соответствующей квадратурной формулы вида (7).

Квадратуры наивысшей алгебраической степени точности, рассматриваемые далее для матричнозначных функций, как и в случае скалярных функций, будем называть квадратурными формулами типа Гаусса.

Квадратурные формулы типа Гаусса для матричнозначных функций в случае скалярной весовой функции

Рассмотрим аналогичные результаты, полученные при решении проблемы построения квадратурных формул наивысшей алгебраической степени точности для матричнозначных функций $F(x) = [f_{ij}(x)]$ в случае скалярного веса. Пусть, как и ранее, весовая функция $p(x)$ удовлетворяет условиям $p(x) \geq 0, x \in [a, b], \int_a^b p(x)dx > 0$.

Теорема 1. Если узлы x_k ($k = 1, 2, \dots, n$) являются корнями многочлена $\omega_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$, ортогонального относительно веса $p(x)$ на отрезке $[a, b]$ к любому алгебраическому многочлену степени, меньшей или равной $n - 1$, то квадратурная формула (7) с коэффициентами A_k ($k = 1, 2, \dots, n$) вида (8) точна для любых матричных алгебраических многочленов степени не выше $2n - 1$.

Доказательство. Пусть $f_{ij}(x)$ – алгебраические многочлены степени, меньшей или равной $2n - 1$. Через $\omega_n(x)$ обозначим алгебраический многочлен степени n , ортогональный относительно веса $p(x)$ на отрезке $[a, b]$ к алгебраическим многочленам низшей степени: $\int_a^b p(x) \omega_n(x) x^v dx = 0$ ($v = 0, 1, \dots, n - 1$).

Выполним деление $f_{ij}(x)$ на $\omega_n(x)$. Имеем

$$f_{ij}(x) = \omega_n(x) q_{ij}(x) + r_{ij}(x), \quad (9)$$

где $q_{ij}(x)$ и $r_{ij}(x)$ – частное и остаток, являющиеся алгебраическими многочленами степени не выше $n - 1$. Умножим обе части равенства (9) на $p(x)$, проинтегрируем их от a до b и получим

$$\int_a^b p(x) f_{ij}(x) dx = \int_a^b p(x) \omega_n(x) q_{ij}(x) dx + \int_a^b p(x) r_{ij}(x) dx = \int_a^b p(x) r_{ij}(x) dx, \quad (10)$$

так как интеграл $\int_a^b p(x) \omega_n(x) q_{ij}(x) dx$ равен нулю в силу условия ортогональности $\omega_n(x)$ относительно веса $p(x)$ на отрезке $[a, b]$ к алгебраическим многочленам низшей степени.

Через $R(x)$ обозначим функциональную матрицу с элементами $r_{ij}(x)$. Из равенств (6) и (10) имеем

$$\int_a^b p(x) F(x) dx = \left[\int_a^b p(x) f_{ij}(x) dx \right] = \left[\int_a^b p(x) r_{ij}(x) dx \right] = \int_a^b p(x) R(x) dx.$$

В качестве квадратурных узлов x_k ($k = 1, 2, \dots, n$) выберем корни многочлена $\omega_n(x)$. Интеграл $\int_a^b p(x) r_{ij}(x) dx$ точно равен квадратурной сумме $\sum_{k=1}^n A_k r_{ij}(x_k)$, так как степень многочлена $r_{ij}(x)$ не выше $n - 1$, а квадратурные коэффициенты по условию определены правилом (8), т. е. квадратурная формула является интерполяционной и, следовательно, точной для всех алгебраических многочленов степени, меньшей или равной $n - 1$.

В силу представления (9) имеем $r_{ij}(x_k) = f_{ij}(x_k)$. С учетом равенства (10) получим $\int_a^b p(x) f_{ij}(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f_{ij}(x_k)$ и придем к точному равенству $\int_a^b p(x) F(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k F(x_k)$, если $F(x)$ – матричный алгебраический многочлен степени не выше $2n - 1$.

Покажем, что квадратурная формула (7), в которой выбор узлов и коэффициентов определен теоремой 1, не может быть точна для всех матричных алгебраических многочленов степени $2n$, т. е. число $2n - 1$ является наивысшей алгебраической степенью точности этой формулы, и, следовательно, приближенное равенство (7) – квадратура типа Гаусса.

Теорема 2. Ни при каких коэффициентах A_k и узлах x_k ($k = 1, 2, \dots, n$) приближенное равенство (7) не может быть точным для всех матричных алгебраических многочленов степени $2n$.

Доказательство. По квадратурным узлам x_k ($k = 1, 2, \dots, n$) образуем функцию $\omega_n(x) = (x - x_1) \times \dots \times (x - x_n)$ и рассмотрим случай функциональной матрицы $F(x)$ с одинаковыми элементами $f_{ij}(x) = \omega_n^2(x)$ – алгебраическими многочленами степени $2n$. Очевидно, что $f_{ij}(x_k) = \omega_n^2(x_k) = 0$ для $k = 1, 2, \dots, n$, т. е. квадратурная сумма $\sum_{k=1}^n A_k F(x_k) = \left[\sum_{k=1}^n A_k f_{ij}(x_k) \right]$ будет нулевой матрицей, в то время

как интеграл $\int_a^b p(x) F(x) dx = \left[\int_a^b p(x) \omega_n^2(x) dx \right] \neq [0]$. Таким образом, существует матричный алгебраический многочлен степени $2n$, для которого равенство (7) не является точным.

Квадратурные формулы типа Гаусса для матричнозначных функций в случае диагональной весовой матрицы

Рассмотрим построение квадратурных формул вида

$$\int_a^b p(x)F(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_k F(x_k), \quad (11)$$

$$\int_a^b F(x)p(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_k F(x_k), \quad (12)$$

где весовая функция $p(x) = \text{diag}[p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)]$ и ее элементы $p_i(x)$ удовлетворяют условиям $p_i(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$, $\int_a^b p_i(x)dx > 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$).

Заметим, что в левой части правила (11) произведение $p(x)F(x)$ – матрица с элементами $p_i(x)f_{ij}(x)$, а в левой части равенства (12) произведение $F(x)p(x)$ – матрица с элементами $p_j(x)f_{ij}(x)$, поэтому

$$\int_a^b p(x)F(x)dx = \left[\int_a^b p_i(x)f_{ij}(x)dx \right], \quad \int_a^b F(x)p(x)dx = \left[\int_a^b p_j(x)f_{ij}(x)dx \right].$$

Через $P_{nv}(x)$ обозначим алгебраический многочлен степени n , ортогональный относительно веса $p_v(x)$ на отрезке $[a, b]$ ко всем алгебраическим многочленам низшей степени, т. е.

$$\int_a^b p_v(x)P_{nv}(x)x^i dx = 0$$

для значений $i = 0, 1, \dots, n-1$ и $v = 1, 2, \dots, m$.

Корни многочлена $P_{nv}(x)$ различны, будем обозначать их через $x_k^{(v)}$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Для скалярных функций $f(x)$ квадратурная формула вида

$$\int_a^b p_v(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_k^{(v)} f(x_k^{(v)}), \quad (13)$$

где квадратурные коэффициенты

$$A_k^{(v)} = \int_a^b p_v(x) \frac{\omega_{nv}(x)}{(x - x_k^{(v)})\omega'_{nv}(x_k^{(v)})} dx, \quad \omega_{nv}(x) = (x - x_1^{(v)})(x - x_2^{(v)}) \dots (x - x_n^{(v)}),$$

будет точна, если $f(x)$ – алгебраический многочлен степени не выше $2n-1$. Следовательно,

$$\int_a^b p(x)F(x)dx = \left[\int_a^b p_i(x)f_{ij}(x)dx \right] \approx \left[\sum_{k=1}^n A_k^{(i)} f_{ij}(x_k^{(i)}) \right], \quad (14)$$

$$\int_a^b F(x)p(x)dx = \left[\int_a^b p_j(x)f_{ij}(x)dx \right] \approx \left[\sum_{k=1}^n A_k^{(j)} f_{ij}(x_k^{(j)}) \right]. \quad (15)$$

Заметим, что в развернутом виде матрица $\left[\sum_{k=1}^n A_k^{(i)} f_{ij}(x_k^{(i)}) \right]$ в правой части приближенного равенства (14) имеет вид

$$\sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} A_k^{(1)} f_{11}(x_k^{(1)}) & A_k^{(1)} f_{12}(x_k^{(1)}) & \dots & A_k^{(1)} f_{1m}(x_k^{(1)}) \\ A_k^{(2)} f_{21}(x_k^{(2)}) & A_k^{(2)} f_{22}(x_k^{(2)}) & \dots & A_k^{(2)} f_{2m}(x_k^{(2)}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_k^{(m)} f_{m1}(x_k^{(m)}) & A_k^{(m)} f_{m2}(x_k^{(m)}) & \dots & A_k^{(m)} f_{mm}(x_k^{(m)}) \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Через A_k обозначим диагональную матрицу с элементами $A_k^{(1)}, A_k^{(2)}, \dots, A_k^{(m)}$, а через $\tilde{F}(x_k)$ – матрицу, полученную подстановкой корня $x_k^{(i)}$ в i -ю строку матрицы $F(x)$ вместо аргумента x . Тогда запишем матрицу (16) в виде $\sum_{k=1}^n A_k \tilde{F}(x_k)$ и получим квадратурную формулу

$$\int_a^b p(x) F(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k \tilde{F}(x_k), \quad (17)$$

которая точна для полиномиальных матриц $F(x)$ степени не выше $2n - 1$. Этим же свойством обладает квадратурная формула $\int_a^b F(x) p(x) dx \approx \sum_{k=1}^n \tilde{F}(x_k) A_k$ для вычисления интеграла в левой части приближенного равенства (15).

Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности другой формы в случае диагональной весовой матрицы

Сначала рассмотрим случай функциональных матриц второго порядка

$$F(x) = \begin{bmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{bmatrix}, \quad p(x) = \begin{bmatrix} p_1(x) & 0 \\ 0 & p_2(x) \end{bmatrix}.$$

Для алгебраических многочленов $P_{n1}(x)$ и $P_{n2}(x)$ степени n , ортогональных относительно весов $p_1(x)$ и $p_2(x)$ на отрезке $[a, b]$ к алгебраическим многочленам низшей степени соответственно, выполняются равенства

$$\int_a^b p_1(x) P_{n1}(x) x^i dx = \int_a^b p_2(x) P_{n2}(x) x^i dx = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

Будем считать, что они ортонормированные, т. е. $\int_a^b p_1(x) P_{n1}^2(x) x^i dx = \int_a^b p_2(x) P_{n2}^2(x) x^i dx = 1$.

Положим, что $P_n(x) = \begin{bmatrix} P_{n1}(x) & 0 \\ 0 & P_{n2}(x) \end{bmatrix}$. Тогда $\int_a^b p(x) P_n(x) Q_{n-1}(x) dx = 0$, где $Q_{n-1}(x)$ – произвольная матрица вида $Q_{n-1}(x) = \begin{bmatrix} q_{11}(x) & q_{12}(x) \\ q_{21}(x) & q_{22}(x) \end{bmatrix}$ с элементами $q_{ij}(x)$ ($i, j = 1, 2$) – алгебраическими многочленами степени не выше $n - 1$. В этом случае формула (17) в поэлементной записи имеет вид

$$\begin{aligned} \int_a^b p(x) F(x) dx &= \int_a^b \begin{bmatrix} p_1(x) f_{11}(x) & p_1(x) f_{12}(x) \\ p_2(x) f_{21}(x) & p_2(x) f_{22}(x) \end{bmatrix} dx \approx \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} A_k^{(1)} f_{11}(x_k^{(1)}) & A_k^{(1)} f_{12}(x_k^{(1)}) \\ A_k^{(2)} f_{21}(x_k^{(2)}) & A_k^{(2)} f_{22}(x_k^{(2)}) \end{bmatrix} = \\ &= \sum_{k=1}^n A_k^{(1)} \begin{bmatrix} f_{11}(x_k^{(1)}) & f_{12}(x_k^{(1)}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^n A_k^{(2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f_{21}(x_k^{(2)}) & f_{22}(x_k^{(2)}) \end{bmatrix} = \\ &= \sum_{k=1}^n A_k^{(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11}(x_k^{(1)}) & f_{12}(x_k^{(1)}) \\ f_{21}(x_k^{(1)}) & f_{22}(x_k^{(1)}) \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^n A_k^{(2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11}(x_k^{(2)}) & f_{12}(x_k^{(2)}) \\ f_{21}(x_k^{(2)}) & f_{22}(x_k^{(2)}) \end{bmatrix} = \\ &= \sum_{k=1}^n A_k^{(1)} E_1 F(x_k^{(1)}) + \sum_{k=1}^n A_k^{(2)} E_2 F(x_k^{(2)}), \end{aligned}$$

где $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Введя обозначения $A_{k1} = A_k^{(1)} E_1$, $A_{k2} = A_k^{(2)} E_2$, $A_{k1} = \begin{bmatrix} A_k^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_{k2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_k^{(2)} \end{bmatrix}$, придем к формуле

$$\int_a^b p(x)F(x)dx \approx \sum_{k=1}^n \left[A_{k1}F\left(x_k^{(1)}\right) + A_{k2}F\left(x_k^{(2)}\right) \right]. \quad (18)$$

Аналогично формуле (18) для интеграла (12) имеем

$$\int_a^b F(x)p(x)dx \approx \sum_{k=1}^n \left[F\left(x_k^{(1)}\right)A_{k1} + F\left(x_k^{(2)}\right)A_{k2} \right].$$

Пример 1. Пусть заданы весовая матричная функция $p(x) = \begin{bmatrix} x^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & x^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$ и полиномиальная матрица

$$F(x) = \begin{bmatrix} x^7 + 2 & x^6 \\ x^5 + 4 & x^4 + 2x \end{bmatrix}.$$

По условию $p_1(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $p_2(x) = x^{-\frac{1}{2}}$. Найдем приближенное значение матричного интеграла

$\int_a^b p(x)F(x)dx$ по правилу (18), где $n = 8$. Для этого сначала составим и решим две системы линейных алгебраических уравнений $\int_a^b p_i(x) \left(x^n + \sum_{j=0}^{n-1} c_j^{(i)} x^j \right) x^k dx = 0$ ($i = 1, 2; k = 0, 1, \dots, n-1$) относительно не-

известных коэффициентов $c_j^{(i)}$ ($i = 1, 2; j = 0, 1, \dots, n-1$) двух приведенных алгебраических многочле-

нов $P_{ni}(x) = x^n + \sum_{j=0}^{n-1} c_j^{(i)} x^j$ ($i = 1, 2$) степени n , затем вычислим значения $x_k^{(1)}$ и $x_k^{(2)}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) как

корни многочленов $P_{n1}(x)$ и $P_{n2}(x)$ соответственно. Далее определим квадратурные коэффициенты

$A_k^{(i)} = \int_a^b p_i(x) \frac{P_{ni}(x)}{(x - x_k^{(i)})P'_{ni}(x_k^{(i)})} dx$, $P_{ni}(x) = (x - x_1^{(i)})(x - x_2^{(i)}) \dots (x - x_n^{(i)})$ ($i = 1, 2$) и соответствующие мат-

рицы $A_{k1} = \begin{bmatrix} A_k^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_{k2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_k^{(2)} \end{bmatrix}$ и воспользуемся формулой (18). В итоге получим, что

$$\sum_{k=1}^2 \left[F\left(x_k^{(1)}\right)A_{k1} + F\left(x_k^{(2)}\right)A_{k2} \right] = \begin{bmatrix} \frac{74}{51} & \frac{2}{15} \\ \frac{90}{11} & \frac{14}{9} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1,45098 & 0,13333 \\ 8,18182 & 1,55556 \end{bmatrix}$$

с округлением значений матричных элементов до пяти десятичных знаков.

Отметим, что результаты нахождения точного значения

$$\int_a^b p(x)F(x)dx = \begin{bmatrix} \frac{74}{51} & \frac{2}{15} \\ \frac{90}{11} & \frac{14}{9} \end{bmatrix}$$

и результаты приближенного вычисления данного интеграла совпадают. Это является следствием того, что формула (18) инвариантна для рассматриваемой полиномиальной матрицы $F(x)$, степень которой равна 7, т. е. меньше $2n - 1 = 15$.

Обобщим результаты, полученные при построении квадратурных формул с диагональными весовыми матрицами второго порядка в данном разделе, на случай более общего интеграла

$$\int_a^b F(x)p(x)G(x)dx,$$

где, как и ранее, $p(x)$ – диагональная матрица с элементами $p_1(x)$ и $p_2(x)$, ее элементы $p_i(x)$ удовлетворяют условиям $p_i(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$, $\int_a^b p_i(x) dx > 0$ ($i = 1, 2$), а $F(x)$ и $G(x)$ – произвольные полиномиальные матрицы второго порядка вида

$$F(x) = \begin{bmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{bmatrix}, \quad G(x) = \begin{bmatrix} g_{11}(x) & g_{12}(x) \\ g_{21}(x) & g_{22}(x) \end{bmatrix}.$$

В этом случае имеем

$$\int_a^b F(x) p(x) G(x) dx = \sum_{s=1}^2 \sum_{t=1}^2 \left[\int_a^b f_{is}(x) p_{st}(x) g_{tj}(x) dx \right],$$

причем элементы $p_{12}(x) = p_{21}(x) = 0$, а функции $p_{11}(x) = p_1(x)$, $p_{22}(x) = p_2(x)$, поэтому

$$\int_a^b F(x) p(x) G(x) dx = I_1 + I_2,$$

где интегралы I_1 и I_2 определены следующими правилами:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_a^b p_1(x) \begin{bmatrix} f_{11}(x) g_{11}(x) & f_{11}(x) g_{12}(x) \\ f_{21}(x) g_{11}(x) & f_{21}(x) g_{12}(x) \end{bmatrix} dx, \\ I_2 &= \int_a^b p_2(x) \begin{bmatrix} f_{12}(x) g_{21}(x) & f_{12}(x) g_{22}(x) \\ f_{22}(x) g_{21}(x) & f_{22}(x) g_{22}(x) \end{bmatrix} dx. \end{aligned} \quad (19)$$

Заметим, что в равенствах (19) подынтегральные множители $p_1(x)$ и $p_2(x)$ являются скалярными функциями, и, следовательно, для вычисления интегралов I_1 и I_2 можно воспользоваться квадратурными формулами наивысшей алгебраической степени точности, построенными выше.

Через $F_1(x)$ обозначим матрицу под знаком интеграла I_1 , а через $F_2(x)$ – матрицу под знаком интеграла I_2 в формулах (19). Если $x_k^{(1)}$ и $x_k^{(2)}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) – корни алгебраических многочленов $P_{n1}(x)$ и $P_{n2}(x)$ степени n , ортогональных относительно весов $p_1(x)$ и $p_2(x)$ на отрезке $[a, b]$ к алгебраическим многочленам низшей степени соответственно, то следующая квадратурная формула будет иметь наивысшую алгебраическую степень точности, равную $2n - 1$:

$$\int_a^b F(x) p(x) G(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k^{(1)} F_1(x_k^{(1)}) + \sum_{k=1}^n A_k^{(2)} F_2(x_k^{(2)}), \quad (20)$$

где коэффициенты $A_k^{(1)}$ и $A_k^{(2)}$ такие, как в формуле (13) при $v = 1$ и $v = 2$.

Пример 2. Пусть весовая функция $p(x)$, функциональная матрица $F(x)$ такие, как в примере 1, и задана полиномиальная матрица $G(x) = \begin{bmatrix} x^5 + 3x & x^2 + 1 \\ x^5 + x^2 & x^4 \end{bmatrix}$.

Найдем приближенное значение матричного интеграла $\int_a^b F(x) p(x) G(x) dx$ по правилу (20), где $n = 8$.

Вычислим значения квадратурных узлов $x_k^{(i)}$ и коэффициентов $A_k^{(i)}$ ($i = 1, 2$; $k = 1, 2, \dots, n$) по схеме, описанной в примере 1, и воспользуемся формулой (20). В итоге получим, что

$$\sum_{k=1}^2 A_k^{(1)} F_1(x_k^{(1)}) + \sum_{k=1}^2 A_k^{(2)} F_2(x_k^{(2)}) = \begin{bmatrix} \frac{43\,053\,208}{13\,037\,895} & \frac{790}{357} \\ \frac{1\,399\,912}{198\,835} & \frac{232\,910}{51\,051} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 3,302\,16 & 2,212\,89 \\ 7,040\,57 & 4,562\,30 \end{bmatrix}$$

с округлением значений матричных элементов до пяти десятичных знаков.

Отметим, что результаты нахождения точного значения

$$\int_a^b F(x)p(x)G(x)dx = \begin{bmatrix} \frac{43\,053\,208}{13\,037\,895} & \frac{790}{357} \\ \frac{1\,399\,912}{198\,835} & \frac{232\,910}{51\,051} \end{bmatrix}$$

и результаты приближенного вычисления данного интеграла совпадают. Как и ранее, это является следствием того, что формула (20) инвариантна для рассматриваемых полиномиальных матриц $F(x)$ и $G(x)$, суммарная степень которых равна 12, т. е. меньше $2n - 1 = 15$.

Далее перепишем формулу (18) в несколько ином виде. Для этого $x_k^{(1)}$ и $x_k^{(2)}$ обозначим через x_k и x_{n+k} ($k = 1, 2, \dots, n$), а матрицы $A_k^{(1)}$ и $A_k^{(2)}$ – через Λ_k и Λ_{n+k} ($k = 1, 2, \dots, n$) соответственно. Тогда формула (18) примет вид

$$\int_a^b p(x)F(x)dx \approx \sum_{k=1}^{2n} \Lambda_k F(x_k).$$

Запишем формулу (20) также в другом виде. Для этого воспользуемся равенством

$$\begin{aligned} F(x)p(x)G(x) &= F(x) \begin{bmatrix} p_1(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} G(x) + F(x) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p_2(x) \end{bmatrix} G(x) = \\ &= p_1(x)F(x)G_1(x) + p_2(x)F(x)G_2(x), \end{aligned}$$

где $G_1(x) = \begin{bmatrix} g_{11}(x) & g_{12}(x) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $G_2(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g_{21}(x) & g_{22}(x) \end{bmatrix}$. Здесь $p_1(x)$ и $p_2(x)$ – скалярные веса, поэтому искомая формула наивысшей алгебраической степени точности будет иметь вид

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x)p(x)G(x)dx &\approx \sum_{k=1}^n A_k^{(1)} F(x_k^{(1)}) G_1(x_k^{(1)}) + \sum_{k=1}^n A_k^{(2)} F(x_k^{(2)}) G_2(x_k^{(2)}) = \\ &= \sum_{k=1}^n F(x_k^{(1)}) A_{k1} G(x_k^{(1)}) + \sum_{k=1}^n F(x_k^{(2)}) A_{k2} G(x_k^{(2)}). \end{aligned}$$

Пусть матрица $\Lambda_k = A_{k1}$, а матрица $\Lambda_{n+k} = A_{k2}$ для $k = 1, 2, \dots, n$. Напомним, что $A_{k1} = \begin{bmatrix} A_k^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_{k2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_k^{(2)} \end{bmatrix}$, где $A_k^{(1)}$ и $A_k^{(2)}$ – квадратурные коэффициенты формулы (13), для произвольного натурального числа n и значений $v = 1, v = 2$.

Последовательность корней $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)})$ будем обозначать через $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n})$. Тогда формулу (20) можно записать в более компактном виде:

$$\int_a^b F(x)p(x)G(x)dx \approx \sum_{k=1}^{2n} F(x_k) \Lambda_k G(x_k). \quad (21)$$

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $p(x)$ – диагональная матрица с элементами $p_i(x)$, удовлетворяющими условиям $p_i(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$, $\int_a^b p_i(x)dx > 0$ ($i = 1, 2$). Если x_k и x_{n+k} ($k = 1, 2, \dots, n$) – корни алгебраических многочленов $P_{n1}(x)$ и $P_{n2}(x)$ степени n , ортогональных относительно весов $p_1(x)$ и $p_2(x)$ на отрезке $[a, b]$ к алгебраическим многочленам низшей степени соответственно, то формула (21), в которой квадратурные коэффициенты Λ_k задаются равенствами $\Lambda_k = A_{k1}$ и $\Lambda_{n+k} = A_{k2}$ ($k = 1, 2, \dots, n$), имеет наивысшую алгебраическую степень точности, равную $2n - 1$.

Рассмотрим далее случай диагональной весовой матрицы более высокого порядка. Пусть $F(x)$ – функциональная матрица произвольного фиксированного порядка m вида

$$F(x) = \begin{bmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1m}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \dots & f_{2m}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{m1}(x) & f_{m2}(x) & \dots & f_{mm}(x) \end{bmatrix},$$

а $p(x)$ – диагональная весовая матрица вида

$$p(x) = \begin{bmatrix} p_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_m(x) \end{bmatrix}$$

с элементами $p_i(x)$, удовлетворяющими условиям $p_i(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$, $\int_a^b p_i(x) dx > 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$).

Предположим, что для алгебраических многочленов n -й степени $P_{n1}(x)$, $P_{n2}(x)$, ..., $P_{nm}(x)$, ортогональных относительно весов $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_m(x)$ на отрезке $[a, b]$ к алгебраическим многочленам низшей степени соответственно, выполняются равенства

$$\int_a^b p_1(x) P_{n1}(x) x^i dx = \int_a^b p_2(x) P_{n2}(x) x^i dx = \dots = \int_a^b p_m(x) P_{nm}(x) x^i dx = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

Будем считать, что они ортонормированные, т. е.

$$\int_a^b p_1(x) P_{n1}^2(x) dx = \int_a^b p_2(x) P_{n2}^2(x) dx = \dots = \int_a^b p_m(x) P_{nm}^2(x) dx = 1.$$

Положим, что

$$P_n(x) = \begin{bmatrix} P_{n1}(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_{n2}(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & P_{nm}(x) \end{bmatrix}.$$

Тогда $\int_a^b p(x) P_n(x) Q_{n-1}(x) dx = 0$, где $Q_{n-1}(x)$ – произвольная матрица вида

$$Q_{n-1}(x) = \begin{bmatrix} q_{11}(x) & q_{12}(x) & \dots & q_{1m}(x) \\ q_{21}(x) & q_{22}(x) & \dots & q_{2m}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{m1}(x) & q_{m2}(x) & \dots & q_{mm}(x) \end{bmatrix}$$

с элементами $q_{ij}(x)$ ($i, j = 1, 2, \dots, m$) – алгебраическими многочленами степени не выше $n-1$. В этом случае формула (17) в поэлементной записи имеет вид

$$\begin{aligned} \int_a^b p(x) F(x) dx &= \int_a^b \begin{bmatrix} p_1(x) f_{11}(x) & p_1(x) f_{12}(x) & \dots & p_1(x) f_{1m}(x) \\ p_2(x) f_{21}(x) & p_2(x) f_{22}(x) & \dots & p_2(x) f_{2m}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_m(x) f_{m1}(x) & p_m(x) f_{m2}(x) & \dots & p_m(x) f_{mm}(x) \end{bmatrix} dx \approx \\ &\approx \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} A_k^{(1)} f_{11}(x_k^{(1)}) & A_k^{(1)} f_{12}(x_k^{(1)}) & \dots & A_k^{(1)} f_{1m}(x_k^{(1)}) \\ A_k^{(2)} f_{21}(x_k^{(2)}) & A_k^{(2)} f_{22}(x_k^{(2)}) & \dots & A_k^{(2)} f_{2m}(x_k^{(2)}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_k^{(m)} f_{m1}(x_k^{(m)}) & A_k^{(m)} f_{m2}(x_k^{(m)}) & \dots & A_k^{(m)} f_{mm}(x_k^{(m)}) \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^n A_k^{(1)} \begin{bmatrix} f_{11}(x_k^{(1)}) & f_{12}(x_k^{(1)}) & \dots & f_{1m}(x_k^{(1)}) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + \\
 &+ \sum_{k=1}^n A_k^{(2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ f_{21}(x_k^{(2)}) & f_{22}(x_k^{(2)}) & \dots & f_{2m}(x_k^{(2)}) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} + \dots \\
 &\dots + \sum_{k=1}^n A_k^{(m)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ f_{m1}(x_k^{(m)}) & f_{m2}(x_k^{(m)}) & \dots & f_{mm}(x_k^{(m)}) \end{bmatrix} = \\
 &= \sum_{k=1}^n A_k^{(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11}(x_k^{(1)}) & f_{12}(x_k^{(1)}) & \dots & f_{1m}(x_k^{(1)}) \\ f_{21}(x_k^{(1)}) & f_{22}(x_k^{(1)}) & \dots & f_{2m}(x_k^{(1)}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{m1}(x_k^{(1)}) & f_{m2}(x_k^{(1)}) & \dots & f_{mm}(x_k^{(1)}) \end{bmatrix} + \\
 &+ \sum_{k=1}^n A_k^{(2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11}(x_k^{(2)}) & f_{12}(x_k^{(2)}) & \dots & f_{1m}(x_k^{(2)}) \\ f_{21}(x_k^{(2)}) & f_{22}(x_k^{(2)}) & \dots & f_{2m}(x_k^{(2)}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{m1}(x_k^{(2)}) & f_{m2}(x_k^{(2)}) & \dots & f_{mm}(x_k^{(2)}) \end{bmatrix} + \dots \\
 &\dots + \sum_{k=1}^n A_k^{(m)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11}(x_k^{(m)}) & f_{12}(x_k^{(m)}) & \dots & f_{1m}(x_k^{(m)}) \\ f_{21}(x_k^{(m)}) & f_{22}(x_k^{(m)}) & \dots & f_{2m}(x_k^{(m)}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{m1}(x_k^{(m)}) & f_{m2}(x_k^{(m)}) & \dots & f_{mm}(x_k^{(m)}) \end{bmatrix} = \\
 &= \sum_{k=1}^n A_k^{(1)} E_1 F(x_k^{(1)}) + \sum_{k=1}^n A_k^{(2)} E_2 F(x_k^{(2)}) + \dots + \sum_{k=1}^n A_k^{(m)} E_m F(x_k^{(m)}),
 \end{aligned}$$

где

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots, E_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Введя обозначения

$$A_{k1} = A_k^{(1)} E_1 = \begin{bmatrix} A_k^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, A_{k2} = A_k^{(2)} E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_k^{(2)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots,$$

$$A_{km} = A_k^{(m)} E_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_k^{(m)} \end{bmatrix},$$

придем к формуле

$$\int_a^b p(x) F(x) dx \approx \sum_{k=1}^n \left[A_{k1} F(x_k^{(1)}) + A_{k2} F(x_k^{(2)}) + \dots + A_{km} F(x_k^{(m)}) \right]. \quad (22)$$

Аналогично формуле (22) для правила (12) имеем

$$\int_a^b F(x) p(x) dx \approx \sum_{k=1}^n \left[F(x_k^{(1)}) A_{k1} + F(x_k^{(2)}) A_{k2} + \dots + F(x_k^{(m)}) A_{km} \right].$$

Обобщим результаты, полученные при построении квадратурных формул с диагональными весовыми матрицами произвольного фиксированного порядка в этом разделе, на случай более общего интеграла

$$\int_a^b F(x) p(x) G(x) dx,$$

где, как и ранее, $p(x)$ – диагональная матрица вида

$$p(x) = \begin{bmatrix} p_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_m(x) \end{bmatrix}$$

с элементами $p_i(x)$, удовлетворяющими условиям $p_i(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$, $\int_a^b p_i(x) dx > 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$), а $F(x)$ и $G(x)$ – матрицы произвольного порядка m вида

$$F(x) = \begin{bmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1m}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \dots & f_{2m}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{m1}(x) & f_{m2}(x) & \dots & f_{mm}(x) \end{bmatrix}, G(x) = \begin{bmatrix} g_{11}(x) & g_{12}(x) & \dots & g_{1m}(x) \\ g_{21}(x) & g_{22}(x) & \dots & g_{2m}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{m1}(x) & g_{m2}(x) & \dots & g_{mm}(x) \end{bmatrix}.$$

В этом случае имеем

$$\int_a^b F(x) p(x) G(x) dx = \sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^m \left[\int_a^b f_{is}(x) p_{si}(x) g_{ij}(x) dx \right],$$

причем элементы $p_{ij}(x) = 0$, если $i \neq j$, а функции $p_1(x) = p_{11}(x)$, $p_2(x) = p_{22}(x)$, ..., $p_m(x) = p_{mm}(x)$, поэтому

$$\int_a^b F(x) p(x) G(x) dx = I_1 + I_2 + \dots + I_m,$$

где

$$I_1 = \int_a^b p_1(x) \begin{bmatrix} f_{11}(x) g_{11}(x) & f_{11}(x) g_{12}(x) & \dots & f_{11}(x) g_{1m}(x) \\ f_{21}(x) g_{11}(x) & f_{21}(x) g_{12}(x) & \dots & f_{21}(x) g_{1m}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{m1}(x) g_{11}(x) & f_{m1}(x) g_{12}(x) & \dots & f_{m1}(x) g_{1m}(x) \end{bmatrix} dx, \quad (23)$$

$$I_2 = \int_a^b p_2(x) \begin{bmatrix} f_{12}(x)g_{21}(x) & f_{12}(x)g_{22}(x) & \dots & f_{12}(x)g_{2m}(x) \\ f_{22}(x)g_{21}(x) & f_{22}(x)g_{22}(x) & \dots & f_{22}(x)g_{2m}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{m2}(x)g_{21}(x) & f_{m2}(x)g_{22}(x) & \dots & f_{m2}(x)g_{2m}(x) \end{bmatrix} dx, \dots,$$

$$I_m = \int_a^b p_m(x) \begin{bmatrix} f_{1m}(x)g_{m1}(x) & f_{1m}(x)g_{m2}(x) & \dots & f_{1m}(x)g_{mm}(x) \\ f_{2m}(x)g_{m1}(x) & f_{2m}(x)g_{m2}(x) & \dots & f_{2m}(x)g_{mm}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{mm}(x)g_{m1}(x) & f_{mm}(x)g_{m2}(x) & \dots & f_{mm}(x)g_{mm}(x) \end{bmatrix} dx.$$

Заметим, что в равенствах (23) подынтегральные множители $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_m(x)$ являются скалярными функциями, и, следовательно, для вычисления интегралов I_1 , I_2 , ..., I_m можно воспользоваться квадратурными формулами наивысшей алгебраической степени точности, рассмотренными выше.

