



БЕЛОРУССКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ЖУРНАЛ
БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА ИНФОРМАТИКА

JOURNAL
OF THE BELARUSIAN STATE UNIVERSITY

MATHEMATICS and INFORMATICS

Издается с января 1969 г.
(до 2017 г. – под названием «Вестник БГУ.
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»)

Выходит три раза в год

3

2025

МИНСК
БГУ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор **ХАРИН Ю. С.** – доктор физико-математических наук, академик НАН Беларуси, профессор; директор Научно-исследовательского института прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: kharin@bsu.by

**Заместители
главного редактора** **КРОТОВ В. Г.** – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: krotov@bsu.by

ДУДИН А. Н. – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий лабораторией прикладного вероятностного анализа факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: dudin@bsu.by

**Ответственный
секретарь** **МАТЕЙКО О. М.** – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры общей математики и информатики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: matseika@bsu.by

- Абламейко С. В.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Альтенбах Х. Магдебургский университет им. Отто фон Герике, Магдебург, Германия.
Антоневич А. Б. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Бауэр С. М. Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
Беняш-Кривец В. В. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Берник В. И. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Босяков С. М. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Бухштаб В. М. Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
Вабищевич П. Н. Институт проблем безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук, Москва, Россия.
Волков В. М. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Гладков А. Л. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Го В. Китайский университет науки и технологий, Хэфэй, провинция Аньхой, Китай.
Гогинава У. Тбилисский государственный университет им. Иванэ Джавахишвили, Тбилиси, Грузия.
Головкин В. А. Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь.
Гороховик В. В. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Громак В. И. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Демид Г. Институт математики и информатики Вильнюсского университета, Вильнюс, Литва.
Егоров А. Д. Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
Еремеев В. А. Гданьский политехнический университет, Гданьск, Польша.
Жоландек Х. Институт математики Варшавского университета, Варшава, Польша.
Журавков М. А. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
Залесский П. А. Бразильский университет, Бразилиа, Бразилия.
Зубков А. М. Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия.
Каплунов Ю. Д. Университет Кииле, Кииле, Великобритания.
Кашин Б. С. Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
Келлерер Х. Грацский университет им. Карла и Франца, Грац, Австрия.
Кожанов А. И. Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия.

- Котов В. М.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Краснопрошин В. В.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Лауринчикас А. П.** Вильнюсский университет, Вильнюс, Литва.
- Мадани К.** Университет Париж-Эст Марн-ла-Валле, Марн-ла-Валле, Франция.
- Макаров Е. К.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Матус П. П.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Медведев Д. Г.** Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Михасев Г. И.** Харбинский политехнический университет, Харбин, Китай.
- Нестеренко Ю. В.** Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
- Никоноров Ю. Г.** Южный математический институт Владикавказского научного центра Российской академии наук, Владикавказ, Россия.
- Освальд П.** Боннский университет, Бонн, Германия.
- Романовский В. Г.** Мариборский университет, Марибор, Словения.
- Рязанов В. В.** Вычислительный центр им. А. А. Дородницына Российской академии наук, Москва, Россия.
- Сафонов В. Г.** Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь.
- Скиба А. Н.** Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины, Гомель, Беларусь.
- Сотсков Ю. Н.** Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Трофимов В. А.** Южно-Китайский университет технологий, Гуанчжоу, Китай.
- Тузигов А. В.** Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Фильцмозер П.** Венский технический университет, Вена, Австрия.
- Черноусов В. И.** Альбертский университет, Эдмонтон, Канада.
- Чижики С. А.** Национальная академия наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Шешок Д.** Вильнюсский технический университет им. Гедиминаса, Вильнюс, Литва.
- Шубэ А. С.** Институт математики и информатики Академии наук Республики Молдова, Кишинев, Молдова.
- Янчевский В. И.** Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.