Через $F_1(x)$ обозначим матрицу под знаком интеграла I_1 , через $F_2(x)$ – матрицу под знаком интеграла I_2 и т. д., через $F_m(x)$ – матрицу под знаком интеграла I_m в формулах (23). Если $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$, ..., $x_k^{(m)}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) – корни алгебраических многочленов $P_{n1}(x)$, $P_{n2}(x)$, ..., $P_{nm}(x)$ степени n , ортогональных относительно весов $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_m(x)$ на отрезке $[a, b]$ к алгебраическим многочленам низшей степени соответственно, то следующая формула будет иметь наивысшую алгебраическую степень точности, равную $2n - 1$:

$$\int_a^b F(x)p(x)G(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_k^{(1)}F_1(x_k^{(1)}) + \sum_{k=1}^n A_k^{(2)}F_2(x_k^{(2)}) + \dots + \sum_{k=1}^n A_k^{(m)}F_m(x_k^{(m)}), \quad (24)$$

где $A_k^{(1)}$, $A_k^{(2)}$, ..., $A_k^{(m)}$ такие, как в формуле (13) при $v = 1$, $v = 2$, ..., $v = m$.

Перепишем формулу (22) в несколько ином виде. Для этого $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$, ..., $x_k^{(m)}$ обозначим через x_k , x_{n+k} , ..., $x_{(m-1)n+k}$ ($k = 1, 2, \dots, n$), а матрицы $A_k^{(1)}$, $A_k^{(2)}$, ..., $A_k^{(m)}$ – через Λ_k , Λ_{n+k} , ..., $\Lambda_{(m-1)n+k}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) соответственно. Тогда формула (22) примет вид

$$\int_a^b p(x)F(x)dx \approx \sum_{k=1}^{mn} \Lambda_k F(x_k).$$

Запишем формулу (24) также в другом виде. Для этого воспользуемся равенством

$$F(x)p(x)G(x) = F(x) \begin{bmatrix} p_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} G(x) +$$

$$+ F(x) \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} G(x) + \dots + F(x) \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_m(x) \end{bmatrix} G(x) =$$

$$= p_1(x)F(x)G_1(x) + p_2(x)F(x)G_2(x) + \dots + p_m(x)F(x)G_m(x),$$

где

$$G_1(x) = \begin{bmatrix} g_{11}(x) & g_{12}(x) & \dots & g_{1m}(x) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad G_2(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ g_{21}(x) & g_{22}(x) & \dots & g_{2m}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots,$$

$$G_m(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{m1}(x) & g_{m2}(x) & \dots & g_{mm}(x) \end{bmatrix}.$$

Здесь $p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)$ – скалярные весовые функции, поэтому искомая формула наивысшей алгебраической степени точности будет иметь вид

$$\begin{aligned} & \int_a^b F(x) p(x) G(x) dx \approx \\ & \approx \sum_{k=1}^n A_k^{(1)} F(x_k^{(1)}) G_1(x_k^{(1)}) + \sum_{k=1}^n A_k^{(2)} F(x_k^{(2)}) G_2(x_k^{(2)}) + \dots + \sum_{k=1}^n A_k^{(m)} F(x_k^{(m)}) G_m(x_k^{(m)}) = \\ & = \sum_{k=1}^n F(x_k^{(1)}) A_{k1} G(x_k^{(1)}) + \sum_{k=1}^n F(x_k^{(2)}) A_{k2} G(x_k^{(2)}) + \dots + \sum_{k=1}^n F(x_k^{(m)}) A_{km} G(x_k^{(m)}). \end{aligned} \quad (25)$$

Обозначим через $\Lambda_k, \Lambda_{n+k}, \dots, \Lambda_{(m-1)n+k}$ матрицы $A_{k1}, A_{k2}, \dots, A_{km}$ для $k = 1, 2, \dots, n$ соответственно. Напомним, что

$$A_{k1} = \begin{bmatrix} A_k^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, A_{k2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_k^{(2)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots, A_{km} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_k^{(m)} \end{bmatrix},$$

где $A_k^{(1)}, A_k^{(2)}, \dots, A_k^{(m)}$ – квадратурные коэффициенты формулы (13), для произвольного натурального значения n и $v = 1, v = 2, \dots, v = m$.

Последовательность корней $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}, \dots, x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})$ будем обозначать через $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{mn})$. Тогда формулу (24) можно записать в более компактном виде:

$$\int_a^b F(x) p(x) G(x) dx \approx \sum_{k=1}^{mn} F(x_k) \Lambda_k G(x_k). \quad (26)$$

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 4. Если $x_k, x_{n+k}, \dots, x_{(m-1)n+k}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) – корни алгебраических многочленов $P_{n1}(x), P_{n2}(x), \dots, P_{nm}(x)$ степени n , ортогональных относительно весов $p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)$ на отрезке $[a, b]$ к алгебраическим многочленам низшей степени соответственно, то формула (26), в которой квадратурные коэффициенты Λ_k задаются равенствами $\Lambda_k = A_{k1}, \Lambda_{n+k} = A_{k2}, \dots, \Lambda_{(m-1)n+k} = A_{km}$ ($k = 1, 2, \dots, n$), имеет наивысшую алгебраическую степень точности, равную $2n - 1$.

О сходимости квадратурного процесса типа Гаусса в случае диагональной весовой матрицы

Обозначим через $r_n = \int_a^b F(x) p(x) G(x) dx - \sum_{k=1}^{mn} F(x_k) \Lambda_k G(x_k)$ матрицу погрешности квадратурной формулы (26).

С учетом развернутого вида (25) формулы (26) и известного для скалярного случая факта, согласно которому квадратурная сумма в формулах типа Гаусса сходится к точному значению интеграла при условии, что интегрируемая функция непрерывна, приходим к следующей теореме.

Теорема 5. Если матрицы $F(x)$ и $G(x)$ непрерывны на $[a, b]$, то погрешность r_n сходится к нулевой матрице при $n \rightarrow \infty$.

В заключение отметим, что квадратуры наивысшей алгебраической степени точности другой структуры для матричнозначных функций с матричной весовой функцией, отличной от диагональной, построены в работе [3]. Достаточно полная теория интерполирования операторов, заданных на множествах функций и матриц, изложена в монографии [4], в которой в том числе исследуются вопросы интерполирования для матричнозначных и операторнозначных функций.

Библиографические ссылки

1. Гантмахер ФР. *Теория матриц*. 5-е издание. Лидский ВБ, редактор. Москва: Физматлит; 2010. 560 с.
2. Крылов ВИ. *Приближенное вычисление интегралов*. 2-е издание. Москва: Наука; 1967. 500 с.
3. Sinap A, Van Assche W. Polynomial interpolation and Gaussian quadrature for matrix-valued functions. *Linear Algebra and its Applications*. 1994;207:71–114. DOI: 10.1016/0024-3795(94)90005-1.
4. Янович ЛА, Игнатенко МВ. *Интерполяционные методы аппроксимации операторов, заданных на функциональных пространствах и множествах матриц*. Минск: Беларуская навука; 2020. 476 с.

References

1. Gantmakher FR. *Teoriya matrits* [Matrix theory]. 5th edition. Lidskii VB, editor. Moscow: Fizmatlit; 2010. 560 p. Russian.
2. Krylov VI. *Priblizhennoe vychislenie integralov* [Approximate calculation of integrals]. 2nd edition. Moscow: Nauka; 1967. 500 p. Russian.
3. Sinap A, Van Assche W. Polynomial interpolation and Gaussian quadrature for matrix-valued functions. *Linear Algebra and its Applications*. 1994;207:71–114. DOI: 10.1016/0024-3795(94)90005-1.
4. Yanovich LA, Ignatenko MV. *Interpolyatsionnye metody approksimatsii operatorov, zadannykh na funktsional'nykh prostranstvakh i mnozhestvakh matrits* [Interpolation methods for approximation of operators defined on function spaces and sets of matrices]. Minsk: Belaruskaja navuka; 2020. 476 p. Russian.

Получена 27.10.2023 / исправлена 14.02.2024 / принята 14.02.2024.
Received 27.10.2023 / revised 14.02.2024 / accepted 14.02.2024.

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

DISCRETE MATHEMATICS AND MATHEMATICAL CYBERNETICS

УДК 519.157.2

УСЛОВИЯ ЭФФЕКТИВНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ ВЫБОРА. ЧАСТЬ 1

В. М. ДЕМИДЕНКО¹⁾

¹⁾Белорусский государственный экономический университет,
пр. Партизанский, 26, 220070, г. Минск, Беларусь

Аннотация. Описан класс четырехиндексных вещественных матриц, для которых гарантирована эффективная разрешимость квадратичной задачи выбора – достижение экстремальных значений ее функционала на одной из подстановок специального вида, приведенных в классической теореме Харди, Литлвуда и Поляка о перестановке трех систем. Условия, определяющие введенный класс матриц, обобщают все ранее предложенные условия, накладываемые на вид матриц и гарантирующие строгую разрешимость задач минимизации билинейной формы на декартовом произведении симметрической группы (условия теоремы о перестановке трех систем), квадратичной формы на симметрической группе, а также результаты аналогичного плана, полученные для квадратичной задачи о назначениях.

Ключевые слова: комбинаторная оптимизация; квадратичная задача о назначениях; оптимизация на подстановках; строгая разрешимость задач.

Благодарность. Работа выполнена в рамках государственной программы научных исследований «Конвергенция-2025» (подпрограмма «Математические модели и методы», задание 1.5.01).

Образец цитирования:

Демиденко ВМ. Условия эффективной разрешимости квадратичной задачи выбора. Часть 1. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2024;1:45–58.
EDN: TEYTM

For citation:

Demidenko VM. Conditions for the effective solvability of the quadratic choice problem. Part 1. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2024;1:45–58. Russian.
EDN: TEYTM

Автор:

Виталий Михайлович Демиденко – доктор физико-математических наук, доцент; профессор кафедры высшей математики факультета цифровой экономики.

Author:

Vitaliy M. Demidenko, doctor of science (physics and mathematics), docent; professor at the department of higher mathematics, faculty of digital economy.
vmdemidenko@yandex.ru

CONDITIONS FOR THE EFFECTIVE SOLVABILITY OF THE QUADRATIC CHOICE PROBLEM. PART 1

V. M. DEMIDENKO^a

^aBelarus State Economic University, 26 Partyzanski Avenue, Minsk 220070, Belarus

Abstract. A class of four-index real matrices is described for which the effective solvability of the quadratic choice problem is guaranteed. This means achieving the extreme values of its functional on one of the permutations of a special kind, which are given in the classical theorem of Hardy, Littlewood and Pólya on the permutation of three systems. The introduced conditions generalise all the previously proposed conditions imposed on the kind of matrices that guarantee strict solvability of the problems of minimising the bilinear form on the Cartesian product of the symmetric group (conditions of the theorem on the permutation of three systems), the quadratic form of the symmetric group, and also generalise the similar results obtained for the quadratic assignment problem.

Keywords: combinatorial optimisation; quadratic assignment problem; substation optimisation; strict solvability of problems.

Acknowledgements. This work was carried out within the framework of the state programme of scientific research «Convergence-2025» (subprogramme «Mathematical models and methods», assignment 1.5.01).

Введение

Одним из направлений в исследовании NP-трудных оптимизационных задач на подстановках является выделение их полиномиально или строго разрешимых случаев. Последние описываются такими ограничениями, накладываемыми на входные данные оптимизационной задачи, которые гарантируют достижение оптимума на одной или нескольких заранее заданных подстановках. Результаты исследования частного случая квадратичной задачи выбора в этом направлении впервые были сформулированы Г. Х. Харди, Дж. И. Литлвудом и Г. Полиа в виде теоремы о перестановке трех систем [1]. Условия указанной теоремы гарантировали достижение максимума билинейной формы на двух заданных подстановках специального вида. Значительно позже рядом исследователей были получены результаты минимизации квадратичной формы на одной из подстановок, приведенных в теореме о перестановке трех систем [2–5], которые были обобщены в статьях [6; 7]. Дальнейшие исследования задач минимизации билинейной и квадратичной форм на множестве подстановок продолжены в работах [8–10]. Современное состояние этой тематики отражено в монографиях [11; 12].

В данной работе предложены условия достижения экстремальных значений функционала квадратичной задачи выбора на одной из подстановок из теоремы Харди, Литлвуда и Полиа, которые обобщают полученные до настоящего времени аналогичные результаты для всех частных случаев указанной задачи, включая квадратичную задачу о назначениях [8–10].

Предварительные сведения и обозначения

Пусть S_n – симметрическая группа, определенная на множестве $N_{1,n} = \{1, 2, \dots, n\}$. Любая подстановка $\sigma \in S_n$ является взаимно однозначным отображением, переводящим элемент i в $\sigma(i)$, где $i \in N_{1,n}$. В дальнейшем подстановки будем обозначать через $\sigma = \langle \sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(i), \dots, \sigma(n) \rangle$, где $\sigma(i)$ – образ элемента $i \in N_{1,n}$, а i – прообраз $\sigma(i) \in N_{1,n}$. Подмножество $\{i, i+1, \dots, j-1, j\}$ далее обозначается через $N_{i,j}$. Произведением пары подстановок σ, ρ называется подстановка $\sigma \circ \rho$, переводящая элемент i в $\sigma(\rho(i))$, где $i \in N_{1,n}$, а символ $\circ$ обозначает операцию умножения подстановок.

Пусть $A = (a_{i,j,k,\ell})$ – произвольная вещественная четырехиндексная матрица размера $n \times n \times n \times n$. Определим на S_n функционал, полагая, что для любой подстановки σ

$$f_A(\sigma) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j,\sigma(i),\sigma(j)}. \quad (1)$$

Квадратичная задача выбора состоит в нахождении такой подстановки $\sigma_0 \in S_n$, что неравенство $f_A(\sigma_0) \leq f_A(\sigma)$ выполняется для любой подстановки $\sigma \in S_n$.

Подстановка σ определяет в $N_{1,n}$ восемь подмножеств:

$$I_{1,1}^\sigma = \left\{ i \in N_{1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \mid \sigma(i) > \sigma(n+1-i) \right\}, \quad I_{1,2}^\sigma = \left\{ n+1-i \in N_{1,n} \mid i \in I_{1,1}^\sigma \right\},$$

$$I_{1,3}^\sigma = N_{1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \setminus I_{1,1}^\sigma, \quad I_{1,4}^\sigma = \left\{ n+1-i \in N_{1,n} \mid i \in I_{1,3}^\sigma \right\},$$

$$I_{2,1}^\sigma = \left\{ j \in N_{2, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \mid \sigma(j) < \sigma(n+2-j) \right\}, \quad I_{2,2}^\sigma = \left\{ n+2-j \in N_{1,n} \mid j \in I_{2,1}^\sigma \right\},$$

$$I_{2,3}^\sigma = N_{2, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \setminus I_{2,1}^\sigma, \quad I_{2,4}^\sigma = \left\{ n+2-j \in N_{1,n} \mid j \in I_{2,2}^\sigma \right\}.$$

Введенные подмножества $I_{1,1}^\sigma, I_{2,1}^\sigma$ определяют две подстановки:

$$\psi_\sigma = \prod_{i \in I_{1,1}^\sigma} (i, n+1-i), \quad \varphi_\sigma = \prod_{j \in I_{2,1}^\sigma} (j, n+2-j), \quad (4)$$

где $(i, n+1-i), (j, n+2-j)$ – транспозиции, которые меняют местами соответственно i и $n+1-i$, j и $n+2-j$, оставляя все остальные элементы множества $N_{1,n}$ на месте. В силу определения подмножества (2), (3) и подстановки (4) обладают следующими свойствами:

- (i) набор подмножеств $I_{1,r}^\sigma, r = 1, 2, 3, 4$, является разбиением множества $N_{1,n}$ при четном n и множества $N_{1,n} \setminus \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ при нечетном n ;
- (ii) набор подмножеств $I_{2,s}^\sigma, s = 1, 2, 3, 4$, является разбиением множества $N_{2,n}$ при нечетном n и множества $N_{2,n} \setminus \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ при четном n ;
- (iii) для подстановок $\psi_\sigma, \varphi_\sigma$ справедливы равенства

$$\psi_\sigma(i) = n+1-i, \quad \psi_\sigma(n+1-i) = i, \quad i \in I_{1,1}^\sigma,$$

$$\psi_\sigma(j) = j, \quad j \in N_{1,n} \setminus (I_{1,1}^\sigma \cup I_{1,2}^\sigma), \quad \psi_\sigma\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

при нечетном n ,

$$\varphi_\sigma(j) = n+2-j, \quad \varphi_\sigma(n+2-j) = j, \quad j \in I_{2,1}^\sigma, \quad \varphi_\sigma(1) = 1,$$

$$\varphi_\sigma(j) = j, \quad j \in N_{1,n} \setminus (I_{2,1}^\sigma \cup I_{2,2}^\sigma), \quad \varphi_\sigma\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

при четном n .

Подстановки (4) однозначно определяют пару подстановок

$$\sigma_\psi = \sigma \circ \psi_\sigma, \quad \sigma_\varphi = \sigma \circ \varphi_\sigma, \quad \sigma \in S_n. \quad (7)$$

Приращением функционала (1) на упорядоченной паре подстановок σ, ρ называется разность $\Delta f_A \langle \sigma, \rho \rangle = f_A(\rho) - f_A(\sigma)$.

Условия достижения минимума функционала квадратичной задачи выбора

При описании условий, гарантирующих достижение минимума функционала $f_A(\sigma)$ на подстановке $\sigma_0 = \langle 1, 3, 5, \dots, n, \dots, 6, 4, 2 \rangle \in S_n$, и их доказательстве используется следующая лемма.

Лемма 1. Для любой подстановки $\sigma \in S_n$ существует такая последовательность подстановок

$$\sigma = \rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{i-1}, \rho_i, \dots, \rho_k = \sigma_0, \quad (8)$$

что $\rho_i = \psi_{\rho_{i-1}}$ либо $\rho_i = \varphi_{\rho_{i-1}}$ для всех $i = 1, 2, \dots, k$.

Доказательство. Чтобы доказать лемму 1, достаточно убедиться в существовании для σ_0 и любой подстановки σ последовательности вида (8). Проверка показывает, что из равенств

$$\sigma(i) = 2i - 1, \sigma(n + 1 - i) = 2i, i \in N_{1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, \quad (9)$$

вытекает $\sigma = \sigma_0$. Следовательно, для любой подстановки σ , отличной от σ_0 , в $N_{1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ должен существовать минимальный элемент $1 \leq i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, нарушающий равенства (9). Для такого элемента i должны выполняться соотношения

$$\begin{aligned} \sigma(i) \neq \sigma_0(i) = 2i - 1 \text{ либо } \sigma(n + 1 - i) \neq \sigma_0(n + 1 - i) = 2i, \\ \sigma(j) = \sigma_0(j) = 2j - 1 \text{ и } \sigma(n + 1 - j) = \sigma_0(n + 1 - j) = 2j, \end{aligned} \quad (10)$$

где $j \in N_{1, i-1}$. С другой стороны, если известно, что для некоторой подстановки σ минимальный элемент i , удовлетворяющий соотношениям (10), равен $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, то в силу равенств (9) $\sigma = \sigma_0$.

Предположим, что для произвольной подстановки σ , отличной от σ_0 , с минимальным элементом $1 \leq i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, нарушающим равенства (9), можно построить последовательность вида (8), в которой для последней подстановки ρ' минимальный элемент i' , нарушающий равенства (9), будет не меньше $i + 1$. Если сформулированное предположение верно, то с его помощью нетрудно убедиться в справедливости леммы 1. Действительно, если минимальный нарушающий равенства (9) элемент i' последней подстановки ρ' в построенной последовательности вида (8) строго меньше $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, то строим новую последовательность такого же вида, начинающуюся с подстановки ρ' и заканчивающуюся подстановкой ρ'' , для которой минимальный элемент i'' , нарушающий равенства (9), будет не меньше $i' + 1$. Если по-прежнему $i'' < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, то продолжаем процесс построения новой последовательности, начиная с подстановки ρ'' , и т. д. Таким образом, ввиду строгого возрастания минимальных элементов, нарушающих равенства (9), за конечное число шагов можно построить последовательность подстановок вида (8), последняя подстановка которой в качестве минимального элемента, нарушающего равенства (9), будет иметь число $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Следовательно, в силу равенств (9) последняя подстановка в построенной последовательности будет совпадать с σ_0 . Объединив все построенные последовательности в одну, получим последовательность вида (8) с начальной и конечной подстановками σ и σ_0 .

Докажем справедливость приведенного выше предположения. Пусть $\sigma \neq \sigma_0$, тогда в силу соотношений (10) для подстановки σ возможны две ситуации: $\sigma(i) \neq 2i - 1$ либо $\sigma(n + 1 - i) \neq 2i$, где $1 \leq i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. В первой ситуации (т. е. при $\sigma(i) \neq 2i - 1$) имеем

$$\sigma = \left\langle 1, 3, 5, \dots, 2i - 3, \sigma(i), \dots, \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \dots, \sigma(n + 1 - i), 2i - 2, \dots, 6, 4, 2 \right\rangle.$$

Из записи σ видно, что для элемента $\ell = \sigma^{-1}(2i - 1) \in N_{i+1, n+1-i}$ возможны два случая: $i + 1 \leq \ell \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ либо $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor < \ell \leq n + 1 - i$.

Если для ℓ имеет место первый случай, то $\sigma(\ell) = 2i - 1$ стоит слева от $\sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)$ в записи σ (при четном n допускается равенство $\sigma(\ell) = \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)$), следовательно,

$$\begin{aligned} \sigma = \left\langle 1, 3, \dots, 2i - 3, \sigma(i), \dots, \sigma(\ell - 1), 2i - 1, \dots, \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \dots, \right. \\ \left. \sigma(n + 1 - \ell), \sigma(n + 2 - \ell), \dots, \sigma(n + 1 - i), 2i - 2, \dots, 4, 2 \right\rangle. \end{aligned}$$

Так как $\sigma(n+2-\ell) \in N_{2i,n}$, то $\sigma(\ell) = 2i-1 < \sigma(n+2-\ell)$, откуда с учетом подмножеств (3) имеем включение $\ell \in I_{2,1}^\sigma$. Таким образом, транспозиция $(\ell, n+2-\ell)$ входит в запись подстановки φ_σ , и в силу определения подмножества $I_{2,1}^\sigma$ из равенств (6) и независимости транспозиций, порождающих подстановку φ_σ , вытекают соотношения

$$\varphi_\sigma(\ell) = n+2-\ell, \varphi_\sigma(n+2-\ell) = \ell; \varphi_\sigma(j) = j, \varphi_\sigma(n+2-j) = n+2-j, j \notin I_{2,1}^\sigma.$$

Из полученных соотношений и определения произведения подстановок для $\rho_1 = \sigma \circ \varphi_\sigma$ следует справедливость равенств

$$\begin{aligned} \rho_1(\ell) &= \sigma(n+2-\ell), \rho_1(n+2-\ell) = \sigma(\ell) = 2i-1, \\ \rho_1(j) &= \sigma(j), \rho_1(n+2-j) = \sigma(n+2-j) \end{aligned}$$

для ℓ и всех $j \notin I_{2,1}^\sigma$. Таким образом, построена подстановка $\rho_1 = \sigma \circ \varphi_\sigma$ вида

$$\begin{aligned} \rho_1 = & \left\langle 1, 3, \dots, 2i-3, \rho_1(i), \dots, \rho_1(\ell-1), \sigma(n+2-\ell), \dots, \rho_1\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \dots, \right. \\ & \left. \rho_1(n+1-\ell), 2i-1, \dots, \rho_1(n+1-i), 2i-2, \dots, 4, 2 \right\rangle, \end{aligned}$$

в записи которой элемент $2i-1$ стоит на $(n+2-\ell)$ -м месте. Так как $\rho_1(\ell-1) \in N_{2i,n}$, то $\rho_1(\ell-1) > 2i-1 = \rho_1(n+2-\ell) = \rho_1(n+1-(\ell-1))$, следовательно, $\ell-1 \in I_{1,1}^{\rho_1}$. Таким образом, транспозиция $(\ell-1, n+2-\ell)$ входит в запись подстановки ψ_{ρ_1} вида (4). Далее в силу равенств (5), независимости транспозиций, порождающих подстановку ψ_{ρ_1} , и справедливости включения $\ell-1 \in I_{1,1}^{\rho_1}$ должны выполняться соотношения

$$\psi_{\rho_1}(\ell-1) = n+2-\ell, \psi_{\rho_1}(n+2-\ell) = \ell-1; \psi_{\rho_1}(j) = j, \psi_{\rho_1}(n+1-j) = n+1-j, j \notin I_{1,1}^\sigma,$$

из которых следует справедливость равенств

$$\begin{aligned} \rho_2(\ell-1) &= \rho_1(n+2-\ell) = 2i-1, \rho_2(n+2-\ell) = \rho_1(\ell-1), \\ \rho_2(j) &= \rho_1(j), \rho_2(n+1-j) = \rho_1(n+1-j) \end{aligned}$$

для $\ell-1$ и всех $1 \leq j \leq i-1$ ввиду $j \notin I_{1,1}^{\rho_1}$ и $\ell-1 \in I_{1,1}^{\rho_1}$. Таким образом, построена подстановка $\rho_2 = \rho_1 \circ \psi_{\rho_1}$ вида

$$\begin{aligned} \rho_2 = & \left\langle 1, 3, \dots, 2i-3, \rho_2(i), \dots, 2i-1, \rho_2(\ell), \dots, \rho_2\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \dots, \right. \\ & \left. \rho_2(n+1-\ell), \rho_2(\ell-1), \dots, \rho_2(n+1-i), 2i-2, \dots, 4, 2 \right\rangle, \end{aligned}$$

в записи которой элемент $2i-1$ стоит на $(\ell-1)$ -м месте. Если $\ell-1 = i$, то построена последовательность $\sigma = \rho_0, \rho_1, \rho_2$ вида (8), в которой элементы $1, 2, \dots, 2i-1$ расположены на тех же местах, что и в подстановке σ_0 . Если $\ell-1 > i$, то, повторив для элемента $2i-1$ аналогичные вышеприведенным построения $\ell-i$ раз, получим последовательность $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{2(\ell-i)-1}, \rho_{2(\ell-i)}$ вида (8) с последней подстановкой

$$\begin{aligned} \rho_{2(\ell-i)} = & \left\langle 1, 3, \dots, 2i-3, 2i-1, \rho_{2(\ell-i)}(i+1), \dots, \rho_{2(\ell-i)}\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \dots, \right. \\ & \left. \rho_{2(\ell-i)}(n+1-i), 2i-2, \dots, 4, 2 \right\rangle, \end{aligned}$$

в записи которой элемент $2i-1$ стоит на i -м месте. Доказано, что в первом случае (т. е. при выполнении соотношений $i+1 \leq \ell = \sigma^{-1}(2i-1) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$) существует последовательность длины $2(\ell-i)$ вида (8), в записи последней подстановки $\rho_{2(\ell-i)}$ которой элементы $1, 2, \dots, 2i-1$ расположены на тех же местах, что и в подстановке σ_0 .

Убедимся в существовании аналогичной последовательности во втором случае. Так как $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil < \ell = \sigma^{-1}(2i-1) \leq n+1-i$, то $\ell = n+1-k$, где $i \leq k < \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Следовательно, $\sigma(\ell) = 2i-1$ стоит справа от $\sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)$ в записи подстановки σ вида

$$\sigma = \left\langle 1, 3, \dots, 2i-3, \sigma(i), \dots, \sigma(k-1), \sigma(k), \dots, \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \dots, \right. \\ \left. \sigma(n-k), 2i-1, \dots, \sigma(n+1-i), 2i-2, \dots, 4, 2 \right\rangle.$$

Поскольку $\sigma(k) \in N_{2i,n}$, то $\sigma(k) > 2i-1 = \sigma(n+1-k)$, откуда $k \in I_{1,1}^\sigma$. Следовательно, транспозиция $(k, n+1-k)$ входит в запись подстановки ψ_σ вида (4), и в силу определения подмножества $I_{1,1}^\sigma$ из равенств (5) и независимости транспозиций, порождающих подстановку ψ_σ , имеем

$$\rho_1(k) = \sigma(n+1-k) = 2i-1, \rho_1(n+1-k) = \sigma(k), \\ \rho_1(j) = \sigma(j), \rho_1(n+1-j) = \sigma(n+1-j)$$

для k и всех $1 \leq j \leq i-1$ ввиду $j \notin I_{1,1}^\sigma$ и $k \in I_{1,1}^\sigma$. Таким образом, построена подстановка $\rho_1 = \sigma \circ \psi_\sigma$ вида

$$\rho_1 = \left\langle 1, 3, \dots, 2i-3, \rho_1(i), \dots, \rho_1(k-1), 2i-1, \dots, \rho_1\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \dots, \right. \\ \left. \rho_1(n-k), \sigma(k), \dots, \rho_1(n+1-i), 2i-2, \dots, 4, 2 \right\rangle,$$

где $i \leq k < \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Если $k = i$, то в записи подстановки ρ_1 элемент $2i-1$ стоит на i -м месте, т. е. в построенной подстановке ρ_1 элементы $1, 2, \dots, 2i-1$ располагаются на тех же позициях, что и в подстановке σ_0 .

Если $i+1 \leq k < \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, то для подстановки ρ_1 имеет место первый случай, который рассмотрен выше для подстановки σ , когда в ее записи элемент $2i-1$ стоит слева от $\sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)$. Для этого случая доказано

существование последовательности вида (8) с последней подстановкой, в записи которой элементы $1, 2, \dots, 2i-1$ расположены на тех же местах, что и в подстановке σ_0 .

В результате доказано, что в первой ситуации, когда минимальный элемент i подстановки σ нарушает первое из равенств (9), можно построить последовательность вида (8), для последней подстановки которой всегда имеет место только вторая ситуация.

Следовательно, для завершения доказательства леммы 1 осталось показать, что для подстановки $\sigma \neq \sigma_0$ и во второй ситуации (т. е. при $\sigma(n+1-i) \neq 2i$) существует последовательность вида (8), в последней подстановке которой минимальный элемент, нарушающий равенства (9), строго больше аналогичного элемента из σ .

Если имеет место $\sigma(n+1-i) \neq 2i$, где $1 \leq i < \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, то подстановка σ записывается как

$$\sigma = \left\langle 1, 3, \dots, 2i-3, 2i-1, \sigma(i+1), \dots, \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \dots, \sigma(n+1-i), 2i-2, \dots, 4, 2 \right\rangle.$$

Из приведенной записи σ видно, что элемент $2i$ может стоять между $2i-1$ и $\sigma(n+1-i)$ либо справа, либо слева от $\sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)$. Таким образом, для элемента $\ell = \sigma^{-1}(2i)$ возможны только два случая: $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil < \ell \leq n-i$

либо $i+1 \leq \ell \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. В первом случае $\ell = n+1-k$, где $i+1 \leq k < \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, и элемент $2i$ стоит справа от $\sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)$.