EDITORIAL BOARD

Editor-in-chief	KHARIN Y. S. , doctor of science (physics and mathematics), academician of the National Academy of Sciences of Belarus, full professor; director of the Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics, Belarusian State University, Minsk, Belarus. E-mail: kharin@bsu.by
Deputy editors-in-chief	KROTOV V. G. , doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of function theory, faculty of mechanics and mathematics, Belarusian State University, Minsk, Belarus. E-mail: krotov@bsu.by
	DUDIN A. N. , doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the laboratory of applied probabilistic analysis, faculty of applied mathematics and computer science, Belarusian State University, Minsk, Belarus. E-mail: dudin@bsu.by
Executive secretary	MATEIKO O. M. , PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of general mathematics and computer science, faculty of mechanics and mathematics, Belarusian State University, Minsk, Belarus. E-mail: matseika@bsu.by
Ablameyko S. V.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Altenbach H.	Otto-von-Guericke University, Magdeburg, Germany.
Antonevich A. B.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Bauer S. M.	Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia.
Beniash-Kryvets V. V.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Bernik V. I.	Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Bosyakov S. M.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Buchstaber V. M.	Steklov Institute of Mathematics of Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.
Chernousov V. I.	University of Alberta, Edmonton, Canada.
Chizhik S. A.	National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Dzemyda G.	Institute of Mathematics and Informatics of the Vilnius University, Vilnius, Lithuania.
Egorov A. D.	Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Eremeyev V. A.	Gdansk University of Technology, Gdansk, Poland.
Filzmoser P.	Vienna University of Technology, Vienna, Austria.
Gladkov A. L.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Goginava U.	Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia.
Golovko V. A.	Brest State Technical University, Brest, Belarus.
Gorokhovik V. V.	Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Gromak V. I.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Guo W.	University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui, China.
Kaplunov J. D.	Keele University, Keele, United Kingdom.
Kashin B. S.	Steklov Institute of Mathematics of Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.
Kellerer H.	University of Graz, Graz, Austria.
Kotov V. M.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Kozhanov A. I.	Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia.
Krasnoproshin V. V.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Laurinchikas A. P.	Vilnius University, Vilnius, Lithuania.
Madani K.	Université Paris-Est, Marne-la-Vallée, France.
Makarov E. K.	Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Matus P. P.	Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Medvedev D. G.	Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Mikhasev G. I.	Harbin Institute of Technology, Harbin, China.
Nesterenko Y. V.	Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.

- Nikonorov Y. G.** Southern Mathematical Institute of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Russia.
- Oswald P.** University of Bonn, Bonn, Germany.
- Romanovskij V. G.** University of Maribor, Maribor, Slovenia.
- Ryazanov V. V.** Dorodnicyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.
- Safonov V. G.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Šešok D.** Vilnius Gediminas Technical University, Vilnius, Lithuania.
- Skiba A. N.** Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Belarus.
- Sotskov Y. N.** United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Suba A. S.** Institute of Mathematics and Computer Science of the Academy of Sciences of Moldova, Kishinev, Moldova.
- Trofimov V. A.** South China University of Technology, Guangzhou, China.
- Tuzikov A. V.** Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Vabishchevich P. N.** Institute for the Safe Development of Atomic Energy of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.
- Volkov V. M.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.
- Yanchevskii V. I.** Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
- Zalesskii P. A.** University of Brazilia, Brazilia, Brazil.
- Zhuravkov M. A.** Belarusian State University, Minsk, Belarus.
- Zoladek H.** Mathematics Institute of the University of Warsaw, Warsaw, Poland.
- Zubkov A. M.** Lomonosov Moscow State University, Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.