Следовательно, подстановка σ записывается как

$$\sigma = \left\langle 1, 3, \dots, 2i-3, 2i-1, \sigma(i+1), \dots, \sigma(k-1), \sigma(k), \dots, \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \dots, \right. \\ \left. 2i, \sigma(n+2-k), \dots, \sigma(n+1-i), 2i-2, \dots, 4, 2 \right\rangle.$$

Из данной записи σ видно, что $\sigma(k) > 2i = \sigma(\ell) = \sigma(n+1-k)$, так как $\sigma(k) \in N_{2i+1, n}$, т. е. $k \in I_{1,1}^\sigma$ и транспозиция $(k, n+1-k)$ входит в запись подстановки ψ_σ . Таким образом, в силу определения подмножества $I_{1,1}^\sigma$ из равенств (5) и независимости транспозиций, порождающих постановку ψ_σ , выполняются соотношения

$$\psi_\sigma(k) = n+1-k, \psi_\sigma(n+1-k) = k; \psi_\sigma(j) = j, \psi_\sigma(n+1-j) = n+1-j, j \notin I_{1,1}^\sigma,$$

из которых для подстановки $\rho_1 = \sigma \circ \psi_\sigma$ следует справедливость равенств

$$\rho_1(k) = \sigma(n+1-k) = 2i, \rho_1(n+1-k) = \sigma(k), \\ \rho_1(j) = \sigma(j), j \in N_{1,i}, \rho_1(n+1-j) = \sigma(n+1-j), j \in N_{1,i-1}.$$

Таким образом, подстановка $\rho_1 = \sigma \circ \psi_\sigma$ записывается как

$$\rho_1 = \left\langle 1, 3, \dots, 2i-3, 2i-1, \rho_1(i+1), \dots, \rho_1(k-1), 2i, \dots, \rho_1\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \dots, \right. \\ \left. \sigma(n+1-k), \rho_1(n+2-k), \dots, \rho_1(n+1-i), 2i-2, \dots, 4, 2 \right\rangle.$$

Из приведенной записи ρ_1 видно, что $\rho_1(k) = 2i < \rho_1(n+2-k)$, так как $\rho_1(n+2-k) \in N_{2i+1, n}$, т. е. $k \in I_{2,1}^\sigma$ и транспозиция $(k, n+2-k)$ входит в запись подстановки φ_{ρ_1} . В силу независимости транспозиций, порождающих подстановку φ_{ρ_1} , справедливости включения $k \in I_{2,1}^\sigma$ и равенств (5) для подстановки φ_{ρ_1} выполняются соотношения

$$\varphi_{\rho_1}(n+2-k) = k, \varphi_{\rho_1}(k) = n+2-k; \varphi_{\rho_1}(j) = j, \varphi_{\rho_1}(n+2-j) = n+2-j, j \notin I_{2,1}^\sigma,$$

из которых следует справедливость равенств

$$\rho_2(n+2-k) = \rho_1(k) = 2i, \rho_2(k) = \rho_1(n+2-k), \\ \rho_2(j) = \rho_1(j), j \in N_{1,i}, \rho_2(n+1-j) = \rho_1(n+1-j), j \in N_{1,i-1}.$$

Таким образом, подстановка ρ_2 записывается как

$$\rho_2 = \left\langle 1, 3, \dots, 2i-3, 2i-1, \rho_2(i+1), \dots, \rho_2(k-1), \rho_1(n+2-k), \dots, \rho_2\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \dots, \right. \\ \left. \rho_2(n+1-k), 2i, \dots, \rho_2(n+1-i), 2i-2, \dots, 4, 2 \right\rangle.$$

Поскольку $\ell = n+1-k$, то в записи ρ_2 элемент $2i$ стоит на $(n+2-k)$ -м месте. Следовательно, если $\ell+1 = n+2-k = n+1-i$, то построена подстановка ρ_2 , в записи которой элементы $1, 2, 3, \dots, 2i-1, 2i$ расположены на тех же местах, что и в подстановке σ_0 , т. е. минимальный элемент подстановки ρ_2 , нарушающий равенства (9), должен быть не меньше $i+1$. Таким образом, при $\ell+1 = n+1-i$ доказано существование последовательности подстановок $\sigma = \rho_0, \rho_1, \rho_2$, где

$$\rho_1 = \left\langle 1, 3, \dots, 2i-3, 2i-1, \rho_1(i+1), \dots, \rho_1(k-1), 2i, \dots, \rho_1\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \dots, \right. \\ \left. \sigma(n+1-k), \rho_1(n+2-k), \dots, \rho_1(n+1-i), 2i-2, \dots, 4, 2 \right\rangle,$$

а ρ_2 – подстановка указанного выше вида.

Если для $\ell + 1$ выполняются соотношения $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 < \ell + 1 < n + 1 - i$, то, начав с подстановки ρ_2 и проделав еще $n - i - \ell$ аналогичных преобразований, получим последовательность подстановок $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{2(n-i-\ell)-1}, \rho_{2(n-i-\ell)}$ вида (8), при этом в записи последней подстановки $\rho_{2(n-i-\ell)}$ элементы $1, 2, 3, \dots, 2i - 1, 2i$ будут стоять на тех же местах, что и в подстановке σ_0 . Таким образом, минимальный элемент подстановки $\rho_{2(n-i-\ell)}$, нарушающий равенства (9), будет не меньше $i + 1$.

Осталось рассмотреть второй случай, когда $i + 1 \leq \ell = \sigma^{-1}(2i) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ и ℓ стоит слева от $\sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)$ в записи подстановки σ (при этом допускается равенство $\sigma(\ell) = \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)$). В данном случае подстановка σ имеет вид

$$\sigma = \left\langle 1, 3, \dots, 2i - 3, 2i - 1, \sigma(i + 1), \dots, \sigma(\ell - 1), 2i, \dots, \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \dots, \right. \\ \left. \sigma(n + 1 - \ell), \sigma(n + 2 - \ell), \dots, \sigma(n + 1 - i), 2i - 2, \dots, 4, 2 \right\rangle.$$

Так как $\sigma(n + 2 - \ell) \in N_{2i+1, n}$, то выполняются соотношения $\sigma(\ell) = 2i < \sigma(n + 2 - \ell)$, из которых следует, что транспозиция $(\ell, n + 2 - \ell)$ входит в разложение подстановки φ_σ . Таким образом, в силу независимости транспозиций, порождающих подстановку φ_σ , справедливости включения $N_{1, i} \subseteq N_{1, n} \setminus (I_{2,1}^\sigma \cup I_{2,2}^\sigma)$ и формулы (4) для подстановки φ_σ выполняются соотношения

$$\varphi_\sigma(n + 2 - \ell) = \ell, \quad \varphi_\sigma(\ell) = n + 2 - \ell; \quad \varphi_\sigma(j) = j, \quad \varphi_\sigma(n + 2 - j) = n + 2 - j, \quad j \notin I_{2,1}^\sigma.$$

Полученные соотношения и цепочка включений $N_{1, i-1} \subset N_{1, i} \subseteq N_{1, n} \setminus (I_{2,1}^\sigma \cup I_{2,2}^\sigma)$ показывают, что для подстановки $\rho_1 = \sigma \circ \varphi_\sigma$ справедливы равенства

$$\rho_1(n + 2 - \ell) = \sigma(\ell) = 2i, \quad \rho_1(\ell) = \sigma(n + 2 - \ell), \\ \rho_1(j) = \sigma(j), \quad j \in N_{1, i}, \quad \rho_1(n + 1 - j) = \sigma(n + 1 - j), \quad j \in N_{1, i-1},$$

которые допускают следующую запись подстановки ρ_1 :

$$\rho_1 = \left\langle 1, 3, \dots, 2i - 3, 2i - 1, \rho_1(i + 1), \dots, \rho_1(\ell - 1), \sigma(n + 2 - \ell), \dots, \rho_1\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \dots, \right. \\ \left. \rho_1(n + 1 - \ell), 2i, \dots, \rho_1(n + 1 - i), 2i - 2, \dots, 4, 2 \right\rangle.$$

Из приведенной записи подстановки ρ_1 видно, что для нее имеет место первый случай, рассмотренный выше для подстановки σ , когда элемент $2i$ стоит справа от $\sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)$ в записи σ . Для этого случая доказано существование последовательности вида (8), последняя подстановка которой имеет минимальный элемент, нарушающий равенства (9), не меньший $i + 1$.

В итоге доказано, что во всех возможных случаях для любой подстановки $\sigma \neq \sigma_0$ с минимальным элементом i , нарушающим равенства (9), существует последовательность вида (8), в последней подстановке которой минимальным элементом является число, не меньшее $i + 1$. Лемма 1 доказана.

С помощью леммы 1 доказывается следующее утверждение, в котором приводятся достаточные условия достижения минимума функционала $f_A(\sigma)$ на подстановке σ_0 .

Лемма 2. Если для любой подстановки $\sigma \in S_n$ выполняются неравенства

$$\Delta f_A(\sigma, \sigma \circ \psi_\sigma) \leq 0, \quad \Delta f_A(\sigma, \sigma \circ \varphi_\sigma) \leq 0, \quad (11)$$

то подстановка $\sigma_0 = \langle 1, 3, 5, \dots, n, \dots, 6, 4, 2 \rangle$ минимизирует функционал $f_A(\sigma)$ на симметрической группе S_n .

Доказательство. Для любой подстановки σ в силу леммы 1 существует такая конечная последовательность подстановок $\sigma = \rho_0, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{\ell-1}, \rho_\ell, \dots, \rho_k = \sigma_0$, что $\rho_\ell = \rho_{\ell-1} \circ \psi_{\rho_{\ell-1}}$ либо $\rho_\ell = \rho_{\ell-1} \circ \varphi_{\rho_{\ell-1}}$

для всех $\ell = 1, 2, \dots, k$. Непосредственная проверка показывает, что для этой последовательности имеет место равенство

$$f_A(\sigma_0) - f_A(\sigma) = \sum_{\ell=1}^k \Delta f_A(\rho_{\ell-1}, \rho_{\ell-1} \circ \omega_{\ell-1}), \quad (12)$$

где $\rho_0 = \sigma$, $\rho_k = \sigma_0$ и $\omega_{\ell-1} = \psi_{\rho_{\ell-1}}$ либо $\omega_{\ell-1} = \varphi_{\rho_{\ell-1}}$. Так как в силу неравенств (11) приращение для любых пар подстановок $\sigma, \sigma \circ \psi_\sigma$ и $\sigma, \sigma \circ \varphi_\sigma$ неположительно, то для пар соседних подстановок $\rho_{\ell-1}, \rho_{\ell-1} \circ \omega_{\ell-1}$ указанной последовательности должны выполняться неравенства $\Delta f(\rho_{\ell-1}, \rho_{\ell-1} \circ \omega_{\ell-1}) \leq 0$ для всех $\ell = 1, 2, \dots, k$. Следствием последних неравенств и равенства (12) является неравенство $f(\sigma_0) \leq f(\sigma)$. Лемма 2 доказана.

Строгая разрешимость квадратичной задачи выбора

Назовем частичной суммой функционала $f_A(\sigma)$ часть его слагаемых, определяемых парами $\langle i, j \rangle$ декартова произведения $I \times J$ двух непересекающихся либо совпадающих подмножеств I, J , т. е. сумму вида

$$f_A(\sigma; I \times J) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{i,j,\sigma(i),\sigma(j)}. \quad (13)$$

Лемма 3. Для любой пары подстановок σ, σ_ψ приращение $\Delta f_A(\sigma, \sigma_\psi)$ неположительно, если элементы матрицы $A = (a_{i,j,k,\ell})$ удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} & a_{i,j,m,\ell} + a_{i,n+1-j,m,q} + a_{n+1-i,j,p,\ell} + a_{n+1-i,n+1-j,p,q} - \\ & - a_{i,j,p,q} - a_{i,n+1-j,p,\ell} - a_{n+1-i,j,m,q} - a_{n+1-i,n+1-j,m,\ell} \leq 0 \end{aligned} \quad (14)$$

при четном n , где $1 \leq i, j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, 1 \leq m < p \leq n, 1 \leq \ell < q \leq n$,

$$\begin{aligned} & a_{i,k,m,\ell} + a_{i,n+1-k,m,q} + a_{n+1-i,k,p,\ell} + a_{n+1-i,n+1-k,p,q} - \\ & - a_{k,i,p,\ell} - a_{k,n+1-i,p,q} - a_{n+1-k,i,m,\ell} - a_{n+1-k,n+1-i,m,q} \leq 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & a_{i,j,m,\ell} + a_{i,n+1-j,m,q} + a_{n+1-i,j,p,\ell} + a_{n+1-i,n+1-j,p,q} - \\ & - a_{i,j,m,q} - a_{i,n+1-j,m,\ell} - a_{n+1-i,j,p,q} - a_{n+1-i,n+1-j,p,\ell} \leq 0 \end{aligned} \quad (16)$$

при четном n , где m, ℓ, p, q – попарно различные индексы, $1 \leq i, k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, 1 \leq m < p \leq n, 1 \leq \ell < q \leq n$, и дополнительно неравенствам

$$\begin{aligned} & a_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, j, p, \ell} + a_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, n+1-j, p, q} + a_{j, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \ell, p} + a_{n+1-j, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, q, p} - \\ & - a_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, j, p, q} - a_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, n+1-j, p, \ell} - a_{j, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, q, p} - a_{n+1-j, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \ell, p} \leq 0 \end{aligned} \quad (17)$$

при нечетном n , где ℓ, p, q – попарно различные индексы, $1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, 1 \leq \ell < q \leq n, 1 \leq p \leq n$.

Доказательство. Подмножества $I_{1,r}^\sigma, r = 1, 2, 3, 4$, вида (2), определяемые любой подстановкой σ , в силу свойства (i) являются разбиением множества $N_{1,n}$ при четном n и множества $N_{1,n} \setminus \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ при нечетном n . Таким образом, подмножества $I_{1,r}^\sigma \times I_{1,s}^\sigma, r, s = 1, 2, 3, 4$, при четном n и дополнительно подмножества $I_{1,r}^\sigma \times \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, r = 1, 2, 3, 4$, при нечетном n являются разбиением декартова произведения $N_{1,n} \times N_{1,n}$. В силу этого с учетом равенства $f_A(\sigma) = f_A(\sigma; N_{1,n} \times N_{1,n})$ имеем

$$f_A(\sigma) = \begin{cases} \sum_{r=1}^4 \sum_{s=1}^4 f_A(\sigma; I_{1,r}^\sigma \times I_{1,s}^\sigma), & \text{если } n \text{ четное,} \\ \sum_{r=1}^4 \sum_{s=1}^4 f_A(\sigma; I_{1,r}^\sigma \times I_{1,s}^\sigma) + \sum_{r=1}^4 \left(f_A\left(\sigma; I_{1,r}^\sigma \times \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + f_A\left(\sigma; \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \times I_{1,r}^\sigma\right) \right), & \text{если } n \text{ нечетное.} \end{cases} \quad (18)$$

Для пары подстановок $\sigma, \sigma_\psi = \sigma \circ \psi_\sigma$ и подмножеств $I_{1,r}^\sigma, I_{1,s}^\sigma, r, s = 3, 4$, из равенств (5) и формулы (7) следуют соотношения $\sigma_\psi(i) = \sigma(\psi_\sigma(i)) = \sigma(i), i \in I_{1,3}^\sigma \cup I_{1,4}^\sigma$, при четном n и дополнительно соотношения $\sigma_\psi\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) = \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)$ при нечетном n . Таким образом, для указанных подстановок и подмножеств при $r, s = 3, 4$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} f_A(\sigma_\psi; I_{1,r}^\sigma \times I_{1,s}^\sigma) - f_A(\sigma; I_{1,r}^\sigma \times I_{1,s}^\sigma) &= \sum_{i \in I_{1,r}^\sigma} \sum_{j \in I_{1,s}^\sigma} a_{i,j, \sigma_\psi(i), \sigma_\psi(j)} - \sum_{i \in I_{1,r}^\sigma} \sum_{j \in I_{1,s}^\sigma} a_{i,j, \sigma(i), \sigma(j)} = 0, \\ f_A\left(\sigma_\psi; \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \times I_{1,s}^\sigma\right) - f_A\left(\sigma; \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \times I_{1,s}^\sigma\right) &= \sum_{i \in I_{1,s}^\sigma} a_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, i, \sigma_\psi\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \sigma_\psi(i)} - \sum_{i \in I_{1,s}^\sigma} a_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, i, \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \sigma(i)} = 0, \\ f_A\left(\sigma_\psi; I_{1,s}^\sigma \times \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) - f_A\left(\sigma; I_{1,s}^\sigma \times \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) &= \sum_{i \in I_{1,s}^\sigma} a_{i, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \sigma_\psi\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \sigma_\psi(i)} - \sum_{i \in I_{1,s}^\sigma} a_{i, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \sigma\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \sigma(i)} = 0. \end{aligned}$$

Из данных равенств и формулы (18) следует, что приращение функционала (1) на паре подстановок σ, σ_ψ при четном n представимо в виде суммы

$$\begin{aligned} \Delta f_A(\sigma, \sigma_\psi) &= \sum_{r=1}^2 \sum_{s=1}^2 \left(f_A(\sigma_\psi; I_{1,r}^\sigma \times I_{1,s}^\sigma) - f_A(\sigma; I_{1,r}^\sigma \times I_{1,s}^\sigma) \right) + \\ &+ \sum_{r=1}^2 \sum_{s=3}^4 \left(f_A(\sigma_\psi; I_{1,r}^\sigma \times I_{1,s}^\sigma) - f_A(\sigma; I_{1,r}^\sigma \times I_{1,s}^\sigma) \right) + \\ &+ \sum_{r=3}^4 \sum_{s=1}^2 \left(f_A(\sigma_\psi; I_{1,r}^\sigma \times I_{1,s}^\sigma) - f_A(\sigma; I_{1,r}^\sigma \times I_{1,s}^\sigma) \right). \end{aligned} \quad (19)$$

При нечетном n эта сумма дополняется слагаемыми

$$\sum_{s=1}^2 \left(\left(f_A\left(\sigma_\psi; \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \times I_{1,s}^\sigma\right) - f_A\left(\sigma; \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \times I_{1,s}^\sigma\right) \right) + \left(f_A\left(\sigma_\psi; I_{1,s}^\sigma \times \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) - f_A\left(\sigma; I_{1,s}^\sigma \times \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) \right) \right).$$

С помощью равенства (13) выписываем в явном виде частичные суммы правой части равенства (19). Далее, используя взаимосвязь подмножеств $I_{1,r}^\sigma$ и $I_{1,s}^\sigma$, определяемую формулами (2), а также равенства (5) и группируя слагаемые с одинаковыми знаками, получаем выражение приращения $\Delta f_A(\sigma, \sigma_\psi)$ функционала при четном n в виде следующих двойных сумм:

$$\begin{aligned} &\sum_{i \in I_{1,1}^\sigma} \sum_{j \in I_{1,1}^\sigma} \left(a_{i,j, \sigma(n+1-i), \sigma(n+1-j)} + a_{i, n+1-j, \sigma(n+1-i), \sigma(j)} + \right. \\ &+ a_{n+1-i, j, \sigma(i), \sigma(n+1-j)} + a_{n+1-i, n+1-j, \sigma(i), \sigma(j)} - a_{i, j, \sigma(i), \sigma(j)} - \\ &- a_{i, n+1-j, \sigma(i), \sigma(n+1-j)} - a_{n+1-i, j, \sigma(n+1-i), \sigma(j)} - a_{n+1-i, n+1-j, \sigma(n+1-i), \sigma(n+1-j)} \left. \right), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{i \in I_{1,1}^\sigma} \sum_{k \in I_{1,3}^\sigma} \left(a_{i,k, \sigma(n+1-i), \sigma(k)} + a_{i, n+1-k, \sigma(n+1-i), \sigma(n+1-k)} + \right. \\ &+ a_{n+1-i, k, \sigma(i), \sigma(k)} + a_{n+1-i, n+1-k, \sigma(i), \sigma(n+1-k)} - a_{i, k, \sigma(i), \sigma(k)} - \\ &- a_{i, n+1-k, \sigma(i), \sigma(n+1-k)} - a_{n+1-i, k, \sigma(n+1-i), \sigma(k)} - a_{n+1-i, n+1-k, \sigma(n+1-i), \sigma(n+1-k)} \left. \right), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{k \in I_{1,3}^\sigma} \sum_{i \in I_{1,1}^\sigma} \left(a_{k,i, \sigma(k), \sigma(n+1-i)} + a_{k, n+1-i, \sigma(k), \sigma(i)} + \right. \\ &+ a_{n+1-k, i, \sigma(n+1-k), \sigma(n+1-i)} + a_{n+1-k, n+1-i, \sigma(n+1-k), \sigma(i)} - a_{k, i, \sigma(k), \sigma(i)} - \\ &- a_{k, n+1-i, \sigma(k), \sigma(n+1-i)} - a_{n+1-k, i, \sigma(n+1-k), \sigma(i)} - a_{n+1-k, n+1-i, \sigma(n+1-k), \sigma(n+1-i)} \left. \right). \end{aligned} \quad (22)$$

При нечетном n к указанным суммам добавляется сумма вида

$$\begin{aligned} \sum_{j \in I_{1,1}^{\sigma}} & \left(a_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, j, \sigma\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right), \sigma(n+1-j)} + a_{j, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \sigma(n+1-j), \sigma\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)} + a_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, n+1-j, \sigma\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right), \sigma(j)} + \right. \\ & + a_{n+1-j, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \sigma(j), \sigma\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)} - a_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, j, \sigma\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right), \sigma(j)} - a_{j, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \sigma(j), \sigma\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)} - \\ & \left. - a_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, n+1-j, \sigma\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right), \sigma(n+1-j)} - a_{n+1-j, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \sigma(n+1-j), \sigma\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Слагаемые сумм (20)–(23), стоящие в скобках, далее называются общими членами.

Полагая, что $m = \sigma(n+1-i)$, $\ell = \sigma(n+1-j)$, $p = \sigma(i)$, $q = \sigma(j)$, нетрудно убедиться в том, что общий член суммы (20) совпадает с левой частью неравенства (14) из условий леммы 3. Действительно, в силу определения $I_{1,1}^{\sigma}$ для четверки m, ℓ, p, q справедливы соотношения $1 \leq i, j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ и $1 \leq m < p \leq n$, $1 \leq \ell < q \leq n$, которые гарантируют выполнение неравенства (14), что влечет неположительность общего члена суммы (20) и, следовательно, всей этой суммы.

Полагая, что $m = \sigma(n+1-i)$, $\ell = \sigma(k)$, $p = \sigma(i)$, $q = \sigma(n+1-k)$, убеждаемся в том, что общие члены сумм (21) и (22) совпадают с левыми частями неравенств (15) и (16) соответственно. Так как в силу подмножеств (2) для $i \in I_{1,1}^{\sigma}$ и $k \in I_{1,2}^{\sigma}$ справедливы соотношения $1 \leq i, k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, а элементы введенной четверки m, ℓ, p, q попарно различны, то для них гарантируется выполнение неравенств (15) и (16). Следовательно, общие члены сумм (21) и (22) не превосходят нуля, что влечет неположительность этих сумм. Доказана справедливость леммы 3 при четном n .

Для завершения доказательства леммы 3 достаточно убедиться в неположительности суммы (23).

Из подмножеств (2) следует, что для произвольного $i \in I_{1,1}^{\sigma}$ справедливы соотношения $1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ и $\sigma(j) > \sigma(n+1-j)$. Полагая, что $\ell = \sigma(n+1-j)$, $q = \sigma(j)$, $p = \sigma\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$, убеждаемся в том, что общий член суммы (23) совпадает с левой частью неравенства (17), выполнение которого обеспечивают соотношения $1 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, $1 \leq \ell < q \leq n$, $1 \leq p \leq n$ и попарное различие индексов ℓ, p, q . Следовательно, общий член суммы (23) не превосходит нуля, что гарантирует неположительность этой суммы. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Для любой пары подстановок σ, σ_{ϕ} приращение $\Delta f_A(\sigma, \sigma_{\phi}) \leq 0$ неположительно, если элементы матрицы $A = (a_{i,j,k,\ell})$ удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} & a_{i,j,q,p} + a_{i,n+2-j,q,m} + a_{n+2-i,j,\ell,p} + a_{n+2-i,n+2-j,\ell,m} - \\ & - a_{i,j,\ell,m} - a_{i,n+2-j,\ell,p} - a_{n+2-i,j,q,m} - a_{n+2-i,n+2-j,q,p} \leq 0 \end{aligned} \quad (24)$$

при нечетном n , где $2 \leq i, j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, $1 \leq m < p \leq n$, $1 \leq \ell < q \leq n$,

$$\begin{aligned} & a_{i,j,p,q} + a_{i,n+2-j,p,\ell} + a_{n+2-i,j,m,q} + a_{n+2-i,n+2-j,m,\ell} - \\ & - a_{i,j,m,q} - a_{i,n+2-j,m,\ell} - a_{n+2-i,j,p,q} - a_{n+2-i,n+2-j,p,\ell} \leq 0, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & a_{i,j,q,p} + a_{i,n+2-j,q,m} + a_{n+2-i,j,\ell,p} + a_{n+2-i,n+2-j,\ell,m} - \\ & - a_{i,j,q,m} - a_{i,n+2-j,q,p} - a_{n+2-i,j,\ell,m} - a_{n+2-i,n+2-j,\ell,p} \leq 0, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & a_{1,j,\ell,p} + a_{1,n+2-j,\ell,m} + a_{j,1,p,\ell} + a_{n+2-j,1,p,\ell} - \\ & - a_{1,j,\ell,m} - a_{1,n+2-j,\ell,p} - a_{j,1,m,\ell} - a_{n+2-j,1,m,\ell} \leq 0 \end{aligned} \quad (27)$$

при нечетном n , где m, ℓ, p, q – попарно различные индексы, $2 \leq i, j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, $1 \leq m < p \leq n$, $1 \leq \ell < q \leq n$, и дополнительно неравенствам

$$\begin{aligned} & a_{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, j, \ell, p} + a_{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, n+2-j, \ell, m} + a_{j, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, p, \ell} + a_{n+2-j, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, m, \ell} - \\ & - a_{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, j, \ell, m} - a_{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, n+2-j, \ell, p} - a_{j, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, m, \ell} - a_{n+2-j, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, p, \ell} \leq 0 \end{aligned} \quad (28)$$

при четном n , где m, ℓ, p – попарно различные индексы, $2 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, $1 \leq m < p \leq n$, $1 \leq \ell \leq n$.

Доказательство. Подмножества $I_{2,r}^\sigma$, $r = 1, 2, 3, 4$, вида (3), определяемые подстановкой σ , в силу свойства (ii) являются разбиением множества $N_{2,n}$ при нечетном n и множества $N_{2,n} \setminus \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ при четном n . Таким образом, декартовы произведения этих подмножеств $I_{2,r}^\sigma \times I_{2,s}^\sigma$, $1 \times I_{2,r}^\sigma$, $I_{2,r}^\sigma \times 1$, $r, s = 1, 2, 3, 4$, при нечетном n и дополнительно декартовы произведения $I_{2,r}^\sigma \times \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$, $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \times I_{2,r}^\sigma$, $r = 1, 2, 3, 4$, при четном n являются разбиением $N_{1,n} \times N_{1,n}$. Следовательно, для произвольной подстановки $\sigma \in S_n$ частичная сумма $f_A(\sigma; N_{1,n} \times N_{1,n})$, равная значению функционала $f_A(\sigma)$, при нечетном n представима в виде суммы

$$f_A(\sigma) = \sum_{r=1}^4 \sum_{s=1}^4 f_A(\sigma; I_{2,r}^\sigma \times I_{2,s}^\sigma) + \sum_{r=1}^4 \left(f_A(\sigma; 1 \times I_{2,r}^\sigma) + f_A(\sigma; I_{2,r}^\sigma \times 1) \right). \quad (29)$$

При четном n эта сумма дополняется слагаемыми

$$\sum_{r=1}^4 \left(f_A\left(\sigma; I_{2,r}^\sigma \times \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right) + f_A\left(\sigma; \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \times I_{2,r}^\sigma\right) \right). \quad (30)$$

Для пары подстановок σ, σ_φ и подмножеств $I_{2,r}^\sigma, I_{2,s}^\sigma$, $r, s = 3, 4$, в силу формул (3) и равенств (6) выполняются соотношения $\sigma_\varphi(i) = \sigma(\varphi_\sigma(i)) = \sigma(i)$ для любых $i \in I_{2,3}^\sigma \cup I_{2,4}^\sigma$ при нечетном n и дополнительно соотношения $\sigma_\varphi\left(\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right) = \sigma\left(\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right)$ при четном n . Из приведенных соотношений и формул (29) и (30) вытекает, что при $r, s = 3, 4$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} & \sum_{r=3}^4 \sum_{s=3}^4 \left(f_A(\sigma_\varphi; I_{2,r}^\sigma \times I_{2,s}^\sigma) - f_A(\sigma; I_{2,r}^\sigma \times I_{2,s}^\sigma) \right) = 0, \\ & \sum_{r=3}^4 \left(f_A(\sigma_\varphi; 1 \times I_{2,r}^\sigma) + f_A(\sigma_\varphi; I_{2,r}^\sigma \times 1) - f_A(\sigma; 1 \times I_{2,r}^\sigma) - f_A(\sigma; I_{2,r}^\sigma \times 1) \right) = 0, \\ & \sum_{r=3}^4 \left(f_A\left(\sigma_\varphi; \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \times I_{2,r}^\sigma\right) + f_A\left(\sigma_\varphi; I_{2,r}^\sigma \times \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right) - \right. \\ & \left. - f_A\left(\sigma; \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \times I_{2,r}^\sigma\right) - f_A\left(\sigma; I_{2,r}^\sigma \times \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right) \right) = 0. \end{aligned}$$

Из полученных равенств следует, что при нечетном n приращение функционала (1), определяемое равенствами (29) и (30), на паре подстановок σ, σ_φ представимо в виде суммы

$$\begin{aligned} \Delta f_A(\sigma; \sigma_\varphi) &= \sum_{r=1}^2 \sum_{s=1}^2 \left(f_A(\sigma_\varphi; I_{2,r}^\sigma \times I_{2,s}^\sigma) - f_A(\sigma; I_{2,r}^\sigma \times I_{2,s}^\sigma) \right) + \\ &+ \sum_{r=1}^2 \sum_{s=3}^4 \left(f_A(\sigma_\varphi; I_{2,r}^\sigma \times I_{2,s}^\sigma) - f_A(\sigma; I_{2,r}^\sigma \times I_{2,s}^\sigma) \right) + \sum_{r=3}^4 \sum_{s=1}^2 \left(f_A(\sigma_\varphi; I_{2,r}^\sigma \times I_{2,s}^\sigma) - f_A(\sigma; I_{2,r}^\sigma \times I_{2,s}^\sigma) \right) + \\ &+ \sum_{s=1}^2 \left(f_A(\sigma_\varphi; 1 \times I_{2,s}^\sigma) - f_A(\sigma; 1 \times I_{2,s}^\sigma) \right) + \sum_{s=1}^2 \left(f_A(\sigma_\varphi; I_{2,s}^\sigma \times 1) - f_A(\sigma; I_{2,s}^\sigma \times 1) \right). \end{aligned} \quad (31)$$

При четном n эта сумма дополняется суммой следующего вида:

$$\sum_{s=1}^2 \left(\left(f_A \left(\sigma_\varphi; \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil \times I_{2,s}^\sigma \right) - f_A \left(\sigma; \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil \times I_{2,s}^\sigma \right) \right) + \right. \\ \left. + \left(\left(f_A \left(\sigma_\varphi; I_{2,s}^\sigma \times \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil \right) \right) - f_A \left(\sigma; I_{2,s}^\sigma \times \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil \right) \right) \right). \quad (32)$$

Далее доказательство проводится по аналогии с доказательством леммы 3. Вначале с помощью равенства (13) выписываем в явном виде разности частичных сумм, входящих в формулы (31) и (32). Затем, используя взаимосвязь подмножеств $I_{2,r}^\sigma$ и $I_{2,s}^\sigma$, $s \neq r$, определяемую равенствами (6), и группируя слагаемые с одинаковыми знаками, получаем выражение приращения $\Delta f_A(\sigma, \sigma_\varphi)$ в виде суммы двойных сумм. Общие члены таких двойных сумм совпадают с левыми частями неравенств (24)–(28), а индексы элементов соответствующих матриц удовлетворяют соотношениям, гарантирующим выполнение указанных неравенств. Доказана неположительность всех общих членов и, соответственно, двойных сумм, определяющих приращение функционала (1) на паре подстановок σ, σ_φ . Лемма 4 доказана.