Вещественный, комплексный и функциональный анализ

REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL ANALYSIS

УДК 517.988

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД НЬЮТОНА – КАНТОРОВИЧА ПРИ МОДИФИЦИРОВАННОМ УСЛОВИИ РЕГУЛЯРНОЙ ГЛАДКОСТИ

А. Н. ТАНЫГИНА¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Аннотация. Рассматривается обобщенный метод Ньютона – Канторовича для решения в банаховых пространствах нелинейных операторных уравнений вида $f(x) + g(x) = 0$, где f – регулярно гладкий оператор; g – недифференцируемый оператор, удовлетворяющий условию Липшица. Приводится доказательство основной теоремы о сходимости метода при модифицированном условии регулярной гладкости, в записи которого приращения производной оператора f мажорируются приращениями скалярной функции.

Ключевые слова: обобщенный метод Ньютона – Канторовича; условие регулярной гладкости; нелинейное операторное уравнение.

Образец цитирования:

Таныгина АН. Обобщенный метод Ньютона – Канторовича при модифицированном условии регулярной гладкости. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2025;3:6–14 (на англ.).
EDN: FYYKIA

For citation:

Tanyhina AN. Generalised Newton – Kantorovich method under the modified regular smoothness condition. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2025;3: 6–14.
EDN: FYYKIA

Автор:

Анастасия Николаевна Таныгина – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры фундаментальной математики и интеллектуальных систем факультета прикладной математики и информатики.

Author:

Anastasija N. Tanyhina, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of fundamental mathematics and intelligent systems, faculty of applied mathematics and computer science.
tanyhina@bsu.by
<https://orcid.org/0009-0004-6451-9669>

GENERALISED NEWTON – KANTOROVICH METHOD UNDER THE MODIFIED REGULAR SMOOTHNESS CONDITION

A. N. TANYHINA^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Abstract. The article deals with the generalised Newton – Kantorovich method for solving non-linear operator equations of the form $f(x) + g(x) = 0$ in Banach spaces, where f is the operator satisfying the regular smoothness condition; g is the non-differentiable operator satisfying Lipschitz condition. The main convergence theorem is proved under the modified regular smoothness condition in which increments of the operator f derivative are majorised by the increments of a scalar function.

Keywords: generalised Newton – Kantorovich method; regular smoothness condition; non-linear operator equation.

Introduction

Let X and Y be Banach spaces, f and g be non-linear operators defined on the closed ball $\overline{B(x_0, R)} \subset X$ and taking values in Y , where the operator f is differentiable at every interior point of $\overline{B(x_0, R)}$ and the operator g is non-differentiable. One of the most effective iterative methods for solving operator equations of the form

$$f(x) + g(x) = 0 \quad (1)$$

is the generalised Newton – Kantorovich method with successive approximations

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1}(f(x_n) + g(x_n)), n = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

where x_0 is given.

A thorough convergence analysis of the sequence (2) was carried out in the work [1] by means of the approach based on the application of majorant scalar equations and originating from L. V. Kantorovich's investigations [2]. However, the hypotheses given there are difficult to verify and for this reason a more flexible approach for solving the equation (1) was proposed in the research [3].

In the case when $g = 0$, the most precise error estimates for the process (2) were obtained by A. Galperin and Z. Waksman in [4; 5]. These results were generalised in the article [6] under the assumption that the operator f satisfies the regular smoothness condition introduced in the works [4; 5], and the operator g satisfies Lipschitz condition from the paper [3]

$$\|g(x'') - g(x')\| \leq \psi(t)\|x'' - x'\| \quad \forall x', x'' \in \overline{B(x_0, t)}, \quad (3)$$

where ψ is non-decreasing function on $[0, R]$. However, the meaning of the regular smoothness concept from the works [4; 5] is quite complex and it was shown in the research [7] that it may be replaced by a simpler one in which increments of the derivative f' are majorised by increments of a scalar function. The aim of this article is to prove the main convergence theorem for the process (2) under the modification of Galperin – Waksman condition from the paper [7].