Из лемм 3 и 4 непосредственно вытекает следующий основной результат.

Теорема. Подстановка $\sigma_0 = \langle 1, 3, 5, \dots, n, \dots, 6, 4, 2 \rangle$ минимизирует функционал квадратичной задачи выбора $f_A(\sigma)$ на симметрической группе S_n , если элементы матрицы $A = (a_{i,j,k,\ell})$ удовлетворяют неравенствам (14)–(17) и (24)–(28).

Выделенные условия строгой разрешимости квадратичной задачи выбора обобщают все ранее полученные условия достижения на подстановке σ_0 минимума квадратичной и билинейной форм, а также функционала квадратичной задачи о назначениях, которые приведены в работах [5–10].

Заключение

В работе продолжено исследование строго разрешимых случаев оптимизационных задач на подстановках. В частности, для квадратичной задачи выбора в виде системы неравенств описаны условия, обеспечивающие достижение минимума ее функционала на заданной подстановке, которая впервые была приведена в теореме о перестановке трех систем. Предложенные условия обобщают на сегодняшний день аналогичные результаты, связанные с теоремой о перестановке трех систем.

Библиографические ссылки

1. Харди ГХ, Литлвуд Джи, Полиа Г. *Неравенства*. Левин ВИ, переводчик. Москва: Государственное издательство иностранной литературы; 1948. 456 с.
2. Тимофеев ББ, Литвинов ВА. К вопросу об организации размещения массивов информации в памяти на магнитных лентах. *Кибернетика*. 1969;4:56–61.
3. Pratt VR. An $N \log N$ algorithm to distribute N records optimally in a sequential access file. In: Miller RE, Thatcher JW, editors. *Complexity of computer computations. Proceedings of a symposium on the complexity of computer computations, held March 20–22, 1972, at the IBM Thomas J. Watson Research Center, Yorktown Heights, New York, and sponsored by the Office of Naval Research, Mathematics Program, IBM World Trade Corporation, and the IBM Research Mathematical Sciences Department*. New York: Plenum Press; 1972. p. 111–118 (The IBM research symposia series). DOI: 10.1007/978-1-4684-2001-2_11.
4. Lawler EL. The quadratic assignment problem: a brief review. In: Roy B, editor. *Combinatorial programming: methods and applications. Proceedings of the NATO advanced study institute held at the Palais des Congrès, Versailles, France, 2–13 September, 1974*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company; 1975. p. 351–360 (NATO advanced study institutes series. Series C, Mathematical and physical sciences; volume 19). DOI: 10.1007/978-94-011-7557-9_20.
5. Vickson RG, Lu Xinjian. Optimal product and server locations in one-dimensional storage racks. *European Journal of Operational Research*. 1998;105(1):18–28. DOI: 10.1016/S0377-2217(97)00023-4.
6. Woeginger GJ. Computational problems without computation. *Nieuw Archief voor Wiskunde. Vijfde Serie*. 2003;4(2):140–147.
7. Demidenko VM, Finke G, Gordon VS. Well solvable cases of the quadratic assignment problem with monotone and bimotone matrices. *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms*. 2006;5(2):167–187. DOI: 10.1007/s10852-005-9013-2.
8. Demidenko VM. Quadratic assignment problem with additively monotone matrices and incomplete anti-Monge matrices: conditions for effective solvability. *Discrete Mathematics and Applications*. 2007;17(2):105–133. DOI: 10.1515/dma.2007.011.
9. Демиденко ВМ, Долгий А. Эффективно разрешимые случаи квадратичной задачи о назначениях с обобщенно монотонными и неполными матрицами анти-Монжа. *Кибернетика и системный анализ*. 2007;1:135–151.
10. Burkard RE, Çela E, Rote G, Woeginger GJ. The quadratic assignment problem with a monotone anti-Monge and a symmetric Toeplitz matrix: easy and hard cases. *Mathematical Programming*. 1998;82:125–158. DOI: 10.1007/BF01585868.
11. Çela E. Assignment problems. In: Pardalos PM, Resende MGC, editors. *Handbook of applied optimization*. Oxford: Oxford University Press; 2002. p. 661–678.
12. Burkard R, Dell’Amico M, Martello S. *Assignment problems: revised reprint*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics; 2009. XXII, 393 p. (Other titles in applied mathematics). DOI: 10.1137/1.9781611972238.

References

1. Hardy GH, Littlewood JE, Pólya G. *Inequalities*. Cambridge: Cambridge University Press; 1934. XII, 314 p.
Russian edition: Hardy GH, Littlewood JE, Pólya G. *Neravenstva*. Levin VI, translator. Moscow: Gosudarstvennoe izdatel'stvo inostrannoi literatury; 1948. 456 p.
2. Timofeev BB, Litvinov VA. [On the problem of organizing the disposition of information files on magnetic tapes]. *Kibernetika*. 1969;4:56–61. Russian.
3. Pratt VR. An $N \log N$ algorithm to distribute N records optimally in a sequential access file. In: Miller RE, Thatcher JW, editors. *Complexity of computer computations. Proceedings of a symposium on the complexity of computer computations, held March 20–22, 1972, at the IBM Thomas J. Watson Research Center, Yorktown Heights, New York, and sponsored by the Office of Naval Research, Mathematics Program, IBM World Trade Corporation, and the IBM Research Mathematical Sciences Department*. New York: Plenum Press; 1972. p. 111–118 (The IBM research symposia series). DOI: 10.1007/978-1-4684-2001-2_11.
4. Lawler EL. The quadratic assignment problem: a brief review. In: Roy B, editor. *Combinatorial programming: methods and applications. Proceedings of the NATO advanced study institute held at the Palais des Congrès, Versailles, France, 2–13 September, 1974*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company; 1975. p. 351–360 (NATO advanced study institutes series. Series C, Mathematical and physical sciences; volume 19). DOI: 10.1007/978-94-011-7557-9_20.
5. Vickson RG, Lu Xinjian. Optimal product and server locations in one-dimensional storage racks. *European Journal of Operational Research*. 1998;105(1):18–28. DOI: 10.1016/S0377-2217(97)00023-4.
6. Woeginger GJ. Computational problems without computation. *Nieuw Archief voor Wiskunde. Vijfde Serie*. 2003;4(2):140–147.
7. Demidenko VM, Finke G, Gordon VS. Well solvable cases of the quadratic assignment problem with monotone and bimonotone matrices. *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms*. 2006;5(2):167–187. DOI: 10.1007/s10852-005-9013-2.
8. Demidenko VM. Quadratic assignment problem with additively monotone matrices and incomplete anti-Monge matrices: conditions for effective solvability. *Discrete Mathematics and Applications*. 2007;17(2):105–133. DOI: 10.1515/dma.2007.011.
9. Demidenko VM, Dolgiy A. [Efficiently solvable cases of a quadratic assignment problem with generalized monotonic and incomplete anti-Monge matrices]. *Kibernetika i sistemnyi analiz*. 2007;1:135–151. Russian.
10. Burkard RE, Çela E, Rote G, Woeginger GJ. The quadratic assignment problem with a monotone anti-Monge and a symmetric Toeplitz matrix: easy and hard cases. *Mathematical Programming*. 1998;82:125–158. DOI: 10.1007/BF01585868.
11. Çela E. Assignment problems. In: Pardalos PM, Resende MGC, editors. *Handbook of applied optimization*. Oxford: Oxford University Press; 2002. p. 661–678.
12. Burkard R, Dell'Amico M, Martello S. *Assignment problems: revised reprint*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics; 2009. XXII, 393 p. (Other titles in applied mathematics). DOI: 10.1137/1.9781611972238.

Получена 03.01.2024 / исправлена 14.02.2024 / принята 14.02.2024.
Received 03.01.2024 / revised 14.02.2024 / accepted 14.02.2024.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

THEORETICAL FOUNDATIONS OF COMPUTER SCIENCE

УДК 004.93

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ГЛУБОКОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ СЕГМЕНТАЦИИ ЯДЕР КЛЕТОК НА ИММУНОГИСТОХИМИЧЕСКИХ ФЛЮОРЕСЦЕНТНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЯХ РАКОВЫХ ТКАНЕЙ

СЮЙ СЫЛУНЬ¹⁾, В. В. СКАКУН¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Аннотация. Анализ гистологических и иммуногистохимических изображений составляет основу диагностики многих видов раковых заболеваний. Процессу автоматизации анализа цифровых изображений, в частности сегментации ядер клеток на них, сегодня уделяется особое внимание. Благодаря отличной производительности нейронных сетей глубокого обучения и сравнительно высокому уровню достоверности получаемых результатов появляется возможность сочетать ручную и автоматизированную обработку изображений. К настоящему времени создано множество архитектур нейронных сетей для сегментации объектов на изображениях. Однако большая вариабельность изображений раковых клеток не позволяет создать универсальный алгоритм для сегментации

Образец цитирования:

Сюй Сылунь, Скакун ВВ. Сравнительный анализ нейронных сетей глубокого обучения для сегментации ядер клеток на иммуногистохимических флуоресцентных изображениях раковых тканей. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2024;1:59–70. EDN: TOOSJI

For citation:

Xu Silun, Skakun VV. Comparative analysis of deep learning neural networks for the segmentation of cancer cell nuclei on immunohistochemical fluorescent images. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2024;1: 59–70. Russian. EDN: TOOSJI

Авторы:

Сюй Сылунь – соискатель кафедры системного анализа и компьютерного моделирования факультета радиопизики и компьютерных технологий. Научный руководитель – В. В. Скакун.

Виктор Васильевич Скакун – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры системного анализа и компьютерного моделирования факультета радиопизики и компьютерных технологий.

Authors:

Xu Silun, competitor at the department of system analysis and computer simulation, faculty of radiophysics and computer technologies.

xusilun@hotmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-1356-0897>

Viktor V. Skakun, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of system analysis and computer simulation, faculty of radiophysics and computer technologies. skakun.victor@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0003-0880-4188>

ядер клеток на изображениях разного вида тканей, полученных с помощью различных методик. В работе проведен сравнительный анализ архитектур нейронных сетей глубокого обучения для сегментации ядер клеток на иммуногистохимических флуоресцентных изображениях срезов раковой ткани молочной железы. Установлено, что сети, основанные на архитектуре U-Net, дают стабильно хорошие результаты. Наилучшее качество сегментации продемонстрировала архитектура UNet 3+.

Ключевые слова: иммуногистохимические изображения; изображения раковых клеток; сегментация ядер; нейронные сети; глубокое обучение; U-Net.

COMPARATIVE ANALYSIS OF DEEP LEARNING NEURAL NETWORKS FOR THE SEGMENTATION OF CANCER CELL NUCLEI ON IMMUNOHISTOCHEMICAL FLUORESCENT IMAGES

XU SILUN^a, V. V. SKAKUN^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: Xu Silun (xusilun@hotmail.com)

Abstract. The analysis of histological and immunohistochemical images forms the basis for the diagnosis of many types of cancer. The process of automating the analysis of digital images, in particular, the segmentation of cell nuclei on them, is of great attention recently. Due to the excellent performance of deep learning neural networks and the relatively high level of reliability of the obtained results, it becomes possible to combine manual and automated image processing. To date, many neural network architectures have been created for segmenting objects in images. However, the high variability of images of cancer cells does not allow creating an universal algorithm for segmenting the cells nuclei on images of different types of tissues obtained using different techniques. In this paper, a comparative analysis of the architectures of deep learning neural networks for segmentation of cancer cell nuclei on immunohistochemical fluorescent images of breast cancer was carried out. It was established that networks based on the U-Net architecture give consistently good results. The UNet 3+ architecture showed the best segmentation quality.

Keywords: immunohistochemical images; cancer cells images; nuclear segmentation; neural networks; deep learning; U-Net.

Введение

В настоящее время цифровая обработка изображений стала неотъемлемой частью медицинской диагностики и оказалась востребованной для очень широкого круга ее приложений. Анализ гистологических и иммуногистохимических изображений составляет основу диагностики многих видов раковых заболеваний [1–3]. Важным этапом в процессе анализа данного типа изображений является их сегментация. В медицинских исследованиях сегментация изображений позволяет разделять различные виды тканей, а также органы, части скелета и иные объекты путем выделения и классификации их признаков. Например, цель многих исследований патологии раковых опухолей состоит в том, чтобы сегментировать раковые клетки, строму и прочие интересующие исследователей области на изображениях срезов ткани [4].

В диагностике раковых заболеваний очень востребованным является выделение ядер как раковых, так и здоровых клеток, позволяющее количественно оценить степень развития патологии [5]. Задача сегментации ядер клеток сводится к задаче семантической сегментации, когда необходимо определить, что каждый пиксел изображения принадлежит либо ядру клетки, либо другим ее частям. Данная задача усложняется тем, что срез исследуемой ткани имеет толщину, значительно превосходящую размеры клетки. Соответственно, приходится работать с двумерным изображением трехмерной структуры, при котором неизбежны наложение объектов по глубине изображения и неоднородность в интенсивности пикселей, формирующих эти объекты в полученном изображении. Значительно повысить качество сегментации ядер клеток можно, воспользовавшись методикой получения флуоресцентных изображений, где представляющие интерес объекты окрашиваются с помощью флуоресцентных соединений. Комбинация методов флуоресцентной спектроскопии и методов иммуногистохимии позволяет существенно улучшить результаты сегментации ядер клеток и их последующую классификацию на раковые и здоровые [1; 5].

Анализ изображений в медицинской практике сталкивается с одной и той же проблемой, а именно с необходимостью привлечения высококвалифицированных специалистов для ручной обработки большого количества изображений. Качество анализа биомедицинских изображений и результат диагностики не всегда достигают стабильно высокого уровня. Проведение скрининговых исследований большого количества изображений в сжатые сроки является сложной задачей.

С начала 2010-х гг. благодаря созданию инновационных архитектур сверточных нейронных сетей (*convolution neural network*, CNN) появилась возможность эффективно решать задачи классификации и семантической сегментации изображений [3; 6]. Отличная производительность нейронных сетей глубокого обучения и сравнительно высокий уровень достоверности получаемых результатов позволяют сочетать ручной анализ биомедицинских изображений с автоматизированной их обработкой методами глубокого обучения, чтобы добиться наилучшего согласования между точностью и стабильностью диагностических результатов и себестоимостью выполнения работ.

Успешное применение методов глубокого обучения для классификации и семантической сегментации изображений привело к бурному росту как числа архитектур, так и их сложности. Архитектура Visual Geometry Group (VGG) [7], опубликованная в 2014 г., возглавила тенденцию к увеличению глубины CNN. Ее разработчики стремились заменить ядро свертки большого размера ядром малого размера в целях оптимизации качества классификации и повышения вычислительной производительности. В 2016 г. компанией *Microsoft Research* была предложена архитектура Residual Network (ResNet) [8], которая восполняет потери информации, обусловленные изменением разрешения изображения с высокого на низкое при прохождении его через слои нейронной сети. Разработанная в тот же период полностью сверточная нейронная сеть (*fully convolutional network*, FCN) [9] дала следующий импульс к развитию CNN в этой области. В течение года одна за другой были предложены две архитектуры – U-Net и SegNet, совершенствующие архитектуру FCN и значительно повышающие скорость и качество обучения нейронных сетей. Архитектура U-Net [10] специально разработана для семантической сегментации биомедицинских изображений, а архитектура SegNet [11] ориентирована на упрощение структуры сети и повышение скорости обучения. При решении задачи сегментации биомедицинских изображений сквозная (*end-to-end*) структура U-Net, реализующая архитектуру кодер – декодер, продемонстрировала наилучшие характеристики, что предопределило бурный рост числа архитектур, развивающих и совершенствующих ее топологию. В 2016 г. и позже были предложены еще несколько архитектур, таких как FC-DenseNet [12], UNet++ [13], MultiResUNet [14], Res-Seg-net [15], UNet 3+ [16], TransUNet [17] и др., направленных на совершенствование архитектуры нейронной сети и улучшение характеристик сегментации.

Тем не менее из-за высокой вариабельности изображений раковых клеток очень тяжело достичь стабильно хорошего результата. Несмотря на наличие сравнительно большого числа публикаций, посвященных данной тематике, и готовых решений, доступных, например, на веб-сервисе *GitHub*, часто трудно найти действительно рабочую модель или алгоритм для сегментации определенного типа объектов на изображениях срезов разного вида раковых тканей, полученных с помощью различных методик. Кроме того, высокая вариабельность изображений раковых клеток может создавать трудности при получении размеченной экспертами обучающей выборки достаточно большого объема. Ручное выделение границ сотен и тысяч объектов на изображениях, многие из которых едва просматриваются, перекрываются и т. д., требует как усидчивости и значительных временных затрат, так и высочайшей квалификации и опыта экспертов.

Цель настоящей работы состоит в сравнительном анализе различных архитектур нейронных сетей глубокого обучения для сегментации ядер клеток на иммуногистохимических флуоресцентных изображениях срезов раковой ткани молочной железы. Существенную сложность при проведении исследования представляет ограниченность объема обучающей и тестовой выборок. У авторов имеется всего 9 размеченных экспертами изображений с разрешением 2048×2048 пк, что далеко от традиционно требуемых объемов данных для обучения CNN. Ранее авторами были проанализированы различные методы предварительной обработки (подготовки) данных, позволившие даже на основе такого небольшого количества изображений получить сравнительно неплохие результаты сегментации, используя ставшую уже классической архитектуру U-Net [18]. Соответственно, возник вопрос о выборе наиболее эффективной архитектуры CNN и ее параметров для сегментации ядер клеток на иммуногистохимических флуоресцентных изображениях срезов раковой ткани молочной железы.

Сравнительный анализ архитектур нейронных сетей глубокого обучения

В данном исследовании ограничимся анализом наиболее часто используемых при сегментации биомедицинских изображений архитектур нейронных сетей. Все рассмотренные структуры реализуют архитектуру кодер – декодер, поскольку при семантической сегментации изображений требуется попиксельное сопоставление результатов сегментации с исходным изображением.

FCN. Архитектура FCN явилась первой успешной архитектурой в области семантической сегментации [9]. Изначально данная сеть была ориентирована на решение задач классификации изображений, но после соответствующей доработки стала применяться к задачам сегментации. Первая часть сети (кодер) выделяет признаки объектов с помощью сверточных слоев, понижающих размерность с использованием операции субдискретизации (*pooling*). Вторая часть сети (декодер) также с применением операций свертки увеличивает

размерность полученной карты признаков до размера изначального изображения (up sampling). Кроме того, в архитектуре FCN было предложено соединять (суммировать) карты признаков, сформированные на разных уровнях кодера, с картами признаков декодера той же размерности для передачи детализированной информации, имеющейся на верхних уровнях кодера и потерянной при последующей субдискретизации, на соответствующие им уровни декодера. Передача карт признаков кодера на декодер получила устойчивое название скип-соединения (skip connection). На рис. 1 представлена структурная схема архитектуры FCN-8.

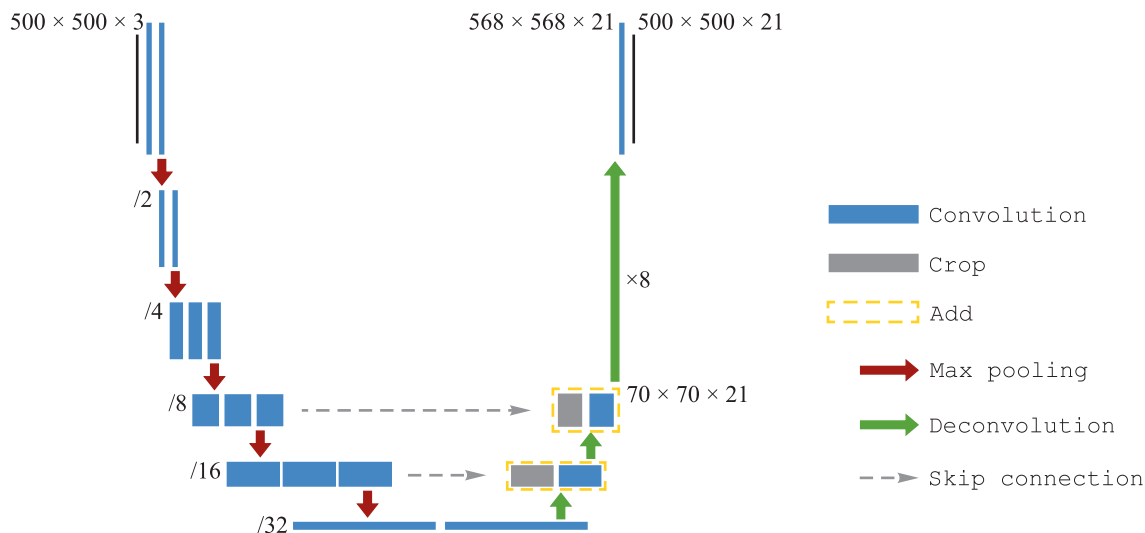


Рис. 1. Структурная схема архитектуры FCN-8

Fig. 1. FCN-8 architecture structural scheme

U-Net. Архитектура U-Net, предложенная в 2015 г. [10], показала отличные результаты при сегментации медицинских изображений. По сравнению с моделью FCN наиболее важными отличительными особенностями модели U-Net являются полностью симметричная архитектура кодер – декодер, удвоение размерности карт признаков на каждом уровне и введение соединений карт признаков на всех уровнях с помощью операции конкатенации. На рис. 2 отображена стандартная архитектура U-Net, имеющая 23 сверточных слоя.

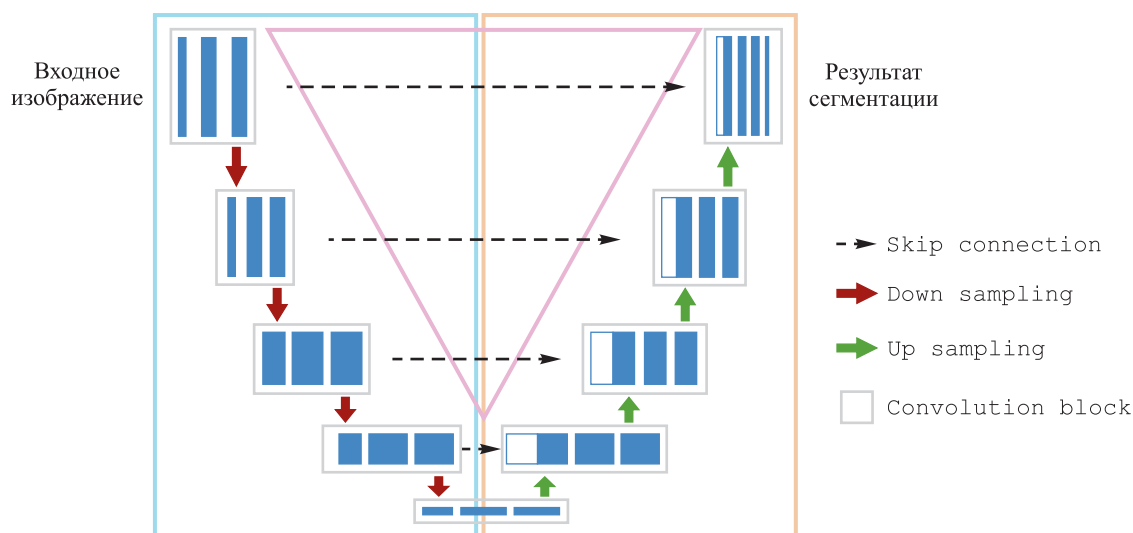


Рис. 2. Структурная схема архитектуры U-Net

Fig. 2. U-Net architecture structural scheme

Архитектура схематично разделена на три части: голубая рамка соответствует кодеру, оранжевая рамка – декодеру, а розовый треугольник – соединениям сверточных блоков для передачи карт признаков с кодера на декодер (см. рис. 2). На данной архитектуре основано большинство современных моделей сегментации изображений, получивших широкое распространение в медицине в последние

годы. В целом практически все нововведения в моделях, разработанных после появления архитектуры U-Net, реализуют следующие варианты оптимизации ее структуры: 1) комбинацию идей разных моделей для улучшения характеристик как кодера, так и декодера; 2) замену сверточного блока в кодере или декодере новым функциональным модулем, способным улучшить возможность абстрагирования признаков более высоких уровней; 3) изменение топологии соединений карт признаков, полученных на разных уровнях кодера и декодера.

SegNet. Главной особенностью архитектуры SegNet является попытка оптимизации соединений блоков кодера и декодера (отмечены розовым треугольником на рис. 2). В целях повышения эффективности передаются не полные карты признаков, а индексные таблицы соответствующих субдискретизирующих слоев, которые хранят индексы активированных пикселей. Таким образом, слои повышающей дискретизации сети получают от соответствующих субдискретизирующих слоев необходимую информацию о том, как повысить размерность и восстановить сжатые (и, следовательно, утерянные) данные. Модель кодера SegNet имеет топологию VGG-16 [7] без полносвязных слоев. Удаление полносвязных слоев обеспечивает кодери SegNet меньшие затраты на обучение, чем у многих других архитектур. Уровни сети декодера соответствуют структуре сети кодера.

FC-DenseNet. Модель FC-DenseNet [19] расширяет структуру сети U-Net и также реализует архитектуру кодер – декодер. Кодер FC-DenseNet представляет собой классификационную сеть DenseNet [12] без полносвязных слоев. В отличие от других сетей в архитектуре FC-DenseNet реализованы так называемые плотные сверточные блоки (dense block), а также соединение карт признаков не только между кодером и декодером, но и между отдельными уровнями кодера. В плотных сверточных блоках осуществляется перенос как низкоуровневых признаков из предыдущих слоев, так и высокоуровневых признаков из более поздних слоев, что обеспечивает эффективное повторное использование этих признаков и учет информации различного уровня при повышающей дискретизации и формировании карт сегментации. Внедрение такого плотного соединения дает определенные преимущества: улучшается коэффициент использования параметров сети, и все слои могут повторно обращаться к ранее рассчитанным картам признаков. На рис. 3 изображены общая структура и три основных функциональных блока архитектуры FC-DenseNet.

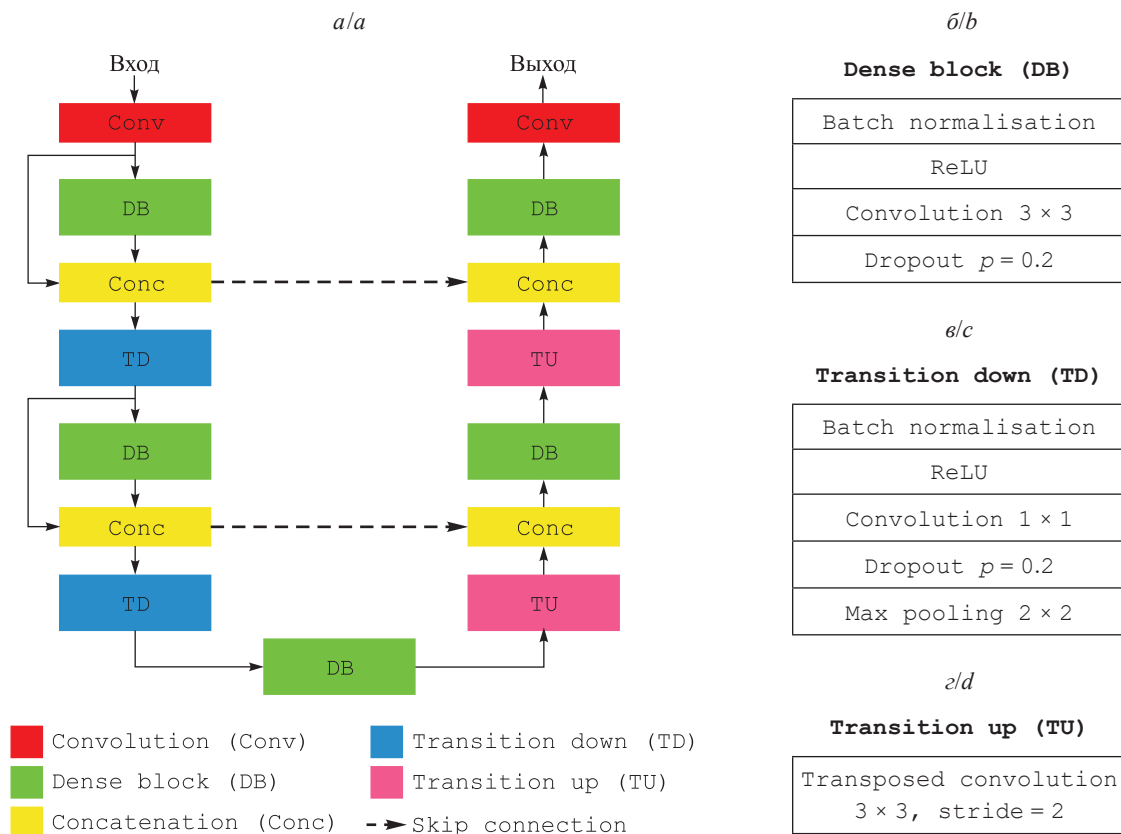


Рис. 3. Общая структура (а) и основные блоки (б – плотный сверточный блок; в – блок понижающей дискретизации; г – блок повышающей дискретизации) архитектуры FC-DenseNet

Fig. 3. General structure (a) and main blocks (b – dense convolutional block; c – down sampling block; d – up sampling block) of the FC-DenseNet architecture

UNet++. Модель UNet++ представляет собой сеть вида кодер – декодер, в которой подсети кодера и декодера соединены серией дополнительных вложенных слоев [13]. В архитектуре U-Net карты признаков кодера напрямую поступают в декодер, а в архитектуре UNet++ они проходят через дополнительный плотный сверточный блок с короткими скип-соединениями [13], количество сверточных слоев которого зависит от уровня пирамиды, схематично изображенной на рис. 4. Добавление вложенных слоев позволяет еще больше сократить семантический разрыв между картами признаков подсетей кодера и декодера.

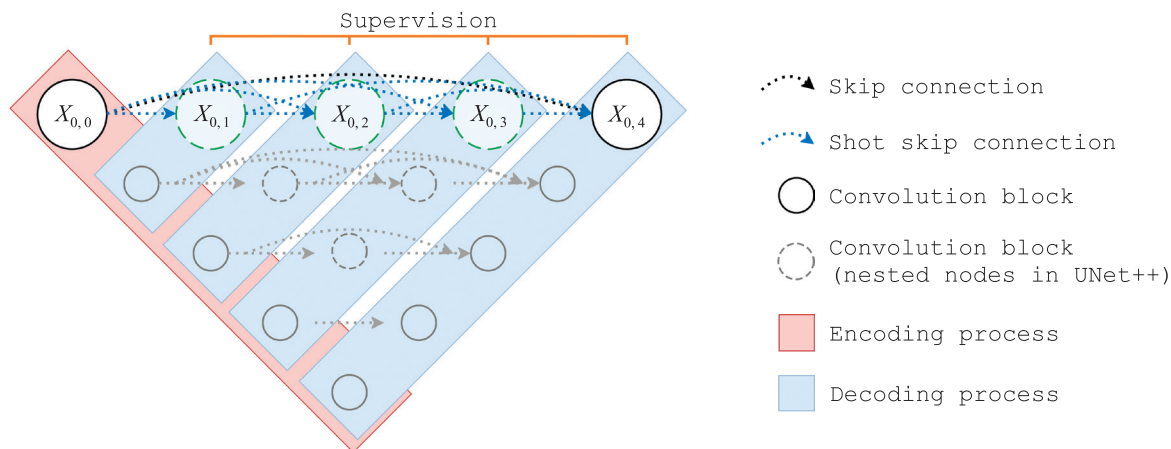


Рис. 4. Структурная схема архитектуры UNet++

Fig. 4. UNet++ architecture structural scheme

Res-Seg-net. Изначально данная архитектура разрабатывалась для сегментации мультиспектральных изображений дистанционного зондирования Земли [20]. Проблемы сегментации мультиспектральных изображений подобны проблемам сегментации изображений биомедицинского характера (малый объем доступных размеченных данных, возможность переобучения и необходимость в большом количестве параметров для повышения детализации сегментации). Модель Res-Seg-net соответствует типичной архитектуре U-Net и, с одной стороны, использует достоинства модели ResNet [8] (добавляются остаточные соединения (residual connection)) для борьбы с проблемой затухающего градиента, а с другой стороны – достоинства модели SegNet для сокращения количества обучаемых параметров декодера. Это классический случай объединения функций двух моделей для повышения эффективности как кодера, так и декодера.

UNet 3+. В моделях FCN, U-Net, UNet++ карты признаков низких уровней собирают детальную информацию, позволяя более точно выделять границы объектов, а карты признаков верхних уровней содержат обобщенную информацию для определения местоположения объекта. Однако общей проблемой рассмотренных выше моделей является то, что все они не используют одновременно информацию, представленную на разных уровнях. Для преодоления этой проблемы в архитектуре UNet 3+ было предложено соединять блоки декодера не только с блоками кодера одного уровня, но и с блоками кодера всех уровней над этим слоем, что позволяет эффективно и полностью, но с меньшим количеством параметров передавать семантическую информацию со всех уровней кодера на каждый блок декодера (рис. 5) [16]. Кроме того, для получения иерархической информации из агрегированных карт признаков в структуре UNet 3+ применяется полномасштабная контролируемая постобработка (supervision).

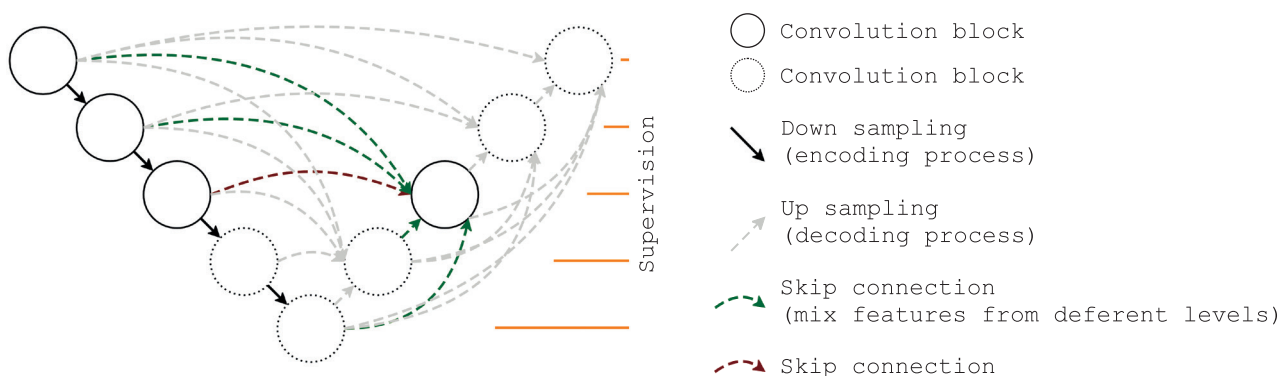


Рис. 5. Структурная схема архитектуры UNet 3+

Fig. 5. UNet 3+ architecture structural scheme

TransUNet. В архитектуре TransUNet модификации подверглась ветвь кодера путем внедрения блока преобразования Transformer (рис. 6) [17]. Чтобы компенсировать потерю разрешения, вызванную применением блоков преобразования, модель TransUNet реализует гибридную архитектуру CNN-Transformer, которая позволяет использовать как подробную пространственную информацию высокого разрешения, получаемую от сверточной сети, так и глобальный контекст, закодированный в блоках преобразования.

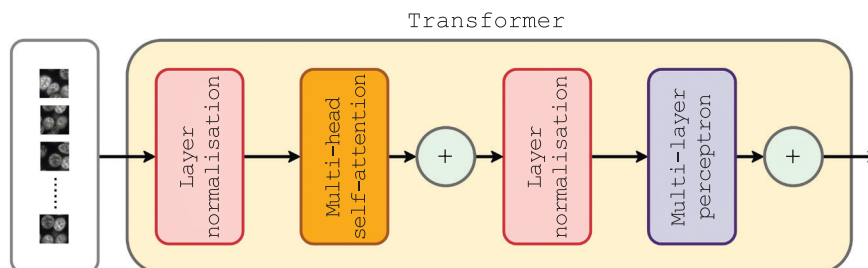


Рис. 6. Структурная схема блока преобразования Transformer, используемого в архитектуре TransUNet

Fig. 6. Structural scheme of the Transformer block used in the TransUNet architecture

Материалы и методы исследования

Материалы. В статье исследуются иммуногистохимические флуоресцентные изображения раковых клеток молочной железы, полученные при 10-кратном увеличении на инвертированном эпифлуоресцентном микроскопе Nikon TE200 (Япония) с CCD-камерой Photometrics серии 300 (Германия) и сохраненные в стандарте RGB. Размер изображений составляет 2048×2048 пк в каждом из трех цветовых каналов, разрешение – 0,2 мкм/пк, или 5 мкм. В качестве индикатора раковых клеток используется рецептор эстрогена, помечаемый цианиновым красителем Cy5 и регистрируемый в красном канале изображения [1]. В противоположность здоровым клеткам в цитоплазме раковых клеток накапливается белок цитокератин, который маркируется цианиновым красителем Cy3 и регистрируется в зеленом канале изображения. Для маркировки всех ядер используется краситель 4,6-диамидино-2-фенилиндол дигидрохлорид (DAPI), так как он обладает выраженной способностью присоединяться к РНК. Максимум спектра испускания данного флуоресцентного соединения лежит в синем канале. Соответственно, маркерами раковых клеток являются два красителя – Cy5 и Cy3.

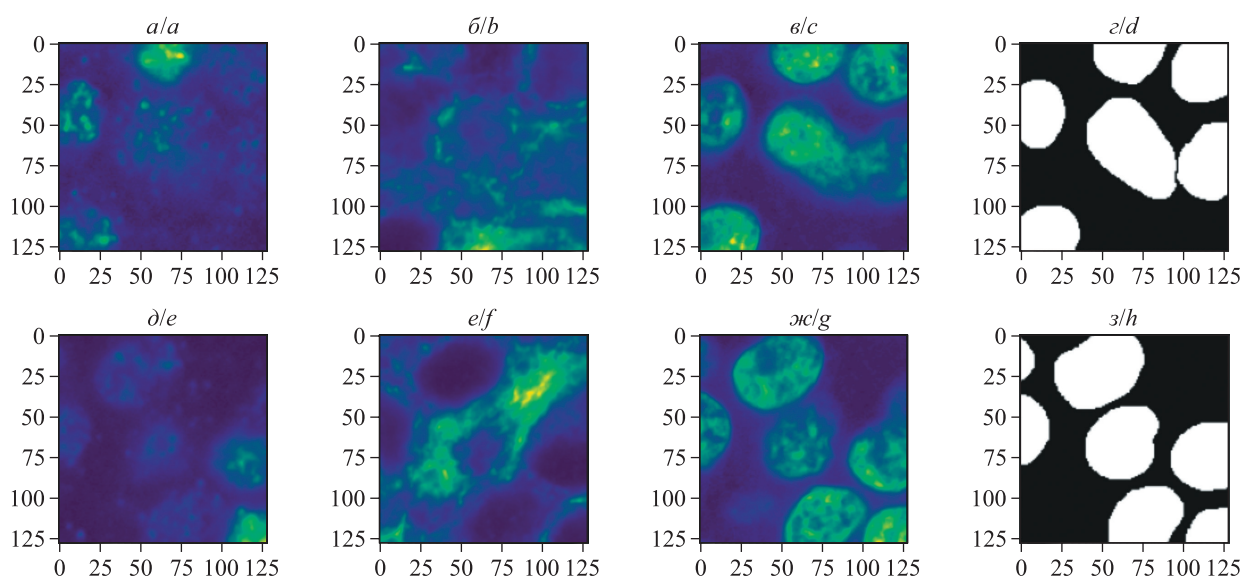


Рис. 7. Пример двух фрагментов иммуногистохимического флуоресцентного изображения клеток раковой ткани молочной железы. Красный канал (а, д) представляет ядра раковых клеток, зеленый канал (б, е) – цитоплазму, а синий канал (в, ж) – все ядра, включая здоровые.

В последнем столбце (г, з) приведены размеченные экспертами маски клеток

Fig. 7. An example of two fragments of an immunohistochemical fluorescent image of breast cancer cells.

The red channel (a, e) represents the nuclei of cancer cells, the green channel (b, f) – the cytoplasm, and the blue channel (c, g) – all nuclei, including healthy ones. The last column (d, h) shows cell masks labeled by experts

Протокол подготовки образцов и методика получения изображений подробно описаны в работе [1]. В общей сложности 9 экспериментальных изображений были вручную размечены экспертами. Размеченные изображения, на которых выделены только маски ядер раковых клеток (ground truth), представляют собой бинарные изображения, где пикселям ядер клеток присвоено значение 1. Несколько случайно отобранных фрагментов экспериментальных изображений размером 256×256 пк показаны на рис. 7. Размеченные маски ядер клеток представлены в четвертом столбце (см. рис. 7, з и з).

Методы. Сегментация изображений выполнялась с помощью искусственных нейронных сетей глубокого обучения, реализующих семантическую сегментацию. Выделяются два класса пикселей: класс пикселей, составляющих ядра раковых клеток, и класс остальных пикселей безотносительно к месту их расположения (ядра здоровых клеток, цитоплазма, межклеточное пространство).

Программная реализация нейронных сетей осуществлялась на языке Python с помощью инфраструктуры TensorFlow (версия 1.14) и высокоуровневой библиотеки Keras (версия 2.2.4). Для проведения исследований использовались среда Google Colab и тарифный план Google Colab Pro+, предоставляющий доступ к вычислительным мощностям графического процессора NVIDIA A100 40 GB. Для аугментации изображений применялась библиотека Albumentations (*albumentations.ai*), а вычисление метрик оценки качества сегментации выполнялось с помощью методов библиотеки Segmentation models (*segmentation-models.readthedocs.io*).

Метрики оценки качества сегментации. Для вычисления функции потерь (Loss) использовался расчет бинарной кросс-энтропии:

$$L = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \log(p(y_i)) + (1 - y_i) \log(1 - p(y_i)),$$

где y_i – значение i -го пикселя в размеченной экспертами маске изображения (метка класса; может принимать значения 0 или 1); $p(y_i)$ – вероятность принадлежности i -го пикселя исследуемого изображения метке y_i ; N – количество пикселей. Чем меньше значение функции потерь, тем лучше эффект обучения.

Коэффициент подобия Жаккара, или, иначе, пересечение над объединением (*intersection over union*, IOU), используется для расчета метрики, оценивающей степень совпадения результатов сегментации с размеченной экспертами маской:

$$\text{IOU} = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|},$$

где A и B – прогнозируемый результат и размеченная экспертами маска соответственно. Данный коэффициент вычисляется при пороговом значении вероятности предсказания 0,5. Чем больше коэффициент IOU, тем лучше сегментация (ближе к размеченной экспертами маске).

Результаты и их обсуждение

Все архитектуры нейронных сетей, рассмотренные выше, были программно реализованы на языке Python с использованием библиотек TensorFlow и Keras. Детали реализации приведены в подразделе «Методы». Исходные данные, представляющие собой иммуногистохимические флуоресцентные изображения среза ткани опухоли молочной железы, описаны в подразделе «Материалы». Особенностью настоящей работы является исследование возможности и эффективности сегментации ядер клеток на иммуногистохимических флуоресцентных трехканальных изображениях в условиях очень малой входной выборки (всего 9 размеченных изображений размером 2048×2048 пк).

Чтобы обеспечить объективное сравнение полученных результатов, использовался один и тот же набор аннотированных изображений для обучения нейронной сети. Процедуры предварительной обработки изображений и гиперпараметры обучения нейронных сетей также были одинаковыми. В ходе ранее проведенных авторами исследований [18] было установлено, что наиболее эффективным способом предварительной подготовки набора данных для сегментации ядер клеток на иммуногистохимических флуоресцентных изображениях среза ткани опухоли молочной железы с применением нейронной сети глубокого обучения U-Net является разбиение исходного изображения на фрагменты размером 256×256 пк, а затем выделение в каждом из них 8 патчей размером 128×128 пк в случайном смещении от начала фрагмента. Подобный подход позволяет сформировать обучающую выборку достаточно большого объема. Таким образом, разрешение изображений, которые использовались для обучения и тестирования нейронных сетей глубокого обучения, исследуемых в данной работе, составляло 128×128 пк. Один и тот же алгоритм предварительной обработки применялся как к обучающим, так и к тестовым изображениям. Из обучающего набора были удалены пустые патчи (с количеством ненулевых пикселей менее 150) [18].

Из 9 исходных (2048×2048 пк) размеченных изображений 7 изображений использовались для обучения, 1 изображение – для проверки процесса обучения и 1 изображение – для тестирования. Соответственно, размер обучающей выборки после этапа предварительной обработки составил 12 064 патча ($197\,656\,576$ пк), размер проверочной и тестовой выборок – по 1644 патча. Количество эпох в процессе обучения было выбрано равным 30, размер серии (batch size) как для обучения, так и для проверки равнялся 32. В целях экономии времени обучения был применен метод ранней остановки (early_stop): если значение функции потерь на проверочном наборе не уменьшалось после 10 итераций в процессе обучения, процесс обучения нейронной сети прекращался. Для обеспечения объективности сравнения архитектур их реализации, заимствованные из репозитория веб-сервиса *GitHub*, приводились к единому виду. Во всех случаях по возможности использовались одни и те же наборы гиперпараметров, но количество сверток и их размерность на первом этапе исследований не изменялись. Таким образом, более поздние (производные) модели, такие как Res-Seg-net, UNet 3+ и TransUNet, имели гораздо большее количество обучаемых параметров, чем их прототипы FCN-8, U-Net и FC-DenseNet. Как известно, чем больше параметров обучается в модели, тем более высокой точности можно от них ожидать, но при этом время обучения также значительно возрастает. В данном исследовании архитектура TransUNet имела наибольшее количество параметров и самое продолжительное время обучения, близкое к 1 ч, однако не во всех случаях обеспечивала наивысшую точность сегментации.

Результаты проведенных вычислительных экспериментов сведены в табл. 1. Сравнительный анализ полученных значений метрик оценки качества сегментации показывает, что на нашем наборе данных наилучшее качество сегментации как по значению функции потерь, так и по значению коэффициента IOU демонстрирует модель UNet 3+, а наихудшее – модель SegNet. Примеры лучшего и худшего результатов сегментации, полученных с помощью моделей UNet 3+ и SegNet соответственно, представлены на рис. 8.

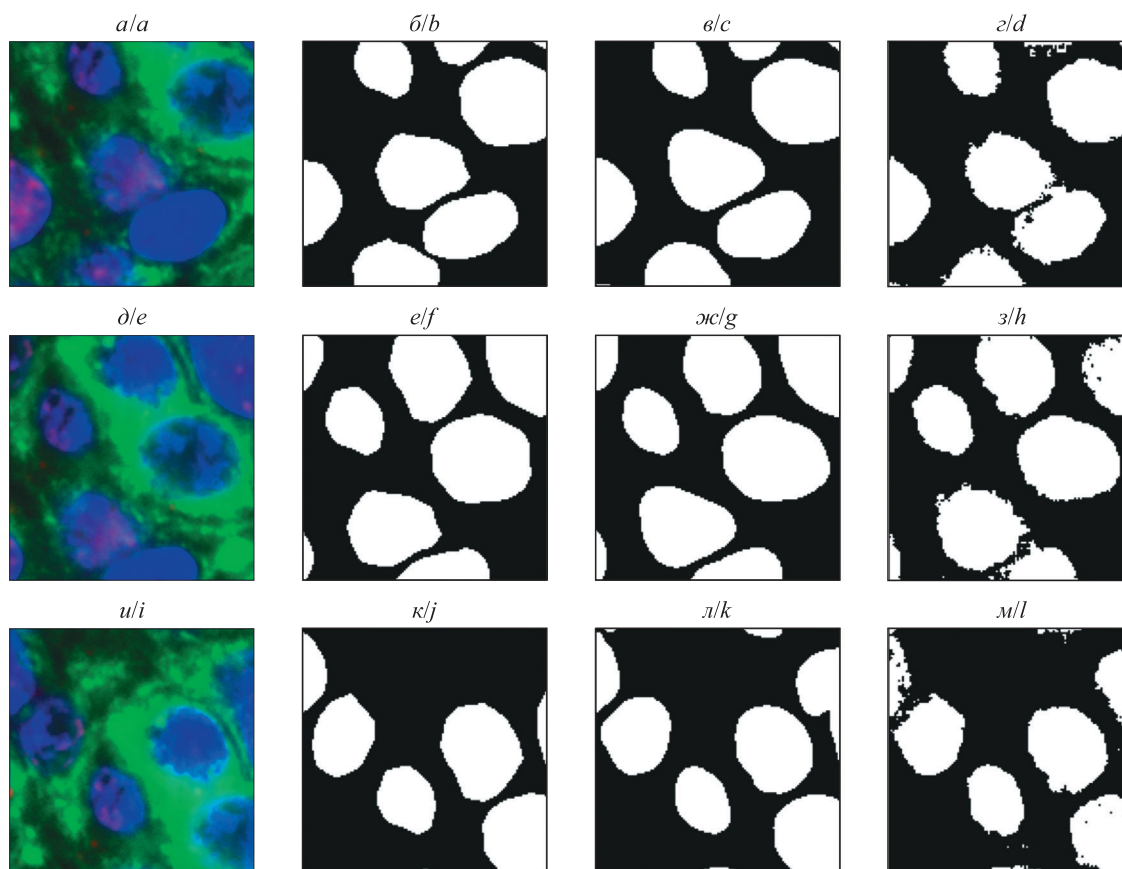


Рис. 8. Примеры лучшего (в, ж, л) и худшего (з, з, м) результатов сегментации, полученных с применением моделей Unet 3+ и SegNet соответственно (а, d, i – исходное изображение; б, е, к – маска ядер, размеченная экспертами; в, з, ж, з, л, м – результат сегментации)

Fig. 8. Examples of the best (c, g, k) and worst (d, h, l) segmentation results obtained using the Unet 3+ and SegNet models respectively (a, e, i – original image; b, f, j – mask of nuclei marked by experts; c, d, g, h, k, l – result of segmentation)

Таблица 1

Метрики оценки качества сегментации

Table 1

Evaluation metrics for assessing the quality of segmentation

Архитектура	Количество обучаемых параметров	Значение функции потерь (бинарная кросс-энтропия)	Значение коэффициента IOU
FCN-8	2 248 721	0,1677	0,8260
U-Net	1 941 105	0,1688	0,8273
SegNet	29 443 075	0,2051	0,7938
FC-DenseNet-56	1 374 865	0,1575	0,8321
FC-DenseNet-103	9 319 521	0,2213	0,7983
UNet++	2 261 889	0,1600	0,8363
Res50-Seg-net	34 819 201	0,1845	0,8040
Res101-Seg-net	53 837 441	0,1806	0,8047
UNet 3+	26 072 449	0,1492	0,8433
TransUNet	40 504 473	0,1601	0,8371

Примечание. Полужирным шрифтом выделены лучшие значения метрик.

Как видно из представленных результатов, все исследованные архитектуры нейронных сетей достаточно эффективно выполняют сегментацию ядер клеток на иммуногистохимических флуоресцентных изображениях раковой ткани, что неудивительно, поскольку для исследования были отобраны архитектуры, показавшие наилучшее качество сегментации изображений. Для анализируемого класса изображений наилучшие результаты дают архитектуры, основанные на архитектуре U-Net, специально разработанной для сегментации медицинских изображений. Хотя архитектура U-Net была опубликована еще в 2015 г., модели, реализующие ее базовую структуру кодер – декодер с соединением карт признаков на разных уровнях, по-прежнему играют важную роль в области семантической сегментации медицинских изображений.

Тем не менее имеется существенный разрыв в значениях показателей между лучшим и худшим вариантами, но, учитывая рабочую нагрузку на аппаратные средства, в значительной степени определяемую количеством обучаемых параметров, архитектура нейронной сети, которая дает максимальное значение коэффициента IOU, не всегда является оптимальной. На основании полученных результатов авторы отобрали четыре наилучшие архитектуры и для обеспечения более справедливого их сравнения значительно сократили количество обучаемых параметров в моделях Unet 3+ и TransUNet. Так, в кодере и декодере архитектуры UNet 3+ количество ядер свертки было уменьшено в 4 раза. В архитектуре TransUNet структура блоков преобразования Transformer в кодере осталась неизменной, размерность же остальных сверточных слоев уменьшилась в 4 раза. Процесс обучения модифицированных нейронных сетей был проведен заново. Время обучения существенно снизилось (для модели UNet 3+ оно сократилось с 2164,8 до 538,5 с, т. е. примерно в 4 раза). Результаты второго этапа исследований представлены в табл. 2. Как и следовало ожидать, метрики оценки качества сегментации ухудшились, но незначительно.

Таблица 2

Метрики оценки качества сегментации
при сравнимом количестве параметров обучения

Table 2

Metrics for assessing the quality of segmentation
with a comparable number of learning parameters

Архитектура	Количество обучаемых параметров	Значение функции потерь (бинарная кросс-энтропия)	Значение коэффициента IOU
U-Net	1 941 105	0,1688	0,8273
UNet++	2 261 889	0,1600	0,8363

Окончание табл. 2
Ending of the table 2

Архитектура	Количество обучаемых параметров	Значение функции потерь (бинарная кросс-энтропия)	Значение коэффициента IOU
UNet 3+	1 631 329	0,153 1	0,840 6
TransUNet	2 343 217	0,1643	0,835 1

Примечание. Полужирным шрифтом выделены лучшие значения метрик.

Модель Unet 3+ продолжает демонстрировать наиболее высокую точность сегментации ядер на изображениях раковой ткани молочной железы. Модели Unet++ и TransUNet показывают незначительно более низкую точность сегментации. Классическая модель U-Net находится на последнем месте по точности сегментации, однако ее отставание от лидеров совсем невелико. Важно отметить, что архитектура U-Net намного проще в реализации, что может быть важным фактором для ее применения в отдельных случаях.

Заключение

Проведен сравнительный анализ наиболее эффективных нейронных сетей глубокого обучения, таких как FCN-8, U-Net, SegNet, FC-DenseNet, UNet++, Res-Seg-net, UNet 3+, TransUNet, показавших хорошие результаты в семантической сегментации изображений, при решении задачи сегментации ядер клеток на иммуногистохимических флуоресцентных изображениях срезов раковой ткани молочной железы. Установлено, что применение CNN, основанных на архитектуре U-Net, позволяет эффективно выполнять сегментацию ядер клеток на флуоресцентных изображениях срезов опухолевой ткани. Среди них наилучшие результаты сегментации показала нейронная сеть глубокого обучения на базе структуры UNet 3+. Основой для повышения качества сегментации в большинстве рассматриваемых случаев является наличие соединений (skip connections) карт признаков. Данные соединения (как внутри кодера или декодера, так и между ними) значительно улучшают качество сегментации. В модели UNet 3+ механизм соединений реализован наиболее эффективно, что и обусловило получение наилучшего результата.

Качество сегментации ядер клеток можно существенно повысить, применив постобработку результатов сегментации. Наибольшее количество ошибок связано с получением слившихся ядер после финальной пороговой классификации пикселей (пиксели, имеющие значение больше 0,5, относят к классу «принадлежащие ядру раковой клетки»). Использование, например, метода водораздела позволит улучшить итоговое качество сегментации.

Библиографические ссылки / References

1. Chung GG, Zerkowski MP, Ghosh S, Camp RL, Rimm DL. Quantitative analysis of estrogen receptor heterogeneity in breast cancer. *Laboratory Investigation*. 2007;87(7):662–669. DOI: 10.1038/labinvest.3700543.
2. Camp RL, Chung GG, Rimm DL. Automated subcellular localization and quantification of protein expression in tissue microarrays. *Nature Medicine*. 2002;8(11):1323–1328. DOI: 10.1038/nm791.
3. Todewale NS. Lesion segmentation from mammogram images using a U-Net deep learning network. *International Journal of Engineering Research and Technology*. 2020;9(2):406–411.
4. Lagree A, Mohebpour M, Meti N, Saednia K, Lu Fang-I, Slodkowska E, et al. A review and comparison of breast tumor cell nuclei segmentation performances using deep convolutional neural networks. *Scientific Reports*. 2021;11:8025. DOI: 10.1038/s41598-021-87496-1.
5. Lisitsa YV, Yatskou MM, Apanasovich VV, Apanasovich TV. Algorithm for automatic segmentation of nuclear boundaries in cancer cells in three-channel luminescent images. *Journal of Applied Spectroscopy*. 2015;82(4):634–643. DOI: 10.1007/s10812-015-0156-2.
6. Saood A, Hatem I. COVID-19 lung CT image segmentation using deep learning methods: U-Net versus SegNet. *BMC Medical Imaging*. 2021;21:19. DOI: 10.1186/s12880-020-00529-5.
7. Simonyan K, Zisserman A. Very deep convolutional networks for large-scale image recognition. arXiv:1409.1556v1 [Preprint]. 2014 [cited 2022 March 18]: [10 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/1409.1556v1>.
8. He Kaiming, Zhang Xiangyu, Ren Shaoqing, Sun Jian. Deep residual learning for image recognition. In: *2016 IEEE conference on computer vision and pattern recognition (CVPR); 2016 June 27–30; Las Vegas, USA*. [S. l.]: IEEE; 2016. p. 770–778. DOI: 10.1109/CVPR.2016.90.
9. Long J, Shelhamer E, Darrell T. Fully convolutional networks for semantic segmentation. arXiv:1411.4038v1 [Preprint]. 2014 [cited 2022 March 18]: [10 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/1411.4038v1>.
10. Ronneberger O, Fischer P, Brox T. U-Net: convolutional networks for biomedical image segmentation. In: Navab N, Hornegger J, Wells WM, Frangi AF, editors. *Medical image computing and computer-assisted intervention (MICCAI-2015). Proceedings of the 18th International conference; 2015 October 5–9; Munich, Germany. Part 3*. Cham: Springer; 2015. p. 234–241 (Goos G, Hartmanis J, van Leeuwen J, editors. Lecture notes in computer science; volume 9351). DOI: 10.1007/978-3-319-24574-4_28.

11. Badrinarayanan V, Kendall A, Cipolla R. SegNet: a deep convolutional encoder-decoder architecture for image segmentation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. 2017;39(12):2481–2495. DOI: 10.1109/TPAMI.2016.2644615.
12. Jégou S, Drozdal M, Vazquez D, Romero A, Bengio Y. The one hundred layers tiramisu: fully convolutional DenseNets for semantic segmentation. In: *2017 IEEE conference on computer vision and pattern recognition workshops (CVPRW); 2017 July 21–26; Honolulu, USA*. [S. l.]: IEEE; 2017. p. 1175–1183. DOI: 10.1109/CVPRW.2017.156.
13. Zhou Zongwei, Siddiquee MMR, Tajbakhsh N, Liang Jianming. UNet++: a nested U-Net architecture for medical image segmentation. In: Stoyanov D, Taylor Z, Carneiro G, Syeda-Mahmood T, Martel A, Maier-Hein L, et al., editors. *Deep learning in medical image analysis and multimodal learning for clinical decision support. Proceedings of the 4th International workshop DLMIA-2018 and 8th International workshop ML-CDS-2018 held in conjunction with MICCAI-2018; 2018 September 20; Granada, Spain*. Cham: Springer; 2018. p. 3–11 (Goos G, Hartmanis J, van Leeuwen J, editors. Lecture notes in computer science; volume 11045). DOI: 10.1007/978-3-030-00889-5_1.
14. Ibtehaz N, Rahman MS. MultiResUNet: rethinking the U-Net architecture for multimodal biomedical image segmentation. *Neural Networks*. 2020;121:74–87. DOI: 10.1016/j.neunet.2019.08.025.
15. Saxena N, Kishore Babu N, Raman B. Semantic segmentation of multispectral images using Res-Seg-net model. In: *2020 IEEE 14th International conference on semantic computing (ICSC); 2020 February 3–5; San Diego, USA*. [S. l.]: IEEE; 2020. p. 154–157. DOI: 10.1109/ICSC.2020.00030.
16. Huang Huimin, Lin Lanfen, Tong Ruofeng, Hu Hongjie, Zhang Qiaowei, Iwamoto Y, et al. UNet 3+: a full-scale connected U-Net for medical image segmentation. In: *2020 IEEE International conference on acoustics, speech and signal processing (ICASSP); 2020 May 4–8; Barcelona, Spain*. [S. l.]: IEEE; 2020. p. 1055–1059. DOI: 10.1109/ICASSP40776.2020.9053405.
17. Chen Jieneng, Lu Yongyi, Yu Qihang, Luo Xiangde, Adeli E, Wang Yan, et al. TransUNet: transformers make strong encoders for medical image segmentation. arXiv:2102.04306 [Preprint]. 2021 [cited 2022 March 21]: [13 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/2102.04306>.
18. Xu Silun, Skakun V. Comparison of deep learning preprocessing algorithms of nuclei segmentation on fluorescence immunohistology images of cancer cells. In: Tuzikov AV, Belotserkovsky AM, Lukashevich MM, editors. *Pattern recognition and information processing. Revised selected papers of the 15th International conference PRIP-2021; 2021 September 21–24; Minsk, Belarus*. Cham: Springer; 2022. p. 166–177 (Communications in computer and information science; volume 1562). DOI: 10.1007/978-3-030-98883-8_12.
19. Huang Gao, Liu Zhuang, Van Der Maaten L, Weinberger KQ. Densely connected convolutional networks. In: *2017 IEEE conference on computer vision and pattern recognition (CVPR); 2017 July 21–26; Honolulu, USA*. [S. l.]: IEEE; 2017. p. 2261–2269. DOI: 10.1109/CVPR.2017.243.
20. Pan Bin, Shi Zhenwei, Xu Xia, Shi Tianyang, Zhang Ning, Zhu Xinzong. CoinNet: copy initialization network for multispectral imagery semantic segmentation. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*. 2019;16(5):816–820. DOI: 10.1109/LGRS.2018.2880756.

Получена 03.01.2024 / исправлена 14.02.2024 / принята 14.02.2024.
Received 03.01.2024 / revised 14.02.2024 / accepted 14.02.2024.

МОДЕЛЬ СЛОЖНЫХ ИНТЕГРИРОВАННЫХ СИСТЕМ

В. П. КОЧИН¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Аннотация. Рассматриваются вопросы проектирования сложных систем. Описываются текущее состояние и эволюция процессов разработки и создания информационных систем. Анализируются основные (классический и системный) подходы к проектированию сложных систем, а также подход, основанный на теории динамического хаоса. По результатам анализа существующих подходов к проектированию сложных систем обосновывается необходимость разработки новых моделей и методов проектирования сложных интегрированных систем. Предлагается модель сложных интегрированных систем, основанная на теории нечетких множеств. Определяются основные параметры модели. Разрабатывается способ задания множества связей сложной интегрированной системы на основе теории графов.

Ключевые слова: сложные интегрированные системы; проектирование сложных интегрированных систем; теория нечетких множеств.

A MODEL OF COMPLEX INTEGRATED SYSTEMS

V. P. KOCHYN^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Abstract. In this paper, we consider the problem of the design of complex systems. The current state and evolution of information system design and creation processes are described. The main (classical and systematic) approaches to the design of complex systems, as well as an approach based on the theory of dynamic chaos are analysed. Based on the results of the analysis of existing approaches to the design of complex systems, the need to develop new models and methods for the design of complex integrated systems is justified. A model of complex integrated systems based on the fuzzy set theory is proposed. The main parameters of the model are defined. A method for constructing a set of connections of a complex integrated system based on the graph theory is developed.

Keywords: complex system; designing of complex integrated systems; fuzzy set theory.

Введение

Методологии проектирования различных информационных систем развивались с 1950-х гг. На начальном этапе, как правило, они относились к локальным информационным системам.

Быстрое развитие в конце 1990-х – начале 2000-х гг. локальных и глобальных сетей, в первую очередь интернета, создало предпосылки для резкого роста потребностей в различных информационных системах. По сути, процесс их разработки стал носить массовый характер, а сложность возрастала.

Образец цитирования:

Кочин ВП. Модель сложных интегрированных систем. Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2024;1:71–78.
EDN: NANGXU

For citation:

Kochyn VP. A model of complex integrated systems. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2024;1:71–78. Russian.
EDN: NANGXU

Автор:

Виктор Павлович Кочин – кандидат технических наук, доцент; проректор по учебной работе и интернационализации образования.

Author:

Viktor P. Kochyn, PhD (engineering), docent; vice-rector for academic affairs and internationalisation of education.
kochyn@bsu.by

Все вышесказанное способствовало повсеместному внедрению средств вычислительной техники в различные сферы деятельности государства и общества. На первоначальном этапе осуществлялись оцифровка существующих документов, автоматизация отдельных процессов. Одним из первых направлений автоматизации деловых процессов стала разработка информационных систем управления отдельными процессами предприятий, такими как ведение бухгалтерии, кадровый учет, учет материальных ценностей и т. д. По мере внедрения информационных технологий в производственные и деловые процессы росла сложность информационных систем и сервисов. По этой причине менялись подходы к проектированию информационных систем. Классические подходы уже не позволяли эффективно разрабатывать и внедрять сложные системы. Требовались новые подходы к проектированию, которые могли учитывать сложность систем, возможность их масштабирования, интеграции с другими системами. Вопросам проектирования сложных систем посвящена отдельная научно-методологическая дисциплина – системная инженерия.