Main concepts and preliminary results

Let $\omega: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ is a continuous strictly increasing concave function that vanishes at zero: $\omega(0) = 0$. Assume without loss of generality that $f'(x_0) = I$. Let

$$h(f) = \inf \{ \|f'(x)\| : x \in \overline{B(x_0, R)} \}.$$

In accordance with the article [5] the operator f is ω -regularly smooth on $\overline{B(x_0, R)}$ (or, equivalently, ω is a regular smoothness modulus of f on $\overline{B(x_0, R)}$), if there exists $h \in [0, h(f)]$ such that the inequality

$$\omega^{-1}(h_f(x', x'') + \|f'(x'') - f'(x')\|) - \omega^{-1}(h_f(x', x'')) \leq \|x'' - x'\|, \quad (4)$$

where

$$h_f(x', x'') = \min \{ \|f'(x')\|, \|f'(x'')\| \} - h,$$

holds for all $x', x'' \in \overline{B(x_0, R)}$. The operator f is called regularly smooth on $\overline{B(x_0, R)}$, if it is ω -regularly smooth on $\overline{B(x_0, R)}$ for some ω with such properties.

It was shown in the paper [7] that the condition (4) may be replaced by a simpler condition

$$\|f'(x'') - f'(x')\| \leq \omega\left((\chi - r - \|x'' - x'\|)^+ + \|x'' - x'\|\right) - \omega\left((\chi - r - \|x'' - x'\|)^+\right), \quad (5)$$

where $\chi = \omega^{-1}(1 - h)$; $r = \min\{\|x' - x_0\|, \|x'' - x_0\|\}$; $\lambda^+ = \max\{\lambda, 0\}$. This condition is clearer than the condition (4). Moreover, in the work [5] this condition is used in the proof of some auxiliary statements and the main theorem about the convergence of the classical Newton – Kantorovich method. If χ increases, then the value of $(\chi - r - \|x'' - x'\|)^+$ also increases and the right part of the condition (5) decreases. Therefore, the higher is the value of χ , the better is the estimate for $\|f'(x'') - f'(x')\|$, which leads to more accurate estimates for successive approximations. In the paper [8] the comparative analysis of the regular smoothness and the Hölder continuity conditions for the equation (1) in the case, when $g = 0$, was carried out.

Let $\Omega(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau$, $\Psi(t) = \int_0^t \psi(\tau) d\tau$, a is a positive number such that $a \geq \|f(x_0) + g(x_0)\|$, $\chi \in [0, \omega^{-1}(1)]$ is a constant. Let us define a function with numeric argument

$$W(t) = a - \Omega(\chi) + \Omega(\chi - t) - t(1 - \omega(\chi)) + \Psi(t), \quad (6)$$

and the numerical sequence $\{t_n\}$ as follows:

$$t_{n+1} = t_n + \frac{W(t_n)}{1 - [\omega(\chi) - \omega(\chi - t_n)]}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (7)$$

where $t_0 = 0$.

Lemma 1. *Let us suppose that the function (6) has a unique zero $t_* \in [0, \chi]$ and*

$$a < \Omega(\chi) - \chi\omega(\chi) + \chi - \Psi(\chi). \quad (8)$$

Then the sequence (7) is defined for all n , monotonically increases and converges to t_ .*

Proof. The function W is positive on $[0, t_*)$, since t_* is a unique zero of the equation $W(t) = 0$, $W(0) = a > 0$ and W is continuous on $[0, \chi]$. Hence the function

$$u(t) = \frac{W(t)}{1 - [\omega(\chi) - \omega(\chi - t)]}$$

is positive on $[0, t_*)$.