Рост сложности информационных систем и сервисов, изменение подходов к проектированию информационных систем были связаны и с эволюцией процессов управления. Предлагаются следующие признаки, отличающие разные стадии эволюции процессов автоматизации и дальнейшей цифровизации различных сфер экономики и деятельности общества:

- автоматизация;
- компьютеризация;
- информатизация;
- цифровая трансформация.

Рассматривая эволюцию процессов автоматизации и цифровизации, можно сделать вывод о том, что степень проникновения цифровых технологий в различные сферы деятельности постоянно возрастает, и это сопровождается изменением систем управления и ростом сложности информационных систем.

Проектирование сложных систем

В настоящее время выделяют два основных подхода к проектированию информационных систем – классический и системный.

Можно отметить следующие отличительные особенности классического подхода:

- проектирование происходит снизу вверх, когда частное объединяется в общее;
- проектируемая система представляет собой сумму всех составных частей, при этом, как правило, не достигается синергетический эффект, при котором появляются новые свойства системы.

Таким образом, проектирование системы на базе классического подхода означает суммирование отдельных элементов в общую систему. Данный подход может быть использован для проектирования относительно простых систем, в которых возможно разделение и взаимно независимое рассмотрение отдельных сторон функционирования целой системы. Для сложных систем такая изолированность суммируемых элементов недопустима, так как приводит к значительным затратам ресурсов при разработке системы.

В общем виде системный подход отличают следующие особенности:

- проектирование осуществляется сверху вниз;
- проектируемая система также может разбиваться на различные подсистемы, которые представляют собой простые системы (в зависимости от выбранной методологии в качестве подсистем могут выступать функции, процессы, структуры и т. д.).

Выделяют следующие свойства системного подхода при проектировании сложных систем.

1. Иерархичность (сложная система разбивается на подсистемы, каждая подсистема рассматривается как отдельный элемент).
2. Структурность (каждая сложная система состоит из различных связанных между собой подсистем).
3. Взаимозависимость (свойства сложной системы проявляются только при взаимодействии составных частей между собой).
4. Множественность описания (сложная система описывается с помощью различных математических моделей).
5. Целостность изучаемой системы (свойства сложной системы изучаются на основе анализа составных подсистем).

В настоящее время существует множество способов и методов, реализующих системный подход.

Можно отметить еще один подход к проектированию сложных систем, основанный на теории динамического хаоса. Так, С. Манн использует теорию динамического хаоса при описании процессов государственного управления [1; 2].

Изначально разработанная как математическая концепция, теория хаоса, также известная как теория динамического хаоса или теория нелинейных математических систем, исследует законы и закономерности

случайных явлений в системах, которые должны подчиняться законам детерминизма. Такие явления (например, атмосферные явления или разнообразные турбулентные процессы в газовых и жидкостных средах, колебания в электрических и магнитно-механических устройствах и т. д.) часто обозначают терминами «динамический хаос» или «детерминированный хаос», чтобы отличить научный термин от общепринятого понятия хаоса как беспорядка. В соответствии с теорией хаоса сложные системы чрезвычайно зависят от первоначальных условий, и небольшие изменения в окружающей среде могут привести к непредсказуемым последствиям. Математические системы с хаотическим поведением являются детерминированными (т. е. подчиняются некоторому строгому закону) и в определенном смысле упорядоченными.

По результатам анализа существующих подходов к проектированию сложных систем можно сделать вывод о том, что они не учитывают (или учитывают не в полной мере) следующие аспекты: текущее состояние и эволюционное развитие элементов систем, интеграционные процессы между составными элементами сложных систем. По этой причине крайне актуальной задачей является разработка новых моделей и методик проектирования сложных систем. В качестве модели, которая будет учитывать указанные аспекты, предлагается модель сложных интегрированных систем. Рассмотренные подходы не в полной мере могут использоваться при проектировании сложных интегрированных систем. Каждый из этих подходов может являться частным случаем проектирования сложных интегрированных систем.

Модель сложных интегрированных систем

Существующие подходы к проектированию сложных информационных систем предназначены для управления различными бизнес-процессами. Как правило, такие системы позволяют управлять отдельными процессами, но при этом имеют интерфейсы взаимодействия с другими системами. При небольших размерах системы существующие подходы обеспечивают достаточно эффективное осуществление цифровой трансформации бизнес-процессов. Однако по мере роста размеров системы фрагментарность методов проектирования не позволяет создавать сложные интегрированные системы, которые дают возможность на системной основе оптимизировать цифровизацию бизнес-процессов.

Сложная интегрированная система – это система, состоящая из множества элементов и имеющая многослойную структуру в программно-технической и организационно-правовой плоскостях. Такая структура обладает большим количеством интегрированных связей как между множеством элементов, так и между слоями. В результате сложная интегрированная система приобретает новые функции и возможности, которые не свойственны отдельным элементам системы. Сложная интегрированная система может состоять как из независимых автономных систем, так и из подсистем и других составных элементов. Составные элементы могут включаться в сложную интегрированную систему полностью либо частично. На рис. 1 показана структурная схема сложной интегрированной системы.

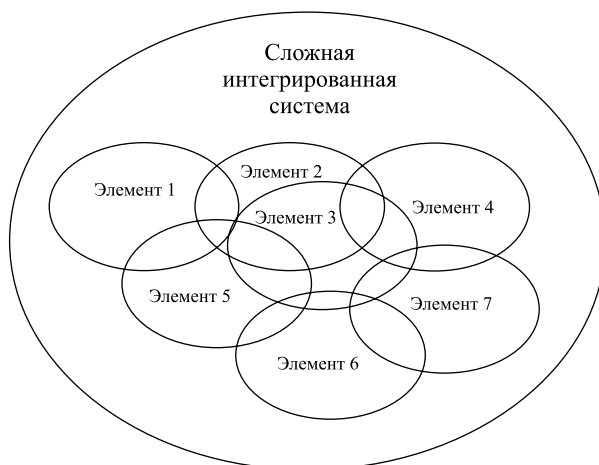


Рис. 1. Структура сложной интегрированной системы

Fig. 1. The structure of a complex integrated system

В широком смысле в качестве сложной интегрированной системы могут выступать различные процессы (например, строительство электростанций, создание сложной системы управления транспортными потоками, проектирование и строительство новых микрорайонов города) и объекты (любая социотехническая система, биологическая система и т. д.). В рамках данной работы объектом исследования являются информационные системы и платформы, а также процессы цифровой трансформации. В статье

рассматриваются процессы проектирования и создания информационных систем различного масштаба: уровня предприятия, учреждения, отрасли, страны и надстранового уровня. Практически все процессы цифровизации государства и общества предполагают создание и развитие сложных интегрированных систем. Главной задачей при разработке методики проектирования таких систем является выделение интеграционных процессов для различных систем, процессов и сервисов.

Проектирование сложных интегрированных систем – это процесс разработки сложных систем с учетом текущего состояния элементов, интеграционных процессов между элементами и функциями, а также выявления новых функций и свойств, полученных в результате создания сложной интегрированной системы.

Сложной интегрированной системе присущи все свойства сложных систем, рассмотренные ранее. С учетом этого любая сложная система является частным случаем сложной интегрированной системы. Как было отмечено выше, сложная интегрированная система имеет ряд отличительных свойств. Основными из них являются следующие свойства, которые в недостаточной степени учитываются известными подходами к проектированию сложных систем.

1. Интегрированность. В настоящее время для сложных систем существует понятие интероперабельности. Согласно ГОСТ Р 55062-2021¹ интероперабельность – это способность двух и более информационных систем или компонентов к обмену информацией и к использованию информации, полученной в результате обмена. Ключевое отличие интегрированности от интероперабельности состоит в том, что взаимодействие и интеграция осуществляются не только между самими системами, но и между различными слоями сложной интегрированной системы. Также свойство интегрированности характеризует степень принадлежности элемента сложной интегрированной системе. Сложными интегрированными системами могут являться системы и платформы различного уровня – от составных подсистем до надстрановых платформ. При их отнесении к сложным интегрированным системам основным критерием будет являться наличие свойства интегрированности.

2. Темпоральность. При проектировании сложных интегрированных систем необходимо учитывать текущее состояние отдельных элементов, которое обусловлено как эволюционным развитием различных процессов и систем, так и объединением составных элементов в одну систему. Данное свойство характеризует степень развития отдельных элементов сложной интегрированной системы.

Согласно определению сложная интегрированная система состоит из множества элементов, каждый из которых состоит из нескольких уровней (слоев). В зависимости от объекта проектирования количество уровней может варьироваться. Применительно к информационным системам можно выделить следующие основные уровни, как показано на рис. 2.

1. Технический уровень (характеризует совокупность технических средств и технологий отдельного элемента сложной интегрированной системы).

2. Программный уровень (описывает совокупность программных решений, интеграционных механизмов; на данном уровне реализуются механизмы API-взаимодействия элементов).

3. Организационный уровень (описывает организационную модель отдельного элемента; по мере роста сложности и размера системы роль данного уровня существенно возрастает).

4. Правовой уровень (определяет правовые основы (положения, приказы, указы, постановления и т. д.) функционирования элемента сложной интегрированной системы).

5. Экономический уровень (определяет стоимость разработки и внедрения, а также совокупного владения системой – один из основных критериев при проектировании сложных интегрированных систем, при этом стоимость сложной интегрированной системы не будет суммой стоимостей отдельных элементов).

Важной отличительной чертой сложной интегрированной системы является интегрированность, которая характеризуется наличием множества связей как между однородными, так и между разнородными плоскостями различных элементов. Количество связей определяется функциями и свойствами сложной интегрированной системы. Например, для реализации определенного функционала может быть только одна связь между правовым уровнем одного элемента и программным уровнем другого элемента (см. рис. 2).

Размер сложных интегрированных систем определяют следующие начальные условия.

1. Уровень процесса. В данном случае объектом проектирования является выделенный процесс предприятия, компании, отрасли, страны. При этом должна обеспечиваться интеграция с другими процессами проектируемого уровня.

2. Уровень предприятия, учреждения. В этом случае, как правило, платформы учитывают производственные и деловые процессы в организации в целом и включают в себя решения для интеграции с иными информационными системами и платформами.

¹ГОСТ Р 55062-2021. Информационные технологии. Интероперабельность. Основные положения. Введ. 30.04.2022. М.: Рос. ин-т стандартизации, 2021. IV, 7 с.

3. Уровень отрасли. В данном случае системы обычно учитывают производственные и деловые процессы в отрасли, а также включают в себя решения для интеграции с цифровыми решениями уровня предприятия, учреждения.

4. Уровень страны. Как правило, этот уровень включает в себя различные отраслевые и ведомственные платформы и системы, аккумулирует все основные информационные потоки и цифровые данные проектируемой платформы странового масштаба. На этом уровне наиболее явно проявляются свойства эмерджентности сложных интегрированных систем. Системы странового масштаба должны реализовывать комплексный подход к внедрению и использованию цифровых решений на уровне страны и интегрировать в себя системы уровня отрасли и предприятия, учреждения.

5. Надстрановой уровень. При проектировании сложных интегрированных систем на надстрановом уровне основные акценты смещаются в сторону согласования форматов данных, организационно-правовых аспектов интеграции. На этом уровне сложным интегрированным системам, как правило, присущи все их основные свойства, описанные выше. Данные системы характеризуются высоким уровнем комплексного взаимодействия между различными странами с использованием цифровых решений. Для разработки и внедрения таких решений необходимо унифицировать подходы по различным направлениям деятельности стран (торговля, налоговая сфера, медицина, образование и т. д.).

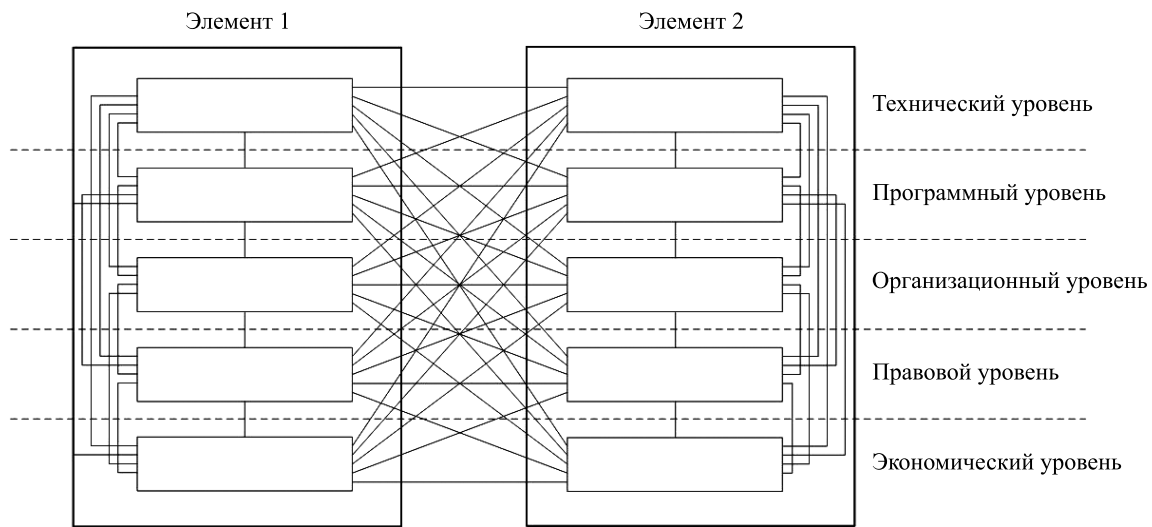


Рис. 2. Модель сложной интегрированной системы

Fig. 2. Model of a complex integrated system

Согласно определению сложная интегрированная система включает в себя множество элементов с различной степенью вхождения на разных уровнях:

$$P = \{P_1; P_2; \dots; P_n\},$$

где P – сложная интегрированная система; P_i – элементы (системы, подсистемы и др.), входящие в состав сложной интегрированной системы. В свою очередь,

$$P_i = \{O_1^i; O_2^i; O_3^i; O_4^i; O_5^i\},$$

где $O_1^i, O_2^i, O_3^i, O_4^i$ и O_5^i – соответственно технический, программный, организационный, правовой и экономический уровни P_i -го элемента сложной интегрированной системы.

Степень вхождения отдельного i -го элемента в сложную интегрированную систему P определяется функцией принадлежности μ_i :

$$P = \left\{ \frac{\mu_i(P_i)}{P_i} \right\},$$

где

$$\mu_i : P_i \rightarrow [0, 1]$$

характеризует степень принадлежности i -го элемента сложной интегрированной системе P на единичном отрезке от 0 до 1.

Таким образом, совокупность функций принадлежности сложной интегрированной системы определяет ее свойства и функциональные возможности, поэтому задание функции принадлежности – важный этап проектирования сложной интегрированной системы.

Следующим этапом проектирования сложной интегрированной системы является задание границ. Для этих целей будут использоваться понятия носителя и высоты сложной интегрированной системы P . Данные характеристики вместе с функцией принадлежности определяют границы сложной интегрированной системы.

Носителем S называется множество всех элементов сложной интегрированной системы P , которые имеют ненулевую функцию принадлежности:

$$S = \{p_i \in P_i : \mu_i(p_i) > 0\}.$$

Высота определяет верхнюю границу $\mu_i(p_i)$, т. е. максимальное значение функции принадлежности:

$$\sup \mu_i(p_i).$$

Таким образом, сложная интегрированная система будет определена как

$$P = \frac{\mu_1(p_1)}{p_1} + \frac{\mu_2(p_2)}{p_2} + \dots + \frac{\mu_i(p_i)}{p_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i(p_i)}{p_i},$$

где n – количество элементов, входящих в сложную интегрированную систему.

Для исключения избыточности элементов в сложной интегрированной системе необходимо применять операции пересечения и объединения элементов.

Пересечением элементов сложной интегрированной системы будет являться новый элемент, определяемый как

$$\mu = \min \{ \mu(p_i); \mu(p_j) \}.$$

Функция принадлежности этого элемента

$$\mu = \mu(p_i) \cdot \mu(p_j).$$

Объединением элементов сложной интегрированной системы будет являться новый элемент, определяемый как

$$\mu = \max \{ \mu(p_i); \mu(p_j) \}.$$

Как следует из определения, сложная интегрированная система имеет многослойную структуру, в которой существует множество интегрированных связей между элементами. По этой причине вместе с функцией принадлежности ключевым показателем сложной интегрированной системы выступает множество связей.

Определим, что каждый слой i -го элемента является вершиной связного графа. Таким образом, множество интегрированных связей сложной интегрированной системы можно представить в виде связного графа.

Существует три основных способа задания графов:

- графический;
- геометрический;
- аналитический.

В графическом способе вершины изображают точками на плоскости, а ребра – линиями, соединяющими соответствующие точки. Данный способ показан на рис. 2. В качестве вершин графов выступают уровни подсистем сложной интегрированной системы, а в качестве ребер – связи между уровнями.

В аналитическом способе граф задается с помощью двух множеств (множества вершин и множества ребер), а также предиката, который указывает, какие вершины с какими ребрами соединены:

$$G = (O; V),$$

$$O = \{O_1^1; O_2^1; \dots; O_5^n\},$$

$$V = \{V_1; V_2; \dots; V_m\},$$

$$K = \{O_j^i; V_t; O_a^z\},$$

где O – множество вершин, в качестве которых выступают уровни подсистем сложной интегрированной системы; V – множество ребер, в качестве которых выступают связи между уровнями подсистем; K – предикат.

Геометрический способ применяется при задании графа матрицей. Матрицей смежности для графа $G = (O; V)$ называется квадратная матрица $A = (a_{ij})$, строкам и столбцам которой соответствуют вершины

графа. Для описания связей между уровнями элементов сложной интегрированной системы будет использоваться неориентированный граф. Для неориентированного графа число a_{ij} равно числу ребер, инцидентных V_i и V_j . Например,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Способ описания графа связей сложной интегрированной системы будет определяться при проектировании конкретной системы исходя из ее размеров и опыта системного архитектора.

При создании сложных интегрированных систем больших размеров (отраслевых, государственных и надгосударственных) следует учитывать, что жизненный цикл таких систем должен быть длительным. Системы этого уровня должны развиваться эволюционным путем, а также в результате модификации (добавления новых и изменения существующих) элементов системы. При изменении структуры и состава сложной интегрированной системы системному архитектору необходимо актуализировать текущее состояние таких характеристик, как носитель, высота, функция принадлежности, и перестраивать систему связей в виде графов.

Таким образом, сложная интегрированная система – это система, которая состоит из множества элементов, имеет четкие границы, определяемые носителем, высотой и функцией принадлежности, выполняет конкретные функции и позволяет на системной основе осуществлять комплексную цифровизацию и оптимизацию различных (ведомственных, отраслевых, государственных и надгосударственных) процессов.

С помощью предложенного подхода были спроектированы и созданы следующие информационные платформы и сервисы:

- информационная система в составе комплекса средств автоматизации зала проведения заседаний Палаты представителей Национального собрания Республики Беларусь;
- интегрированная информационно-коммуникационная система управления университетом [3–5];
- республиканская информационно-образовательная среда [6].

Заключение

По мере развития информационных технологий менялись подходы к проектированию различных информационных систем. Во многом это было обусловлено ростом сложности информационных систем. Традиционные подходы к проектированию не учитывали рост сложности систем и количество интеграционных связей. Таким образом, известные подходы к проектированию информационных систем неэффективны для создания сложных интегрированных систем.

В качестве сложной интегрированной системы может выступать любая социотехническая система, биологическая система и т. д. В рамках данной работы объектом исследования являлись информационные системы и платформы, а также процессы цифровой трансформации различного уровня.

Для проектирования сложных интегрированных систем предложена формальная модель, основанная на методах нечеткой логики. Данная модель учитывает множество связей как между элементами, так и между уровнями.

Библиографические ссылки

1. Mann SR. Chaos theory and strategic thought. *Parameters* [Internet]. 1992 [cited 2023 October 10];22(1):54–68. Available from: <https://apps.dtic.mil/sti/pdfs/ADA528321.pdf>. DOI: 10.55540/0031-1723.1634.
2. Савченко АВ. «Теория хаоса» Стивена Манна и корпоративное управление. *Управление*. 2017;1:72–79. DOI: 10.12737/24704.
3. Кочин ВП, Жерело АВ. Проектирование защищенного отказоустойчивого облачного репозитория письменных работ обучающихся и сотрудников учреждений образования. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2021;3:104–108 (на англ.). DOI: 10.33581/2520-6508-2021-3-104-108.
4. Кочин ВП, Жерело АВ. Разработка образовательного защищенного облачного хранилища данных, интегрированного в инфраструктуру образовательного учреждения. *Вестник компьютерных и информационных технологий*. 2022;19(6):21–28. DOI: 10.14489/vkit.2022.06.pp.021-028.
5. Кочин ВП, Воротницкий ЮИ. *Проектирование и обеспечение безопасности интегрированных образовательных информационно-коммуникационных систем*. Минск: БГУ; 2022. 167 с.
6. Курбацкий АН, Воротницкий ЮИ, Зеков МГ, Кочин ВП. О концепции создания и развития республиканской информационно-образовательной среды. В: Тузиков АВ, Григянец РБ, Венгеров ВН, редакторы. *Развитие информатизации и государственной системы научно-технической информации (РИНТИ-2019). Доклады XVIII Международной конференции; 21 ноября 2019 г.; Минск, Беларусь*. Минск: Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси; 2019. с. 19–23.

References

1. Mann SR. Chaos theory and strategic thought. *Parameters* [Internet]. 1992 [cited 2023 October 10];22(1):54–68. Available from: <https://apps.dtic.mil/sti/pdfs/ADA528321.pdf>. DOI: 10.55540/0031-1723.1634.
2. Savchenko AV. Steven Mann's «chaos theory» and corporate governance. *Management (Russia)*. 2017;1:72–79. Russian. DOI: 10.12737/24704.
3. Kochyn VP, Zherelo AV. Designing a secure fail-safe cloud repository of paperworks of students and employees of educational institutions. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2021;3:104–108. DOI: 10.33581/2520-6508-2021-3-104-108.
4. Kochyn VP, Zherelo AV. Development of an educational secure cloud data storage integrated into the infrastructure of the Belarusian State University. *Vestnik komp'yuternykh i informatsionnykh tekhnologii*. 2022;19(6):21–28. Russian. DOI: 10.14489/vkit.2022.06.pp.021-028.
5. Kochyn VP, Vorotnitskii YuI. *Proektirovanie i obespechenie bezopasnosti integrirovannykh obrazovatel'nykh informatsionno-kommunikatsionnykh system* [Design and security of integrated educational information and communication systems]. Minsk: Belarusian State University; 2022. 167 p. Russian.
6. Kurbatskii AN, Vorotnitskii YuI, Zekov MG, Kochyn VP. [On the concept of creation and development of the republican information and educational environment]. In: Tuzikov AV, Grigyanets RB, Vengerov VN, editors. *Razvitie informatizatsii i gosudarstvennoi sistemy nauchno-tekhnicheskoi informatsii (RINTI-2019)*. *Doklady XVIII Mezhdunarodnoi konferentsii; 21 noyabrya 2019 g.; Minsk, Belarus'* [Development of informatisation and the state system of scientific and technical information (RINTI-2019). Proceedings of the 18th International conference; 2019 November 21; Minsk, Belarus]. Minsk: United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus; 2019. p. 19–23. Russian.

Получена 21.11.2023 / исправлена 15.02.2024 / принята 15.02.2024.
Received 21.11.2023 / revised 15.02.2024 / accepted 15.02.2024.

УДК 004.056.5

РАСШИРЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОСТИ СЛЕПЫХ АККУМУЛЯТОРОВ: КОНТЕКСТЫ

С. В. АГИЕВИЧ¹⁾, М. А. КАЗЛОВСКИЙ²⁾

¹⁾Научно-исследовательский институт прикладных проблем математики и информатики БГУ,
пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

²⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Аннотация. Слепой аккумулятор предназначен для децентрализованной загрузки авторизованными сторонами своих личных ключей с последующей выгрузкой открытых ключей. Выгружаемый открытый ключ связан с одной из сторон, хотя и неизвестно с какой. Схема слепого аккумулятора расширяется так, чтобы открытый ключ стороны был привязан к определенному контексту и этот ключ было вычислительно трудно связать с открытыми ключами той же стороны, полученными в других контекстах. Слепые аккумуляторы с контекстами оказываются полезными в различных сценариях электронного голосования, например при переголосовании. Предлагается реализация схемы слепого аккумулятора с контекстами, и обосновывается ее безопасность.

Ключевые слова: электронное голосование; переголосование; криптографический аккумулятор; слепой аккумулятор; распознавательная задача Диффи – Хеллмана.

Благодарность. Авторы выражают признательность анонимным рецензентам за ценные отзывы, которые помогли улучшить редакционное и техническое качество статьи.

Образец цитирования:

Агиевич СВ, Казловский МА. Расширение функциональности слепых аккумуляторов: контексты. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2024;1:79–85 (на англ.).
EDN: KMXHJP

For citation:

Agievich SV, Kazlouski MA. Extending the functionality of blind accumulators: contexts. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2024;1:79–85.
EDN: KMXHJP

Авторы:

Сергей Валерьевич Агиевич – кандидат физико-математических наук; заведующий научно-исследовательской лабораторией проблем безопасности информационных технологий.
Максим Анатольевич Казловский – аспирант кафедры математического моделирования и анализа данных факультета прикладной математики и информатики. Научный руководитель – С. В. Агиевич.

Authors:

Sergey V. Agievich, PhD (physics and mathematics); head of the IT security research laboratory.
agievich@bsu.by
<https://orcid.org/0000-0002-9413-8574>
Maksim A. Kazlouski, postgraduate student at the department of mathematical modelling and data analysis, faculty of applied mathematics and computer science.
kazlouskima@bsu.by
<https://orcid.org/0009-0004-4908-2841>

EXTENDING THE FUNCTIONALITY OF BLIND ACCUMULATORS: CONTEXTS

S. V. AGIEVICH^a, M. A. KAZLOUSKI^b

^aResearch Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics, Belarusian State University,
4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

^bBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: S. V. Agievich (agievich@bsu.by)

Abstract. Blind accumulators collect private keys of eligible entities in a decentralised manner not getting information about the keys. Once the accumulation is complete, an entity processes the resulting accumulator and derives a public key which refers to a private key previously added by this entity. We extend the blind accumulator scheme with the context functionality so that the derived key is bound to a specific context and this key is computationally hard to associate with public keys of other contexts. Blind accumulators with contexts are useful in various e-voting scenarios, for example in revoting. We provide an instantiation of the extended blind accumulator scheme and justify its security.

Keywords: e-voting; revoting; cryptographic accumulator; blind accumulator; decisional Diffie – Hellman problem.

Acknowledgements. The authors thank the anonymous referees for their valuable feedback that helped improve the editorial and technical quality of the paper.

Introduction

A blind accumulator is a cryptographic container that collects private keys and outputs (derives) the corresponding public keys. A private key is added to the accumulator in a provably correct manner while remaining secret, that is, known only to its owner. The derived public key is accompanied by a proof that it refers to some of the collected private keys while it is computationally hard to determine which one. In addition, blind accumulators are managed in the decentralised manner.

Blind accumulators are introduced in [1] as a tool for organising decentralised electronic voting (e-voting). Voters use the accumulated private keys to sign ballots, the derived public keys are used to verify signatures. The voter's public key acts as an immutable pseudonym, which can be used to prevent double voting or, conversely, allow multiple ballots to be cast with only the last one to be counted.

The last possibility, the so-called revoting, is an important feature of modern e-voting systems. The direct revoting based on blind accumulators have the following drawback: an adversary can track the change in the opinions of voters (while not violating their anonymity) by observing ballots. It is desirable to organise revoting in such a way that it is difficult to relate the original and subsequent ballots of the same voter.

This motivates us to extend the functionality of blind accumulators. In section «Contexts», we enrich interfaces of the blind accumulator algorithms by adding to some of them a parameter that describes a target context: regular voting, revoting, second round voting, etc. To ensure that voter's object in different contexts are hard to associate with each other, we introduce an additional security requirement called severance. In section «Instantiation», we propose an instantiation of the extended blind accumulator scheme. In section «Security», we justify the security of the proposed instantiation.

Contexts

Cryptographic accumulators are special encodings of tuples of objects. We write $\mathbf{a} = [S]$ to denote that an accumulator $\mathbf{a}$ encodes a tuple S . We interpret tuples as ordered multisets bringing standard set notations such as the curly braces, the membership ($\in$) and union ($\cup$) symbols.

A blind accumulator scheme introduced in [1] is a tuple of polynomial-time algorithms $\text{BACC} = (\text{Init}, \text{Add}, \text{PrvAdd}, \text{VfyAdd}, \text{Der}, \text{PrvDer}, \text{VfyDer})$ that are defined as follows.

1. The probabilistic algorithm $\text{Init}: 1^l \mapsto \mathbf{a}_0$ takes a security level $l \in \mathbb{N}$ (in the unary form) and outputs an initial accumulator $\mathbf{a}_0 = [\emptyset]$.

We assume that $\mathbf{a}_0$ implicitly refers to l and public parameters (such as a description of an elliptic curve) and that these parameters implicitly define a set of private keys SKeys and a set of public keys PKeys .

2. The deterministic algorithm $\text{Add}: (\mathbf{a}, sk) \mapsto \mathbf{a}'$ takes an accumulator $\mathbf{a} = [S]$ and a private key sk , and outputs an updated accumulator $\mathbf{a}' = [S \cup \{sk\}]$.

We assume that $\mathbf{a}$ is an output of either `Init` or some previous call to `Add`. This ensures the consistency of $\mathbf{a}$, i. e. that it is constructed as

$$\mathbf{a} \leftarrow \text{Add}\left(\dots \text{Add}\left(\text{Add}\left(\text{Add}(\mathbf{a}_0, sk_1), sk_2\right), \dots\right), sk_n\right), \mathbf{a}_0 \leftarrow \text{Init}(1'), sk_i \in \text{SKeys},$$

and, therefore, is an incrementally built encoding $[S]$ of the multiset $S = \{sk_1, sk_2, \dots, sk_n\}$.

We also assume that the public parameters referenced in the initial accumulator $\mathbf{a}_0$ are passed to all accumulators incrementally built from it.

3. The probabilistic algorithm `PrvAdd`: $(\mathbf{a}, \mathbf{a}', sk) \mapsto \alpha$ takes accumulators $\mathbf{a}, \mathbf{a}'$ and a private key sk , and generates a proof α that $\mathbf{a}' = \text{Add}(\mathbf{a}, sk)$.

4. The deterministic algorithm `VfyAdd`: $(\mathbf{a}, \mathbf{a}', \alpha) \mapsto b$ takes accumulators $\mathbf{a}, \mathbf{a}'$ and a proof α that $\mathbf{a}' = \text{Add}(\mathbf{a}, sk)$ for some private key sk . The algorithm verifies the proof and outputs either $b = 1$ for acceptance or $b = 0$ for rejection.

5. The deterministic algorithm `Der`: $(\mathbf{a}, sk) \mapsto pk \mid \perp$ takes an accumulator $\mathbf{a}$ and a private key sk , and either derives a public key pk or outputs the error symbol $\perp$.

We require that for a consistent $\mathbf{a} = [S]$, $\text{Der}(\mathbf{a}, sk) = \perp$ if and only if $sk \notin S$.

6. The probabilistic algorithm `PrvDer`: $(\mathbf{a}, pk, sk) \mapsto \delta$ takes an accumulator $\mathbf{a}$, a private key sk and a public key pk , and generates a proof δ that $pk \leftarrow \text{Der}(\mathbf{a}, sk)$.

7. The deterministic algorithm `VfyDer`: $(\mathbf{a}, pk, \delta) \mapsto b$ takes an accumulator $\mathbf{a}$, a public key pk and a proof δ that $pk = \text{Der}(\mathbf{a}, sk)$ for some private key sk . The algorithm verifies the proof and outputs either $b = 1$ for acceptance or $b = 0$ for rejection.

Further details on the algorithms and additional requirements are presented in [1].

To support contexts, we extend the interfaces of the last three algorithms. We describe a context with a non-empty binary word (string) c and use it as an additional input parameter of `Der`, `PrvDer` and `VfyDer`. Denote the resulting extension of `BACC` by `BACC1`.

The algorithm `Der` of `BACC1` takes a triple $(\mathbf{a}, sk, c)$ and outputs a public key pk bound to the context c . We require that if $sk \xleftarrow{\$} \text{SKeys}$, $sk \in S$ and $\mathbf{a} = [S]$, then $pk \leftarrow \text{Der}(\mathbf{a}, sk)$ has a fixed distribution D over `PKeys` regardless of S and c .

Hereinafter we write $r_1, r_2, \dots \xleftarrow{L} R$ to denote that $r_1, r_2, \dots$ are chosen independently at random from a set R according to a probability distribution L and denote by $\$$ the uniform distribution.

The paper [1] defines four security requirements for blind accumulators, namely, consistency, soundness, blindness, and unlinkability. To extend these notions to `BACC1`, we modify the last three requirements as follows:

- in the definition of soundness, the algorithms $\mathcal{A}$ and $\mathcal{E}$ take the additional input c that is transferred to `VfyDer` and `Der`, respectively;
- in the definition of blindness, the algorithms $\mathcal{S}_2$ takes the additional input c that is transferred to `Der` and `PrvDer`;
- in the definition of unlinkability, the game G takes the additional input c that is repeated when calling `Der`.

The consistency, soundness, blindness, and unlinkability do not guarantee that the public keys derived in different contexts are hard to associate with each other. To ensure such guarantees, we introduce an additional requirement called *severance*.

Consider an algorithm $\mathcal{A}$ that takes a consistent accumulator $\mathbf{a} = [S]$ of security level l , different context strings c, c' and public keys pk, pk' . The first public key is derived from $\mathbf{a}$ using $sk \in S$ in the context c . The algorithm $\mathcal{A}$ guesses if the second public key is also derived from $\mathbf{a}$ using sk but in the context c' . The algorithm returns 1 (true) or 0 (false). We allow all elements of S except sk to be predefined and thus known to $\mathcal{A}$. Therefore, it is enough to consider only the simplest case $S = \{sk\}$.

Definition 1. A scheme `BACC1` provides *severance* if for any different context strings c, c' and for any probabilistic polynomial-time algorithm $\mathcal{A}$ described above it holds that

$$\text{Adv}(\mathcal{A}) = \left| \mathbf{P} \left\{ \mathcal{A}(\mathbf{a}, c, c', pk, pk') = 1 : \begin{array}{l} \mathbf{a}_0 \leftarrow \text{Init}(1'), sk \xleftarrow{\$} \text{SKeys}, \mathbf{a} \leftarrow \text{Add}(\mathbf{a}_0, sk) \\ pk \leftarrow \text{Der}(\mathbf{a}, sk, c), pk' \leftarrow \text{Der}(\mathbf{a}, sk, c') \end{array} \right\} - \right|$$

$$- \mathbf{P} \left\{ \mathcal{A}(\mathbf{a}, c, c', pk, pk') = 1 : \begin{array}{l} \mathbf{a}_0 \leftarrow \text{Init}(\mathbf{1}'), sk \xleftarrow{\$} \text{SKeys}, \mathbf{a} \leftarrow \text{Add}(\mathbf{a}_0, sk) \\ pk \leftarrow \text{Der}(\mathbf{a}, sk, c), pk' \xleftarrow{D} \text{PKeys} \end{array} \right\}$$

is negligible in l .

Instantiation

In [1], an instantiation of the BACC scheme, called BACC-DH, is proposed. We modify BACC-DH to support the BACC1 functionality. The resulting instantiation is called BACC1-DH.

In BACC1-DH, a cyclic group $\mathbb{G}_q$ of large prime order q is used. We write this group additively and denote by $\mathbb{G}_q^*$ the set of nonzero elements of $\mathbb{G}_q$. We also use the ring $\mathbb{Z}_q$ of residues of integers modulo q and the set $\mathbb{Z}_q^*$ of nonzero (invertible) residues. The group $\mathbb{G}_q$ is constructed in the algorithm BACC1-DH.Init. An input security level l determines the bit length of q . Once $\mathbb{G}_q$ is constructed, the set of private keys SKeys and the set of public keys PKeys are defined as $\mathbb{Z}_q^*$ and $\mathbb{G}_q^*$, respectively. We use hash functions H and H_1 that map to these sets.

The initial accumulator $\mathbf{a}_0$ and all subsequent accumulators are words in the alphabet $\mathbb{G}_q^*$. The set of non-empty words in an alphabet Σ is denoted by Σ^+ . An empty word is denoted by $\perp$. The notation $(\mathbb{G}_q^*)^+$ is shortened to $\mathbb{G}_q^{*+}$. For a word $\mathbf{w}$, let $|\mathbf{w}|$ be its length and $\text{most}(\mathbf{w})$ be the word obtained from $\mathbf{w}$ by dropping its last symbol. For $V \in \mathbb{G}_q^*$ and $u \in \mathbb{Z}_q^*$, let uV denote the u -multiple of V . A word that obtained from $\mathbf{w} \in \mathbb{G}_q^{*+}$ by replacing each symbol by its u -multiple is denoted as $u\mathbf{w}$. Two words in $\mathbb{G}_q^*$ can be added symbol-wise to obtain a word in $\mathbb{G}_q$.

In BACC1-DH, the algorithms Add, PrvAdd and VfyAdd are the same as in BACC-DH. The remaining algorithms are updated, the corrections are highlighted in frames in the listings below.

Algorithm BACC1-DH.Init

Input: 1^l (security level).

Output: $\mathbf{a}_0 \in \mathbb{G}_q^{*+}$ (initial accumulator).

Steps:

1. Construct a group $\mathbb{G}_q$ of prime order q such that $C_1 2^l < q < C_2 2^l$, where C_1, C_2 are some constants.
2. Construct hash functions $H : \{0, 1\}^* \rightarrow \mathbb{Z}_q$, $H_1 : \{0, 1\}^+ \cup \{\perp\} \rightarrow \mathbb{G}_q^*$.
3. $G \leftarrow H_1(\perp)$.
4. $\mathbf{a}_0 \leftarrow G$.
5. Return $\mathbf{a}_0$.

The descriptions of $\mathbb{G}_q$ and G can be interpreted as additional outputs of the algorithm. We allow H to process arbitrary input data assuming they are pre-encoded into a binary word.

Algorithm BACC1-DH.Der

Input: $\mathbf{a} \in \mathbb{G}_q^{*+}$ (accumulator), $u \in \mathbb{Z}_q^*$ (private key), $c \in \{0, 1\}^+$ (context).

Output: $V \in \mathbb{G}_q^*$ (public key).

Steps:

1. Parse $\mathbf{a} = G_0 G_1 \dots G_n$.
2. Find $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ such that $uG_i = G_0$. If such i does not exist, return $\perp$.
3. $C \leftarrow H_1(c)$.
4. Return uC .

Algorithm BACC1-DH.PrvDer

Input: $\mathbf{a} \in \mathbb{G}_q^{*+}$ (accumulator), $u \in \mathbb{Z}_q^*$ (private key), $V \in \mathbb{G}_q^*$ (public key), $c \in \{0, 1\}^+$ (context).

Output: $\delta \in \mathbb{Z}_q^+ \times \mathbb{Z}_q^+$ (proof).

Steps:

1. Parse $\mathbf{a} = G_0 G_1 \dots G_n$.
2. Find $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ such that $uG_i = G_0$. If such i does not exist, return $(0, 0)$.
3. $C \leftarrow H_1(c)$.
4. For $j = 1, 2, \dots, n, j \neq i$:
 - a) $h_j, s_j \xleftarrow{\$} \mathbb{Z}_q$;
 - b) $\mathbf{r}_j \leftarrow s_j(G_j G_0) + h_j(CV)$.
5. $k_i \xleftarrow{\$} \mathbb{Z}_q$.
6. $\mathbf{r}_i \leftarrow k_i(G_i G_0)$.
7. $h_i \leftarrow \left(H(\mathbf{a}, \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \dots \mathbf{r}_n, V) - \sum_{j \neq i} h_j \right) \bmod q$.
8. $s_i \leftarrow (k_i - u h_i) \bmod q$.
9. $\delta \leftarrow (h_1 h_2 \dots h_n, s_1 s_2 \dots s_n)$.
10. Return δ .

Algorithm `BACcl-DH.VfyDer`

Input: $\mathbf{a} \in \mathbb{G}_q^{*+}$ (accumulator), $V \in \mathbb{G}_q^*$ (public key), $\delta \in \mathbb{Z}_q^+ \times \mathbb{Z}_q^+$ (proof), $c \in \{0, 1\}^+$ (context).

Output: 1 (accept) or 0 (reject).

Steps:

1. Parse $\delta \leftarrow (\mathbf{h}, \mathbf{s})$. If $|\mathbf{h}| \neq |\mathbf{s}|$ or $|\mathbf{a}| \neq |\mathbf{h}| + 1$, return 0.
2. Parse $\mathbf{a} = G_0 G_1 \dots G_n$, $\mathbf{h} = h_1 h_2 \dots h_n$ and $\mathbf{s} = s_1 s_2 \dots s_n$.
3. $C \leftarrow H_1(c)$.
4. For $j = 1, 2, \dots, n$:
 - a) $\mathbf{r}_j \leftarrow s_j(G_j G_0) + h_j(CV)$.
5. If $H(\mathbf{a}, \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \dots \mathbf{r}_n, V) \not\equiv h_1 + h_2 + \dots + h_n \pmod{q}$, return 0.
6. Return 1.

Security

In this section, we justify the security of `BACcl-DH` examining five security requirements stated in [1] and section «Contexts».

The security definitions in [1] allow runtime environments to be managed. We use this to replace the hash functions H and H_1 with random oracles [2] and permit these oracles to be programmed. Technically, this is achieved by manipulating the random tape of the algorithm `BACcl-DH.Init` which constructs H and H_1 . The random oracle responds to a fresh input μ with a random output h and repeats a previous output when an input is repeated. Programming the oracle consists in assigning a given random output h to a given input μ . Conflicts can potentially occur when programming, namely, the input μ may already be associated with an output $h' \neq h$. Fortunately, we avoid conflicts.

To justify the unlinkability and severance, we use the well-known DDH (decisional Diffie – Hellman) problem [3]. This problem is specified with respect to a cyclic group $\mathbb{G}_q$ with a generator G and consists in deciding for a given tuple (G, uG, vG, wG) , $u, v, w \in \mathbb{Z}_q^*$, if $w \equiv uv \pmod{q}$. The algorithm $\mathcal{B}$ that solves DDH guesses if this is indeed the case and outputs either 1 (true) or 0 (false).

Definition 2. Let $\mathcal{G}$ be an algorithm that constructs a cyclic group $\mathbb{G}_q$ and its generator G given an input l . The DDH problem is hard with respect to $\mathcal{G}$ if for any polynomial-time algorithm $\mathcal{B}$ operating on $\mathbb{G}_q$ and G constructed by calling $\mathcal{G}(l)$ it holds that the advantage

$$\text{Adv}(\mathcal{B}) = \left| \mathbf{P} \left\{ \mathcal{B}(G, uG, vG, uvG) = 1 : u, v \xleftarrow{\$} \mathbb{Z}_q^* \right\} - \mathbf{P} \left\{ \mathcal{B}(G, uG, vG, wG) = 1 : u, v, w \xleftarrow{\$} \mathbb{Z}_q^* \right\} \right|$$

is negligible in l . The probabilities here are over a random tape of $\mathcal{B}$ and $\mathcal{G}$ and over a random choice of u, v and w .

Theorem. The BACC1-DH instantiation of the BACC1 scheme satisfies the requirements of consistency, soundness, blindness, unlinkability, and severance in the programmable random oracle model provided that DDH is hard with respect to BACC1-DH.Init .

Proof. Let us examine security requirements each time switching to the scope of the corresponding security definition. For full details of the first four security definitions we refer the reader to [1].

Consistency. Let $\mathcal{E}$ control a random tape of the algorithm $\mathcal{A}$ and be able to restart (rewind) the algorithm with the tape repeating. This is possible since $\mathcal{E}$ is allowed to manage the runtime environment of $\mathcal{A}$. Let $\mathcal{A}$ return a proof $(\mathbf{r}, s)$ with $s = (k - hu) \bmod q$ on the first run. On the second run, the random tape is repeated and, therefore, the word $\mathbf{r}$ as well as the input $(\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{r})$ to the oracle H are also repeated. The oracle is programmed to return a fresh random output h' on this input. Since h' differs from the first output h with probability $\frac{q-1}{q}$, after $\frac{q}{q-1} = 1 + O\left(\frac{1}{2^l}\right)$ restarts on average $\mathcal{E}$ gets $h' \neq h$ and the corresponding $s' = (k - h'u) \bmod q$. After that $\mathcal{E}$ determines

$$u = (s - s')(h' - h)^{-1} \bmod q.$$

We use here the standard arguments for Σ -protocols [4; 5].

Soundness. It is justified similarly to the consistency. A private key u is determined by two different outputs of H on the same input $(\mathbf{a}, \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \dots \mathbf{r}_n, V)$.

Blindness. The algorithm $\mathcal{S}_1$ generates $h, s \xleftarrow{\$} \mathbb{Z}_q$, constructs $\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{s}\mathbf{a} + h \text{ most}(\mathbf{a}')$ and programs H , that is, assigns the output h to the input $(\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{r})$. The algorithm $\mathcal{S}_1$ returns a pair $(\mathbf{r}, s)$ as a proof α . This proof is accepted by BACC-DH.VfyAdd and is statistically indistinguishable from the standard proof generated by BACC-DH.PrvAdd provided that H is a random oracle.

The algorithm $\mathcal{S}_2$ is constructed similarly.

Unlinkability. Let us construct an algorithm $\mathcal{B}$ that solves an instance (G, uG, vG, wG) of DDH by playing the game $G(l', n, m, c)$ for the role of $\mathcal{V}$.

The algorithm $\mathcal{B}$ acts as follows.

1. Programs the runtime environment when calling BACC1-DH.Init in step 1 of the game:
 - uses $\mathbb{G}_q$ from the instance of DDH ;
 - assigns $H_1(\perp) = G$ and $H_1(c) = vG$.
2. Generates $j \xleftarrow{\$} \{1, 2, \dots, m\}$.
3. Processes BACC1-DH.Add and BACC1-DH.PrvAdd calls made by $\mathcal{A}$ and determines used private keys. To do this, $\mathcal{B}$ restarts $\mathcal{A}$ several times and extracts private keys from the provided proofs acting as the algorithm $\mathcal{E}$ that justifies the consistency. It takes $m + O\left(\frac{m}{2^l}\right)$ restarts on average to determine all the keys.
4. Makes its own calls to BACC1-DH.Add (the order of calls is determined by $\mathcal{A}$) numbered $1, \dots, j-1, j+1, \dots, m$ using keys $u_1, \dots, u_{j-1}, u_{j+1}, \dots, u_m \xleftarrow{\$} \mathbb{Z}_q^*$ generated by itself. The calls are accompanied by proofs constructed using BACC1-DH.PrvAdd .
5. Makes the j call to BACC1-DH.Add in a non-standard way embedding the private key u hidden in the instance (G, uG, vG, wG) . To do this, performs transitions $G_i \mapsto uG_i$, using the knowledge of $d_i = \log_G G_i$ and determining uG_i as $d_i(uG)$. The discrete logarithms d_i are indeed known to $\mathcal{B}$, since they are products of its own private keys and $\mathcal{A}$ private keys extracted from the proofs.
6. Accompanies the j call to BACC1-DH.Add with the a proof of consistency indistinguishable from the real one and obtained by programming the oracle H . Here $\mathcal{B}$ acts as the algorithm $\mathcal{S}_1$ that justifies the blindness. Note that the inputs of H when constructing proofs of consistency at different steps of accumulator management are certainly different since the length of the accumulators as words increases. Therefore, there are no conflicts when programming.
7. Processes the final accumulator $\mathbf{a} = G_0 G_1 \dots G_n$ and generates public keys. The public keys $V_i, i \neq j$, are constructed using BACC1-DH.Der as $u_i H_1(c) = u_i vG$. The public key V_j is constructed by the instance of DDH as wG . This is the correct public key with $w = uv \bmod q$ and a random public key with a random w . Let b be the indicator of the correctness of V_j . The bit b is unknown to $\mathcal{B}$ and is not used by it (unlike $\mathcal{V}$).
8. Passes $\mathcal{A}$ the public keys $(V_1, V_2, \dots, V_m)$, waits the guess $\hat{b}$ and outputs it as its own guess to $\text{DDH}(G, uG, vG, wG)$.

The algorithm $\mathcal{B}$ requires $m + O\left(\frac{m}{2^l}\right)$ restarts of $\mathcal{A}$ on average and additional time polynomial in l . Thus, if $\mathcal{A}$ is polynomial, then $\mathcal{B}$ is expected polynomial. At the same time,

$$\mathbf{Adv}(\mathcal{B}) = \left| \mathbf{P}\{\mathcal{B} = 1 | b = 1\} - \mathbf{P}\{\mathcal{B} = 1 | b = 0\} \right| = \left| \mathbf{P}\{\hat{b} = 1 | b = 1\} - \mathbf{P}\{\hat{b} = 1 | b = 0\} \right| = \mathbf{Adv}(\mathcal{A}).$$

This means that if DDH is hard, i. e. $\mathbf{Adv}(\mathcal{A})$ is negligible, then $\mathbf{Adv}(\mathcal{B})$ is also negligible and the unlinkability is ensured.

Severance. Let us construct an algorithm $\mathcal{B}$ that solves an instance (P, uP, vP, wP) of DDH using an algorithm $\mathcal{A}$ from definition 1. The algorithm $\mathcal{A}$ takes an accumulator $\mathbf{a}$ of capacity 1, different context strings $c, c' \in \{0, 1\}^+$ and public keys V, V' .

The algorithm $\mathcal{B}$ acts as follows.

1. Generates $r \xleftarrow{\$} \mathbb{Z}_q^*$ and calculates $G \leftarrow rP$.
2. Simulates the call $\mathbf{a}_0 \leftarrow \text{BACC1-DH.Init}(l')$ using $\mathbb{G}_q$ from the instance of DDH and assigning $H_1(\perp) = G$ so that $\mathbf{a}_0 = G$. Additionally assigns $H_1(c) = P, H_1(c') = vP$.
3. Simulates the call $\mathbf{a} \leftarrow \text{BACC1-DH.Add}(\mathbf{a}_0, u)$ assigning $\mathbf{a} = G'G$, where $G' = uG = r(uP)$. Accompanies $\mathbf{a}$ with a proof of consistency indistinguishable from the real one and obtained by programming the oracle H . Here $\mathcal{B}$ acts as the algorithm $\mathcal{S}_1$ that justifies the blindness.
4. Using the instance of DDH, constructs public keys $V = uP = uH_1(c)$ and $V' = wP$. Note that V is the correct public key derived from $\mathbf{a}$ using u in the context c . If $w = uv \bmod q$, then $V' = u(vP) = uH_1(c')$ is the correct public key derived from $\mathbf{a}$ using u in the context c' . If w is random, then V' is a random public key. Let b be the indicator of the correctness of V' . The bit b is unknown to $\mathcal{B}$ and has to be guessed by it.
5. Passes $\mathcal{A}$ the tuple $(\mathbf{a}, c, c', V, V')$, waits the guess $\hat{b}$ and outputs it as its own guess to DDH (P, uP, vP, wP) .

If $\mathcal{A}$ is polynomial, then $\mathcal{B}$ is also polynomial. At the same time, repeating the computations above, $\mathbf{Adv}(\mathcal{B}) = \mathbf{Adv}(\mathcal{A})$. This means that if DDH is hard, i. e. $\mathbf{Adv}(\mathcal{B})$ is negligible, then $\mathbf{Adv}(\mathcal{A})$ is also negligible and the severance is ensured.

References

1. Agievich S. Blind accumulators for e-voting. In: Nemoga K, Ploszek R, Zajac P, editors. *Proceedings of Central European conference on cryptology – CECC'22; 2022 June 26–29; Smolenice, Slovakia*. Bratislava: Mathematical Institute of the Slovak Academy of Sciences; 2022. p. 15–18.
2. Bellare M, Rogaway P. Random oracles are practical: a paradigm for designing efficient protocols. In: Denning DE, Pyle R, Ganesan R, Sandhu RS, Ashby V, editors. *CCS'93. Proceedings of the 1st ACM conference on computer and communications security; 1993 November 3–5; Fairfax, USA*. New York: Association for Computing Machinery; 1993. p. 62–73. DOI: 10.1145/168588.168596.
3. Boneh D. The decision Diffie – Hellman problem. In: Buhler JP, editor. *Algorithmic number theory. Proceedings of the Third International symposium, ANTS-III; 1998 June 21–25; Portland, USA*. Berlin: Springer; 1998. p. 48–63 (Goos G, Hartmanis J, van Leeuwen J, editors. Lecture notes in computer science; volume 1423). DOI: 10.1007/BFb0054851.
4. Cramer RJF. *Modular design of secure yet practical cryptographic protocols* [dissertation on the Internet]. Amsterdam: Universiteit van Amsterdam; 1997 [cited 2023 December 1]. 187 p. Available from: <https://ir.cwi.nl/pub/21438/21438A.pdf>.
5. Damgård I. *On Σ -protocols* [Internet]. Aarhus: University of Aarhus; 2002 [cited 2023 December 1]. 22 p. Available from: <https://cs.au.dk/~ivan/Sigma.pdf>.

Received 08.12.2023 / revised 13.03.2024 / accepted 13.03.2024.

УДК 517.977

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ КАНОНИЧЕСКИХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

А. Г. АГАМАЛИЕВ¹⁾, К. Б. МАНСИМОВ^{1), 2)}, Р. О. МАСТАЛИЕВ^{2), 3)}

¹⁾Бакинский государственный университет,

ул. Академика Захида Халилова, 23, AZ 1148, г. Баку, Азербайджан

²⁾Институт систем управления Министерства науки и образования Азербайджанской Республики,
ул. Бахтияра Вагабзаде, 68, AZ 1141, г. Баку, Азербайджан

³⁾Университет Азербайджана, ул. Джейхуна Гаджибейли, 71, AZ 1007, г. Баку, Азербайджан

Аннотация. Рассмотрена краевая задача для одного класса линейных гиперболических интегро-дифференциальных уравнений первого порядка. С помощью аналогов матрицы Коши и резольвенты получены представления решения исследуемой краевой задачи.

Ключевые слова: линейное гиперболическое интегро-дифференциальное уравнение; представление решений; аналог матрицы Коши; уравнения Вольтерры второго рода.

Благодарность. Авторы выражают глубокую признательность рецензенту за очень полезные замечания.

REPRESENTATIONS OF SOLUTIONS OF FIRST ORDER LINEAR CANONICAL HYPERBOLIC INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

A. G. AGAMALIYEV^a, K. B. MANSIMOV^{a, b}, R. O. MASTALIYEV^{b, c}

^aBaku State University, 23 Akademik Zahid Khalilov Street, Baku AZ 1148, Azerbaijan

^bInstitute of Control Systems, Ministry of Science and Education of the Republic of Azerbaijan,
68 Bakhtiyar Vahabzadeh Street, Baku AZ 1141, Azerbaijan

^cAzerbaijan University, 71 Jeyhun Hajibeyli Street, Baku AZ 1007, Azerbaijan

Corresponding author: R. O. Mastaliyev (rashad.mastaliyev@au.edu.az)

Образец цитирования:

Агамалиев АГ, Мансимов КБ, Масталиев РО. Представления решения линейных канонических гиперболических интегро-дифференциальных уравнений первого порядка. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2024;1:86–92. EDN: VSDRMZ

For citation:

Agamaliyev AG, Mansimov KB, Mastaliyev RO. Representations of solutions of first order linear canonical hyperbolic integro-differential equations. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2024;1:86–92. Russian. EDN: VSDRMZ

Авторы:

Агамали Гулу Агамалиев – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры высшей математики механико-математического факультета.

Камил Байрамали Мансимов – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой математической кибернетики факультета прикладной математики и кибернетики¹⁾, заведующий лабораторией методов управления сложными динамическими системами²⁾.

Рашид Огтай Масталиев – кандидат математических наук, доцент; ведущий научный сотрудник лаборатории методов управления сложными динамическими системами²⁾, заведующий кафедрой математики и информатики факультета информационных и коммуникационных технологий³⁾.

Authors:

Agamly G. Agamaliyev, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of higher mathematics, faculty of mechanics and mathematics.

mastaliyevrashad@gmail.com

Kamil B. Mansimov, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of mathematical cybernetics, faculty of applied mathematics and cybernetics^a, and head of the laboratory of methods of control of complex dynamic systems^b.

kamilbmansimov@gmail.com

Rashad O. Mastaliyev, PhD (mathematics), docent; leading researcher at the laboratory of methods of control of complex dynamic systems^b and head of the department of mathematics and informatics, faculty of information and communication technologies^c.

rashad.mastaliyev@au.edu.az

Abstract. In this paper, we consider the boundary value problem for one class of linear hyperbolic integro-differential equations of the first order. With the help of analogies of the Cauchy matrix and the resolvent, representations of the solution of the considered boundary value problem are obtained.

Keywords: linear hyperbolic integro-differential equations; representation of solutions; analog of the Cauchy matrix; second order Volterra equations.

Acknowledgements. The authors express their deep gratitude to the reviewer for his very useful comments.

Введение

Различные вопросы биологии, физики, техники предполагают исследование интегро-дифференциальных уравнений и постановку для них определенных краевых условий [1; 2]. При качественном и конструктивном исследовании задач оптимального управления существенную роль играют представления решений линейных или линеаризованных уравнений, описывающих рассматриваемые задачи оптимального управления [3–6].

В работе [7] найдены в явном виде интегральные представления решений краевой задачи для системы линейных гиперболических уравнений первого порядка. В публикации [8] аналогичная задача рассмотрена для системы разностных уравнений типа Россера [9].

В дальнейшем установленные представления были применены как удобный математический аппарат для исследования нелинейных задач оптимального управления, описываемых подобными гиперболическими уравнениями первого порядка (см. [10]).

В предлагаемой работе получены представления решения краевой задачи для системы линейных канонических гиперболических интегро-дифференциальных уравнений первого порядка.

Постановка задачи

В области $D = [t_0, t_1] \times [x_0, x_1]$ рассмотрим систему линейных канонических гиперболических интегро-дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} z_t(t, x) &= A_1(t, x)z + A_2(t, x)y + \\ &+ \int_{t_0}^t (A_3(\tau, x)z(\tau, x) + A_4(\tau, x)y(\tau, x))d\tau + f_1(t, x) + \int_{t_0}^t f_2(\tau, x)d\tau, (t, x) \in D, \\ y_x(t, x) &= B_1(t, x)z + B_2(t, x)y + \\ &+ \int_{x_0}^x (B_3(t, s)z(t, s) + B_4(t, s)y(t, s))ds + g_1(t, x) + \int_{x_0}^x g_2(t, s)ds, (t, x) \in D \end{aligned} \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} z(t_0, x) &= a(x), x \in X \in [x_0, x_1], \\ y(t, x_0) &= b(t), t \in T \in [t_0, t_1]. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $f_1(t, x)$, $g_1(t, x)$ – заданные непрерывные по совокупности переменных n - и m -мерные вектор-функции; $A_i(t, x)$, $B_i(t, x)$, $i = \overline{1, 4}$, – заданные непрерывные по совокупности переменных матричные функции соответствующих размерностей; $f_2(\tau, x)$, $g_2(t, s)$ – заданные непрерывные по совокупности аргументов скалярные функции; $a(x)$, $b(t)$ – заданные непрерывные n - и m -мерные вектор-функции.

Целью настоящей работы является нахождение представления решения краевой задачи (1), (2).

Формула для представления решения краевой задачи

Интерпретируя первое уравнение системы (1) как обыкновенное линейное неоднородное интегро-дифференциальное уравнение, относительно $z(t, x)$ аналогично формуле Коши (см., например, [11, с. 17]) имеем

$$\begin{aligned} z(t, x) = & F(t, t_0, x)z(t_0, x) + \int_{t_0}^t F(t, \tau, x)A_2(\tau, x)y(\tau, x)d\tau + \\ & + \int_{t_0}^t \left[\int_{\tau}^t F(t, \alpha, x)A_4(\alpha, x)d\alpha \right] y(\tau, x)d\tau + \int_{t_0}^t F(t, \tau, x)f_1(\tau, x)d\tau + \\ & + \int_{t_0}^t \left[\int_{\tau}^t F(t, \alpha, x)f_2(\alpha, x)d\alpha \right] d\tau. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $F(t, \tau, x) - (n \times n)$ -мерная матричная функция, являющаяся решением задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(t, \tau, x)}{\partial \tau} = & -F(t, \tau, x)A_1(\tau, x) + \int_{\tau}^t F(t, \alpha, x)A_3(\alpha, x)d\alpha, \\ F(t, t, x) = & E_1, \end{aligned}$$

где $E_1 - (n \times n)$ -мерная единичная матрица.

Решение $y(t, x)$ второго уравнения системы (1) допускает представление

$$\begin{aligned} y(t, x) = & \Phi(x, x_0, t)y(t, x_0) + \int_{x_0}^x \Phi(x, s, t)B_1(t, s)z(t, s)ds + \\ & + \int_{x_0}^x \left[\int_s^x \Phi(x, \beta, t)B_3(t, \beta)d\beta \right] z(t, s)ds + \int_{x_0}^x \Phi(x, s, t)g_1(t, s)ds + \\ & + \int_{x_0}^x \left[\int_s^x \Phi(x, \beta, t)g_2(t, \beta)d\beta \right] ds. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\Phi(x, s, t) - (m \times m)$ -мерная матричная функция, являющаяся решением задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(x, s, t)}{\partial s} = & -\Phi(x, s, t)B_2(t, s) + \int_s^x \Phi(x, \beta, t)B_4(t, \beta)d\beta, \\ \Phi(x, x, t) = & E_2, \end{aligned}$$

где $E_2 - (m \times m)$ -мерная единичная матрица.

Из представлений (3) и (4) ясно, что

$$\begin{aligned} z(t, s) = & F(t, t_0, s)z(t_0, s) + \int_{t_0}^t K(t, \tau, s)y(\tau, s)d\tau + \\ & + \int_{t_0}^t F(t, \tau, s)f_1(\tau, s)d\tau + \int_{t_0}^t \left[\int_{\tau}^t F(t, \alpha, s)f_2(\alpha, s)d\alpha \right] d\tau, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} y(\tau, x) = & \Phi(x, x_0, \tau)y(\tau, x_0) + \int_{x_0}^x M(x, s, \tau)z(\tau, s)ds + \\ & + \int_{x_0}^x \Phi(x, s, \tau)g_1(\tau, s)ds + \int_{x_0}^x \left[\int_s^x \Phi(x, \beta, \tau)g_2(\tau, \beta)d\beta \right] ds. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь по определению

$$\begin{aligned} K(t, \tau, s) = & F(t, \tau, s)A_2(\tau, s) + \int_{\tau}^t F(t, \alpha, s)A_4(\alpha, s)d\alpha, \\ M(x, s, \tau) = & \Phi(x, s, \tau)B_1(\tau, s) + \int_s^x \Phi(x, \beta, \tau)B_3(\tau, \beta)d\beta. \end{aligned}$$

Учитывая формулы (5) и (6), в представлениях (3) и (4) соответственно будем иметь

$$\begin{aligned}
 z(t, x) = & F(t, t_0, x)a(x) + \int_{t_0}^t F(t, \tau, x)f_1(\tau, x)d\tau + \\
 & + \int_{t_0}^t \left[\int_{\tau}^t F(t, \alpha, x)f_2(\alpha, x)d\alpha \right] d\tau + \int_{t_0}^t K(t, \tau, x)\Phi(x, x_0, \tau)b(\tau)d\tau + \\
 & + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x K(t, \tau, x)M(x, s, \tau)z(\tau, s)dsd\tau + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x K(t, \tau, x)\Phi(x, s, \tau)g_1(\tau, s)dsd\tau + \\
 & + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \left[\int_s^x K(t, \tau, x)\Phi(x, \beta, \tau)g_2(\tau, \beta)d\beta \right] dsd\tau,
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 y(t, x) = & \Phi(x, x_0, t)b(t) + \int_{x_0}^x \Phi(x, s, t)g_1(t, s)ds + \\
 & + \int_{x_0}^x \left[\int_s^x \Phi(x, \beta, t)g_2(t, \beta)d\beta \right] ds + \int_{x_0}^x M(x, s, t)F(t, t_0, s)a(s)ds + \\
 & + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x M(x, s, t)K(t, \tau, s)y(\tau, s)dsd\tau + \int_{x_0}^x \int_{t_0}^t M(x, s, t)F(t, \tau, s)f_1(\tau, s)dsd\tau + \\
 & + \int_{x_0}^x \int_{t_0}^t \left[\int_{\tau}^t M(x, s, t)F(t, \alpha, s)f_2(\alpha, s)d\alpha \right] dsd\tau.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Полагая, что

$$\begin{aligned}
 q(t, x) = & F(t, t_0, x)a(x) + \int_{t_0}^t F(t, \tau, x)f_1(\tau, x)d\tau + \\
 & + \int_{t_0}^t \left[\int_{\tau}^t F(t, \alpha, x)f_2(\alpha, x)d\alpha \right] d\tau + \int_{t_0}^t K(t, \tau, x)\Phi(x, x_0, \tau)b(\tau)d\tau + \\
 & + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x K(t, \tau, x)\Phi(x, s, \tau)g_1(\tau, s)dsd\tau + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \left[\int_s^x K(t, \tau, x)\Phi(x, \beta, \tau)g_2(\tau, \beta)d\beta \right] dsd\tau, \\
 r(t, x) = & \Phi(x, x_0, t)b(t) + \int_{x_0}^x \Phi(x, s, t)g_1(t, s)ds + \\
 & + \int_{x_0}^x \left[\int_s^x \Phi(x, \beta, t)g_2(t, \beta)d\beta \right] ds + \int_{x_0}^x M(x, s, t)F(t, t_0, s)a(s)ds + \\
 & + \int_{x_0}^x \int_{t_0}^t M(x, s, t)F(t, \tau, s)f_1(\tau, s)dsd\tau + \int_{x_0}^x \int_{t_0}^t \left[\int_{\tau}^t M(x, s, t)F(t, \alpha, s)f_2(\alpha, s)d\alpha \right] dsd\tau,
 \end{aligned}$$

перепишем равенства (7) и (8) соответственно в виде

$$z(t, x) = \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x K(t, \tau, x)M(x, s, \tau)z(\tau, s)dsd\tau + q(t, x), \tag{9}$$

$$y(t, x) = \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x M(x, s, t)K(t, \tau, s)y(\tau, s)dsd\tau + r(t, x). \tag{10}$$

Уравнения (9) и (10) являются двумерными линейными неоднородными интегральными уравнениями типа Вольтерры второго рода.