Let us show that the function $t + u(t)$ is non-decreasing on $[0, t_*)$. In fact,

$$\begin{aligned} (t + u(t))' &= 1 + u'(t) = 1 + \left(\frac{W(t)}{1 - [\omega(\chi) - \omega(\chi - t)]} \right)' = \\ &= 1 + \frac{W'(t)(1 + \omega(\chi - t) - \omega(\chi)) + W(t)\omega'(\chi - t)}{(1 + \omega(\chi - t) - \omega(\chi))^2} = \\ &= \frac{\Psi'(t)(1 + \omega(\chi - t) - \omega(\chi)) + W(t)\omega'(\chi - t)}{(1 + \omega(\chi - t) - \omega(\chi))^2} \geq 0 \end{aligned}$$

on $[0, t_*)$. This implies that the sequence $\{t_n\}$ monotonically increases and

$$t_{n+1} = t_n + u(t_n) \leq t_* + u(t_*) = t_*$$

for $t_n \leq t_*$. Consequently, the sequence $\{t_n\}$ converges to $t_{**} \in [0, t_*]$ and $t_{**} = t_{**} + u(t_{**})$, hence $W(t_{**}) = 0$. Since t_* is a unique zero of W in $[0, \chi]$, it follows that $t_{**} = t_*$.

The sequence $\{t_n\}$ is defined for all n . In fact, it is clear from the condition (8) that $W(\chi) < 0 < a = W(0)$ and hence there exists $\theta \in (0, \chi)$ such that $W(\theta) = 0$. Consequently, $\theta = t_* = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$ and $t_n \leq \theta < \chi$ for all $n = 0, 1, \dots$. Because of the monotonicity of ω , the inequality $\omega(\chi - t_n) > 0$ is true for all $n = 0, 1, \dots$. Lemma 1 is proved.

Lemma 2. *Let us suppose that there exists a constant $\chi \in [0, \omega^{-1}(1)]$ satisfying the condition (8), the operator f satisfies the condition (5) on $B(x_0, R)$ with such χ , the operator g satisfies the condition (3), and the function (6) has a unique zero $t_* \leq R$ in $[0, \chi]$. Then the equation (1) has a unique solution in $B(x_0, t_*)$.*

Proof. Let us prove the existence of a solution in $B(x_0, t_*)$. We consider the sequence

$$u_{n+1} = Du_n, \quad n = 0, 1, \dots; \quad u_0 = x_0,$$

where $D = I - [f'(x_0)]^{-1}(f + g) = I - (f + g)$, and the numerical sequence

$$\rho_{n+1} = d(\rho_n), \quad n = 0, 1, \dots; \quad \rho_0 = 0,$$

where $d(t) = t + W(t)$. Since

$$d'(t) = 1 + W'(t) = \omega(\chi) - \omega(\chi - t) + \psi(t) \geq 0$$

for all $t \in [0, \chi]$, the function d is monotonically increasing on $[0, \chi]$.

For all $n = 0, 1, \dots$ the inequality

$$\rho_n \leq t_* \tag{9}$$

holds. In fact, for $n = 0$ the inequality (9) is obvious: $\rho_0 = 0 \leq t_*$. Let us suppose that the inequality (9) holds for all $n \leq k$. Then from $\rho_k \leq t_*$, because of the monotonicity of d , we obtain $d(\rho_k) \leq d(t_*)$, that is $\rho_{k+1} \leq t_*$. Consequently, by the induction hypothesis, the inequality (9) is true for all n .

Let us prove by induction that the sequence $\{\rho_n\}$ is monotone. Clearly, $0 = \rho_0 \leq \rho_1 = a$. We suppose that $\rho_k \leq \rho_{k+1}$. Then $\rho_{k+1} = d(\rho_k) \leq d(\rho_{k+1}) = \rho_{k+2}$. Thus, the sequence $\{\rho_n\}$ is monotonically increasing and bounded from above. Consequently, it converges to some $\tilde{\rho} \in [0, t_*]$. If $n \rightarrow \infty$ in $\rho_{n+1} = \rho_n + W(\rho_n)$, we obtain $W(\tilde{\rho}) = 0$ and $\tilde{\rho} = t_*$.