Полагая, что

$$Q_1(t, x; \tau, s) = K(t, \tau, x)M(x, s, \tau),$$

$$Q_2(t, x; \tau, s) = M(x, s, t)K(t, \tau, s),$$

запишем уравнения (9) и (10) в виде

$$z(t, x) = \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x Q_1(t, x; \tau, s) z(\tau, s) ds d\tau + q(t, x), \quad (11)$$

$$y(t, x) = \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x Q_2(t, x; \tau, s) y(\tau, s) ds d\tau + r(t, x). \quad (12)$$

Пусть $R_1(t, x; \tau, s)$ и $R_2(t, x; \tau, s)$ – соответственно $(n \times n)$ -мерная и $(m \times m)$ -мерная матричные функции, являющиеся решениями матричных интегральных уравнений

$$R_1(t, x; \tau, s) = \int_{\tau}^t \int_s^x Q_1(t, x; \alpha, \beta) R_1(\alpha, \beta; \tau, s) d\alpha d\beta - Q_1(t, x; \tau, s),$$

$$R_2(t, x; \tau, s) = \int_{\tau}^t \int_s^x Q_2(t, x; \alpha, \beta) R_2(\alpha, \beta; \tau, s) d\alpha d\beta - Q_2(t, x; \tau, s).$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Решения $z(t, x)$, $y(t, x)$ интегральных уравнений (11) и (12) допускают представления

$$z(t, x) = q(t, x) - \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x R_1(t, x; \tau, s) q(\tau, s) ds d\tau, \quad (13)$$

$$y(t, x) = r(t, x) - \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x R_2(t, x; \tau, s) r(\tau, s) ds d\tau \quad (14)$$

соответственно.

Доказательство. Нужно показать, что представления (13) и (14) удовлетворяют равенствам

$$z(t, x) - \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x Q_1(t, x; \tau, s) z(\tau, s) ds d\tau - q(t, x) = 0, \quad (15)$$

$$y(t, x) - \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x Q_2(t, x; \tau, s) y(\tau, s) ds d\tau - r(t, x) = 0 \quad (16)$$

соответственно.

Докажем справедливость равенства (15). Подставляя представление (13) в равенство (15), имеем

$$\begin{aligned} & z(t, x) - \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x Q_1(t, x; \tau, s) z(\tau, s) ds d\tau - q(t, x) = \\ & = q(t, x) - \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x R_1(t, x; \tau, s) q(\tau, s) ds d\tau - \\ & - \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x Q_1(t, x; \tau, s) \left[q(\tau, s) - \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x R_1(\tau, s; \alpha, \beta) q(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \right] ds d\tau - q(t, x) = \\ & = - \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x R_1(t, x; \tau, s) q(\tau, s) ds d\tau - \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x Q_1(t, x; \tau, s) q(\tau, s) ds d\tau + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \left[\int_{t_0}^{\tau} \int_{x_0}^s Q_1(t, x; \tau, s) R_1(\tau, s; \alpha, \beta) q(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \right] ds d\tau = \\
 & = - \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x [R_1(t, x; \tau, s) + Q_1(t, x; \tau, s)] q(\tau, s) ds d\tau + \\
 & + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \left[\int_{\tau}^t \int_s^x Q_1(t, x; \alpha, \beta) R_1(\alpha, \beta; \tau, s) q(\tau, s) d\alpha d\beta \right] ds d\tau = \\
 & = - \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \left[R_1(t, x; \tau, s) + Q_1(t, x; \tau, s) - \int_{\tau}^t \int_s^x Q_1(t, x; \alpha, \beta) R_1(\alpha, \beta; \tau, s) d\alpha d\beta \right] q(\tau, s) ds d\tau = 0.
 \end{aligned}$$

Теперь докажем справедливость равенства (16). Подставляя представление (14) в равенство (16), имеем

$$\begin{aligned}
 & y(t, x) - \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x Q_2(t, x; \tau, s) y(\tau, s) ds d\tau - r(t, x) = \\
 & = r(t, x) - \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x R_2(t, x; \tau, s) r(\tau, s) ds d\tau - \\
 & - \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x Q_2(t, x; \tau, s) \left[r(\tau, s) - \int_{t_0}^{\tau} \int_{x_0}^s R_2(\tau, s; \alpha, \beta) r(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \right] ds d\tau - r(t, x) = \\
 & = - \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x R_2(t, x; \tau, s) r(\tau, s) ds d\tau - \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x Q_2(t, x; \tau, s) r(\tau, s) ds d\tau + \\
 & + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \left[\int_{t_0}^{\tau} \int_{x_0}^s Q_2(t, x; \tau, s) R_2(\tau, s; \alpha, \beta) r(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \right] ds d\tau = \\
 & = - \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x [R_2(t, x; \tau, s) + Q_2(t, x; \tau, s)] r(\tau, s) ds d\tau + \\
 & + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \left[\int_{\tau}^t \int_s^x Q_2(t, x; \alpha, \beta) R_2(\tau, s; \alpha, \beta) d\alpha d\beta \right] r(\alpha, \beta) ds d\tau = \\
 & = - \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \left[R_2(t, x; \tau, s) + Q_2(t, x; \tau, s) - \int_{\tau}^t \int_s^x Q_2(t, x; \alpha, \beta) R_2(\alpha, \beta; \tau, s) d\alpha d\beta \right] r(\tau, s) ds d\tau = 0.
 \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Заключение

Таким образом, найдено представление решения краевой задачи для линейных канонических гиперболических интегро-дифференциальных уравнений первого порядка, носящее конструктивный характер.

Библиографические ссылки

1. Нахушев АМ. *Уравнения математической биологии*. Москва: Высшая школа; 1995. 301 с.
2. Нахушев АМ. *Задачи со смещением для уравнений в частных производных*. Москва: Наука; 2006. 287 с.
3. Островский ГМ, Волин ЮМ. *Моделирование сложных химико-технологических схем*. Москва: Химия; 1975. 312 с.

4. Васильев ОВ, Терлецкий ВА. К оптимизации одного класса управляемых систем с распределенными параметрами. В: Медведев ГА, редактор. *Оптимизация динамических систем*. Минск: БГУ; 1978. с. 26–30.
5. Егоров АИ, Знаменская ЛН. *Введение в теорию управления системами с распределенными параметрами*. Санкт-Петербург: Лань; 2017. 292 с.
6. Фурсиков АВ. *Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения*. Новосибирск: Научная книга; 1999. XII, 352 с. (Университетская серия; том 5).
7. Агамалиев АГ, Мансимов КБ, Масталиев РО. О представлении решений линейных канонических гиперболических уравнений первого порядка. *Вестник Бакинского университета. Серия физико-математических наук*. 2017;3:14–20.
8. Кадырова СШ, Мансимов КБ. Об одном представлении решений системы управления типа Россера. *Доклады Национальной академии наук Азербайджана*. 2014;70(1):15–18.
9. Roesser R. A discrete state-space model for linear image processing. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1975;20(1):1–10. DOI: 10.1109/TAC.1975.1100844.
10. Кадырова СШ, Мансимов КБ. Об оптимальности квазиособых управлений в одной граничной задаче управления дискретными системами типа Россера. *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2019;49:4–13. DOI: 10.17223/19988605/49/1.
11. Габасов РФ, Кириллова ФМ. *Оптимизация линейных систем. Методы функционального анализа*. Богданов ЮС, редактор. Минск: Издательство БГУ имени В. И. Ленина; 1973. 248 с.

References

1. Nakhushev AM. *Uravneniya matematicheskoi biologii* [Equations of the mathematical biology]. Moscow: Vysshaya shkola; 1995. 301 p. Russian.
2. Nakhushev AM. *Zadachi so smeshcheniem dlya uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [The mixed problem for the partial differential equations]. Moscow: Nauka; 2006. 287 p. Russian.
3. Ostrovskii GM, Volin YuM. *Modelirovanie slozhnykh khimiko-tekhnologicheskikh skhem* [Modelling of complex chemical-technological schemes]. Moscow: Khimiya; 1975. 312 p. Russian.
4. Vasil'ev OV, Terletskii VA. [On the optimisation of controlled systems with distributed parameters]. In: Medvedev GA, editor. *Optimizatsiya dinamicheskikh sistem* [Optimisation of dynamic systems]. Minsk: Belarusian State University; 1978. p. 26–30. Russian.
5. Egorov AI, Znamenskaya LN. *Vvedenie v teoriyu upravleniya sistemami s raspredelennymi parametrami* [Introduction to the theory of control systems with distributed parameters]. Saint Petersburg: Lan'; 2017. 292 p. Russian.
6. Fursikov AV. *Optimal'noe upravlenie raspredelennymi sistemami. Teoriya i prilozheniya* [Optimal control of distributed systems. Theory and applications]. Novosibirsk: Nauchnaya kniga; 1999. XII, 352 p. (Universitetskaya seriya; volume 5). Russian.
7. Agamaliyev AG, Mansimov KB, Mastaliyev RO. On the representation of the solution of the first order linear canonical hyperbolic equations. *News of Baku University. Series of Physico-mathematical Sciences*. 2017;3:14–20. Russian.
8. Gadirova SSh, Mansimov KB. [On response formula solution the Roesser type equations]. *Reports of the National Academy of Sciences of Azerbaijan*. 2014;70(1):15–18. Russian.
9. Roesser R. A discrete state-space model for linear image processing. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1975;20(1):1–10. DOI: 10.1109/TAC.1975.1100844.
10. Gadirova SSh, Mansimov KB. About optimality quasi-singular controls in one boundary control problem of Roesser type discrete system. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2019;49:4–13. Russian. DOI: 10.17223/19988605/49/1.
11. Gabasov RF, Kirillova FM. *Optimizatsiya lineinykh sistem. Metody funktsional'nogo analiza* [Optimisation linear systems. Functional analysis methods]. Bogdanov YuS, editor. Minsk: Izdatel'stvo BGU imeni V. I. Lenina; 1973. 248 p. Russian.

Получена 22.08.2023 / исправлена 15.02.2024 / принята 15.02.2024.
Received 22.08.2023 / revised 15.02.2024 / accepted 15.02.2024.

АННОТАЦИИ ДЕПОНИРОВАННЫХ В БГУ РАБОТ INDICATIVE ABSTRACTS OF THE PAPERS DEPOSITED IN BSU

УДК 004.432.045:004.738.5Java(075.8)

Дигрис А. В. **Прикладное программирование** [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 1-31 04 04 «Аэрокосмические радиоэлектронные и информационные системы и технологии» / А. В. Дигрис ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2023. 228 с. : ил. Библиогр.: с. 228. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/305704>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 07.12.2023, № 011007122023.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Прикладное программирование» предназначен для студентов специальности 1-31 04 04 «Аэрокосмические радиоэлектронные и информационные системы и технологии». В ЭУМК содержится краткое описание разновидностей платформ Java и интегрированных сред разработки Java-приложений, излагаются основы построения объектно ориентированных программ на Java. Рассматриваются структурные элементы языка программирования Java, потоки ввода-вывода информации, работа с массивами и коллекциями. Описываются принципы и средства построения графического пользовательского интерфейса на основе библиотеки Swing, порядок обработки событий, создание изображений с использованием Java 2D. Рассматриваются основы построения на Java многопоточных приложений, средства создания и основные характеристики потоков выполнения, организация взаимодействия между ними.

УДК 004.6(075.8) + 004.81.032.26(075.8)

Яцков Н. Н. **Интеллектуальный анализ данных** [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец.: 1-98 01 01-02 «Компьютерная безопасность (по направлениям)», 1-31 04 02 «Радиофизика», 1-31 04 03 «Физическая электроника» / Н. Н. Яцков ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2023. 124 с. : ил. Библиогр.: с. 124. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/306842>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 18.12.2023, № 011218122023.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Интеллектуальный анализ данных» предназначен для студентов специальностей 1-98 01 01-02 «Компьютерная безопасность (по направлениям)», 1-31 04 02 «Радиофизика», 1-31 04 03 «Физическая электроника». В ЭУМК содержатся основные определения и задачи интеллектуального анализа данных, методы статистического и кластерного анализа, нейронных сетей, стохастического поиска, классификации, поиска ассоциативных правил, визуализации многомерных данных.

УДК 004(075.8)

Бородавка И. Н. **Информационные технологии** [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец.: 6-05-0311-01 «Экономика», 6-05-0412-01 «Менеджмент», 6-05-0411-02 «Финансы и кредит», 6-05-0311-05 «Экономическая информатика», 6-05-1036-02 «Экономическая безопасность» / И. Н. Бородавка, Т. А. Бронская ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2023. 124 с. : ил. Библиогр.: с. 124. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/307030>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 22.12.2023, № 012222122023.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) предназначен для студентов 1-й степени высшего образования специальностей 6-05-0311-01 «Экономика», 6-05-0412-01 «Менеджмент», 6-05-0411-02 «Финансы и кредит», 6-05-0311-05 «Экономическая информатика», 6-05-1036-02 «Экономическая безопасность». Содержание ЭУМК предполагает изучение следующих вопросов: базовых понятий информационных технологий, функциональных элементов компьютеров и компьютерных сетей, назначения и состава системного и прикладного программного обеспечения, основ программирования в среде офисных приложений на языке VBA; понятия базы данных (БД) и подходов к проектированию БД, функциональных возможностей систем управления БД, систем обработки многопользовательских БД; принципов организации корпоративных информационных систем (КИС) в предметной области, стандартов в области КИС, технологий моделирования бизнес-процессов, понятия реинжиниринга бизнес-процессов, основных методов и средств защиты информации в КИС.

УДК 339.138:004.735.8(075.8)

Интернет-маркетинг [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 7-06-0533-04 «Математика и компьютерные науки», профилизации «Веб-программирование и интернет-технологии» / Е. В. Кремень [и др.] ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2023. 280 с. : ил. Библиогр.: с. 276–277. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/307110>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 26.12.2023, № 012526122023.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Интернет-маркетинг» предназначен для магистрантов специальности 7-06-0533-04 «Математика и компьютерные науки», профилизации «Веб-программирование и интернет-технологии». ЭУМК содержит тексты лекций, планы лабораторных занятий, перечень контрольных вопросов, списки рекомендованной литературы.

УДК 004.424(075.8)

Расолько Г. А. Методы программирования [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-06 «Математика» / Г. А. Расолько, Е. В. Кремень, Ю. А. Кремень ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2023. 235 с. : ил. Библиогр.: с. 233–234. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/307111>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 26.12.2023, № 012626122023.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Методы программирования» предназначен для студентов специальности 6-05-0533-06 «Математика». ЭУМК содержит тексты лекций, планы лабораторных занятий, перечень контрольных вопросов, тесты, списки рекомендованной литературы.

УДК 519.2(075.8)

Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец.: 1-25 01 02 «Экономика», 1-25 01 04 «Финансы и кредит», 1-25 02 12 «Экономическая информатика», 1-26 02 02 «Менеджмент», 1-96 01 02 «Экономическая безопасность» / Е. И. Васенкова [и др.] ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2023. 216 с. : ил., табл. Библиогр.: с. 206–208. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/308511>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 31.01.2024, № 000531012024.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) предназначен для студентов 1-й степени высшего образования специальностей 1-25 01 02 «Экономика», 1-25 01 04 «Финансы и кредит», 1-25 02 12 «Экономическая информатика», 1-26 02 02 «Менеджмент», 1-96-01 02 «Экономическая безопасность». Содержание ЭУМК предполагает изучение следующих вопросов: элементов комбинаторики, случайных событий и действий над ними, случайных величин (одномерных и многомерных), функций случайных величин, закона больших чисел, центральной предельной теоремы, выборочного метода в математической статистике, точечного и интервального оценивания параметров, проверки статистических гипотез, регрессионного и дисперсионного анализа.

УДК 519.22(075.8)

Матейко О. М. Основы математической статистики [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец.: 1-21 03 02, 6-05-0222-02 «Регионоведение» / О. М. Матейко, О. А. Велько ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2023. 147 с. : ил. Библиогр.: с. 145–147. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/308788>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 06.02.2024, № 000906022024.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Основы математической статистики» предназначен для студентов специальностей 1-21 03 02, 6-05-0222-02 «Регионоведение». ЭУМК включает лекционный материал, задания для практических занятий, примерные задания для управляемой самостоятельной работы студентов, тестовые задания, контрольные работы, вопросы для подготовки к зачету, примерный тематический план, содержание учебного материала, список литературы.

УДК 004.8(075.8)

Журавков М. А. Технологии искусственного интеллекта и интеллектуальные системы компьютерного моделирования и инженерных расчетов. Вводный курс [Электронный ресурс] : учеб. пособие / М. А. Журавков ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 177 с. : ил. Библиогр.: с. 170–173. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/309072>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 09.02.2024, № 001409022024.

Учебное пособие представляет собой вводный курс в такое актуальное современное направление, как технологии искусственного интеллекта (ИИ) и их применение в интеллектуальных системах компьютерного моделирования и инженерных расчетов.

В пособии рассматриваются основные определения, понятия технологий ИИ, составные части ИИ через собственное восприятие и интерпретацию автора применительно к разработке интеллектуальных систем компьютерного моделирования и инженерных расчетов для различных классов задач механики.

Данное пособие используется, в частности, при чтении таких специальных курсов для студентов отделения «Механика. Математическое моделирование» механико-математического факультета БГУ, как «Основы CAD- и CAE-технологий в механике. Основы технологий ИИ в механике», «Компьютерное моделирование».

Материал данного курса лекций представляет интерес как для специалистов в области теоретической и прикладной механики, математического моделирования, численных методов, так и для широкого круга читателей, интересующихся применением современных методов численного и компьютерного моделирования в прикладных науках.

УДК 004.42(075.8)

Расолько Г. А. Технологии программирования [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-06 «Математика» / Г. А. Расолько, Е. В. Кремень, Ю. А. Кремень ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2023. 360 с. : ил. Библиогр.: с. 359–360. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/309201>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 13.02.2024, № 001913022024.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Технологии программирования» предназначен для студентов специальности 6-05-0533-06 «Математика». ЭУМК содержит тексты лекций, планы лабораторных занятий, перечень контрольных вопросов, тесты, списки рекомендованной литературы.

УДК 519.6(075.8)

Численные методы [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 1-31 03 08 «Математика и информационные технологии (по направлениям)», направлений спец.: 1-31 03 08-01 «Веб-программирование и интернет-технологии», 1-31 03 08-02 «Математическое и программное обеспечение мобильных устройств» : в 2 ч. Ч. 1. Интерполирование функций и приближенное вычисление интегралов / М. В. Игнатенко ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2023. 149 с. : ил. Библиогр.: с. 147–149. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/309206>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 14.02.2024, № 002014022024.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Численные методы» разработан в соответствии с образовательным стандартом 1-й степени высшего образования для специальности 1-31 03 08 «Математика и информационные технологии (по направлениям)». ЭУМК предназначен для информационно-методического обеспечения преподавания дисциплины «Численные методы» для студентов данной специальности. В ЭУМК содержатся конспект лекций, перечень лабораторных занятий с материалами для работы, задания по управляемой самостоятельной работе.

УДК 517(075.8)

Математический анализ [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец.: 6-05-0533-06 «Математика», 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки», 6-05-0533-08 «Компьютерная математика и системный анализ», 6-05-0533-13 «Механика и математическое моделирование» / Н. В. Бровка [и др.] ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2023. 380 с. : ил. Библиогр.: с. 379–380. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/309275>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 19.02.2024, № 002119022024.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Математический анализ» предназначен для студентов специальностей 6-05-0533-06 «Математика», 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки», 6-05-0533-08 «Компьютерная математика и системный анализ», 6-05-0533-13 «Механика и математическое моделирование». В ЭУМК содержатся лекционный материал, практический материал, раздел контроля знаний и вспомогательный материал.

УДК 004.421(075.8) + 004.422.63(075.8)

Алгоритмы и структуры данных [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец.: 6-05-0533-09 «Прикладная математика», 6-05-0533-10 «Информатика», 6-05-0533-11 «Прикладная информатика», 1-31 03 04 «Информатика», направлений спец.: 1-31 03 03-01 «Прикладная математика (научно-производственная деятельность)», 1-31 03 07-01 «Прикладная информатика (программное обеспечение компьютерных систем)» : в 3 ч. Ч. 1 / Е. П. Соболевская [и др.] ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2023. 183 с. : ил. Библиогр.: с. 182–183. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/309510>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 19.02.2024, № 002319022024.

Электронный учебно-методический комплекс «Алгоритмы и структуры данных» (часть 1) предназначен для студентов специальностей 6-05-0533-09 «Прикладная математика», 6-05-0533-10 «Информатика», 6-05-0533-11 «Прикладная информатика», 1-31 03 04 «Информатика», направлений специальностей 1-31 03 03-01 «Прикладная математика (научно-производственная деятельность)», 1-31 03 07-01 «Прикладная информатика (программное обеспечение компьютерных систем)». Содержание учебного материала включает разделы «Анализ сложности алгоритмов», «Рекуррентные соотношения для алгоритмов поиска и внутренней сортировки», «Методы разработки эффективных алгоритмов». Изложение соответствует программе учебной дисциплины.

УДК 004.432.045C++(075.8)

Кравчук А. С. Язык C++. Императивное программирование [Электронный ресурс] : учеб. материалы для студентов спец. 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки (по профилизациям)» / А. С. Кравчук, А. И. Кравчук, Е. В. Кремень ; БГУ. 2-е изд., с изм. и доп. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 389 с. : ил. Библиогр.: с. 389. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/309869>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 28.02.2024, № 002728022024.

Издание ориентировано на развитие и закрепление у студентов профессиональных навыков использования императивного программирования как одного из основных инструментов решения прикладных задач. Это объясняется тем, что студент обязан хорошо освоить методологию использования функций, прежде чем он начнет понимать, как применяются методы при создании объектов классов и работе с ними. В пособие включен такой методический материал, как таблицы ручного счета простейших алгоритмов и сопоставление кода простейших программ на C++ и Pascal. Издание адресуется прежде всего студентам, а также всем, кто хотел бы научиться приемам программирования при решении стандартных задач.

УДК 004.432.045C++(075.8) + 004.428(075.8)

Кравчук А. С. Язык C++. Объектно ориентированное программирование. Библиотека STL [Электронный ресурс] : учеб. материалы для студентов спец. 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки (по профилизациям)» / А. С. Кравчук, А. И. Кравчук, Е. В. Кремень ; БГУ. 2-е изд., с изм. и доп. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 291 с. : ил. Библиогр.: с. 291. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/309870>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 28.02.2024, № 002828022024.

Рассматриваются классы, различные аспекты работы с ними. Подробно рассматривается механизм наследования, использования виртуальных функций, а также абстрактных классов. Даются основы построения диаграмм классов, использования лямбда-функций и обработки исключительных ситуаций. Обширный раздел посвящен описанию основ работы с STL: рассмотрены некоторые контейнеры и алгоритмы, правила создания функторов и основы работы с ними. В каждой теме приводятся необходимый теоретический материал и код программ, что существенно ускоряет усваивание материала. Издание адресуется прежде всего студентам, а также всем, кто хотел бы научиться приемам объектно ориентированного программирования.

УДК 004.432.045C++(075.8)

Кравчук А. С. Язык C++. Сборник тематических заданий и примеров программ [Электронный ресурс] : учеб. материалы для студентов спец. 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки (по профилизациям)» / А. С. Кравчук, А. И. Кравчук, Е. В. Кремень ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2024. 171 с. : табл. Библиогр.: с. 171. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/309875>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 28.02.2024, № 002928022024.

Сборник заданий предназначен для проработки приемов как императивного, так и объектно ориентированного программирования на языке C++. Издание содержит задачи для обучения студентов решению задач разветвляющихся, циклических алгоритмов, использованию функций, решению задач с использованием простейших численных методов, а также обработке массивов, применению принципов объектно ориентированного программирования, наследованию. Достаточно большой раздел посвящен описанию основ работы с STL: рассмотрены некоторые контейнеры, правила создания функторов и основы работы с ними. В каждой теме приводятся примеры решения типовых задач и варианты индивидуальных заданий. Издание ориентировано в первую очередь на тех, кто не имеет опыта практического программирования на языке C++. Адресуется студентам, а также всем, кто хотел бы научиться приемам программирования при решении стандартных задач.

УДК 744:62:004.92(075.8)

Яшкин В. И. **Инженерная графика** [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 1-31 04 07 «Физика наноматериалов и нанотехнологий» / В. И. Яшкин, Ю. В. Сидоренко, И. А. Карпович ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2023. 168 с.: ил. Библиогр.: с. 165. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/310025>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 06.03.2024, № 003906032024.

В электронном учебно-методическом комплексе «Инженерная графика» излагаются аспекты технического черчения, изучения интерфейса и графических возможностей CAD- и CAE-систем, чтения конструкторской документации на основе Единой системы конструкторской документации.

Приводятся аппаратные и программные основы 2D- и 3D-моделирования с использованием характеристик цветовых пространств, алгоритмические основы машинной графики и распознавания образов.

СОДЕРЖАНИЕ

ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

<i>Нагорная Т. Р., Расулов К. М.</i> О решении краевой задачи Пуанкаре для обобщенных гармонических функций в односвязных областях	6
--	---

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

<i>Тукмаков Д. А.</i> Численное исследование распространения ударной волны из однородного газа в газовзвесь с периодическим распределением дисперсной фазы	16
--	----

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

<i>Игнатенко М. В.</i> Квадратурные формулы типа Гаусса с диагональной весовой матрицей для матричнозначных функций	29
---	----

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

<i>Демиденко В. М.</i> Условия эффективной разрешимости квадратичной задачи выбора. Часть 1...	45
--	----

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

<i>Сюй Сылунь, Скакун В. В.</i> Сравнительный анализ нейронных сетей глубокого обучения для сегментации ядер клеток на иммуногистохимических флуоресцентных изображениях раковых тканей	59
<i>Кочин В. П.</i> Модель сложных интегрированных систем	71

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

<i>Агиевич С. В., Казловский М. А.</i> Расширение функциональности слепых аккумуляторов: контексты	79
<i>Агамалиев А. Г., Мансимов К. Б., Масталиев Р. О.</i> Представления решения линейных канонических гиперболических интегро-дифференциальных уравнений первого порядка	86
Аннотации депонированных в БГУ работ	93

CONTENTS

REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL ANALYSIS

- Nagornaya T. R., Rasulov K. M.* On the solution of the Poincaré boundary value problem for generalised harmonic functions in simply connected domains..... 6

THEORETICAL AND PRACTICAL MECHANICS

- Tukmakov D. A.* A numerical study of the propagation of a shock wave from a homogeneous gas into a gas suspension with a periodic distribution of the dispersed phase..... 16

COMPUTATIONAL MATHEMATICS

- Ignatenko M. V.* Quadrature formulas of the Gaussian type with a diagonal weight matrix for matrix-valued functions 29

DISCRETE MATHEMATICS AND MATHEMATICAL CYBERNETICS

- Demidenko V. M.* Conditions for the effective solvability of the quadratic choice problem. Part 1.... 45

THEORETICAL FOUNDATIONS OF COMPUTER SCIENCE

- Xu Silun, Skakun V. V.* Comparative analysis of deep learning neural networks for the segmentation of cancer cell nuclei on immunohistochemical fluorescent images..... 59
- Kochyn V. P.* A model of complex integrated systems 71

SHORT COMMUNICATIONS

- Agievich S. V., Kazlouski M. A.* Extending the functionality of blind accumulators: contexts..... 79
- Agamaliyev A. G., Mansimov K. B., Mastaliyev R. O.* Representations of solutions of first order linear canonical hyperbolic integro-differential equations 86
- Indicative abstracts of the papers deposited in BSU..... 93

Журнал включен Высшей аттестационной комиссией Республики Беларусь в Перечень научных изданий для опубликования результатов диссертационных исследований по физико-математическим наукам (в области математики и информатики), техническим наукам (в области информатики).

Журнал включен в наукометрические базы данных Scopus, Mathematical Reviews, Ulrichsweb, Google Scholar, zbMath, Russian Science Citation Index, ПИИЦ, China National Knowledge Infrastructure.

**Журнал Белорусского
государственного университета.
Математика. Информатика.
№ 1. 2024**

Учредитель:
Белорусский государственный университет

Юридический адрес: пр. Независимости, 4,
220030, г. Минск, Республика Беларусь.
Почтовый адрес: пр. Независимости, 4,
220030, г. Минск, Республика Беларусь.
Тел. (017) 259-70-74, (017) 259-70-75.
E-mail: jmathinf@bsu.by
URL: <https://journals.bsu.by/index.php/mathematics>

«Журнал Белорусского государственного
университета. Математика. Информатика»
издается с января 1969 г.
До 2017 г. выходил под названием «Вестник БГУ.
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»
(ISSN 1561-834X).

Редакторы *О. А. Семенец, М. А. Подголина*
Технический редактор *В. В. Пишкова*
Корректор *Л. А. Меркуль*

Подписано в печать 29.03.2024.
Тираж 60 экз. Заказ 373.

Республиканское унитарное предприятие
«СтройМедиаПроект».
ЛП № 02330/71 от 23.01.2014.
Ул. В. Хоружей, 13/61, 220123,
г. Минск, Республика Беларусь.

© БГУ, 2024

**Journal
of the Belarusian State University.
Mathematics and Informatics.
No. 1. 2024**

Founder:
Belarusian State University

Registered address: 4 Niezaliezhnasci Ave.,
Minsk 220030, Republic of Belarus.
Correspondence address: 4 Niezaliezhnasci Ave.,
Minsk 220030, Republic of Belarus.
Tel. (017) 259-70-74, (017) 259-70-75.
E-mail: jmathinf@bsu.by
URL: <https://journals.bsu.by/index.php/mathematics>

«Journal of the Belarusian State University.
Mathematics and Informatics»
published since January, 1969.
Until 2017 named «Vestnik BGU.
Seriya 1, Fizika. Matematika. Informatika»
(ISSN 1561-834X).

Editors *O. A. Semenets, M. A. Podgolina*
Technical editor *V. V. Pishkova*
Proofreader *L. A. Merkul'*

Signed print 29.03.2024.
Edition 60 copies. Order number 373.

Republic Unitary Enterprise
«StroiMediaProekt».
License for publishing No. 02330/71, 23 January, 2014.
13/61 V. Haruzhaj Str.,
Minsk 220123, Republic of Belarus.

© BSU, 2024