Let us show that for all $n = 0, 1, \dots$ the inequality

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leq \rho_{n+1} - \rho_n \tag{10}$$

holds. For $n = 0$ the inequality (10) is obvious:

$$\|u_1 - u_0\| = \|x_0 - (f(x_0) + g(x_0)) - x_0\| = \|f(x_0) + g(x_0)\| \leq a = W(0) = \rho_1 - \rho_0.$$

We suppose that the inequality (10) holds for all $n < k$. Then

$$\begin{aligned} \|u_{k+1} - u_k\| &= \|Du_k - Du_{k-1}\| = \|u_k - u_{k-1} - (f(u_k) - f(u_{k-1})) - (g(u_k) - g(u_{k-1}))\| \leq \\ &\leq \|u_k - u_{k-1} - (f(u_k) - f(u_{k-1}))\| + \|g(u_k) - g(u_{k-1})\| \leq \\ &\leq \int_0^1 \|f'(u_t) - f'(x_0)\| \|u_k - u_{k-1}\| dt + \|g(u_k) - g(u_{k-1})\| \leq \\ &\leq \int_0^1 \left(\omega(\chi - \|u_t - x_0\|)^+ + \|u_t - x_0\| \right) - \omega(\chi - \|u_t - x_0\|)^+ \|u_k - u_{k-1}\| dt + \|g(u_k) - g(u_{k-1})\|, \end{aligned}$$

where $u_t = u_{k-1} + t(u_k - u_{k-1})$, $0 \leq t \leq 1$. By the induction hypothesis,

$$\|u_k - x_0\| = \|u_k - u_0\| \leq \sum_{j=1}^k \|u_j - u_{j-1}\| \leq \sum_{j=1}^k (\rho_j - \rho_{j-1}) = \rho_k.$$

Consequently,

$$\|u_t - x_0\| = \|(1-t)(u_{k-1} - u_0) + t(u_k - u_0)\| \leq (1-t)\|u_{k-1} - u_0\| + t\|u_k - u_0\| \leq (1-t)\rho_{k-1} + t\rho_k.$$

From the condition (3) and the proposition 1 in article [3] it follows that

$$\|g(x'') - g(x')\| \leq \Psi(t + \|x'' - x'\|) - \Psi(t) \quad \forall x' \in \overline{B(x_0, t)}, \quad \|x'' - x'\| \leq R - t. \tag{11}$$

Because of the concavity of ω and the inequality (11), we have

$$\begin{aligned}
 \|u_{k+1} - u_k\| &\leq \int_0^1 \left(\omega\left((\chi - \|u_t - x_0\|)^+ + \|u_t - x_0\|\right) - \omega\left((\chi - \|u_t - x_0\|)^+\right) \right) \|u_k - u_{k-1}\| dt + \\
 &\quad + \Psi(\rho_{k-1} + \|u_k - u_{k-1}\|) - \Psi(\rho_{k-1}) \leq \\
 &\leq \int_0^1 \left(\omega(\chi) - \omega(\chi - \|u_t - x_0\|) \right) (\rho_k - \rho_{k-1}) dt + \Psi(\rho_k) - \Psi(\rho_{k-1}) \leq \\
 &\leq \int_0^1 \left(\omega(\chi) - \omega(\chi - ((1-t)\rho_{k-1} + t\rho_k)) \right) (\rho_k - \rho_{k-1}) dt + \Psi(\rho_k) - \Psi(\rho_{k-1}) = \\
 &= \int_{\rho_{k-1}}^{\rho_k} (\omega(\chi) - \omega(\chi - \theta)) d\theta + \Psi(\rho_k) - \Psi(\rho_{k-1}) = d(\rho_k) - d(\rho_{k-1}) = \rho_{k+1} - \rho_k.
 \end{aligned}$$

Thus, the inequality (10) holds for $n = k$.

It follows from the inequality (10) that for $m > n$

$$\|u_m - u_n\| \leq \|u_m - u_{m-1}\| + \dots + \|u_{n+1} - u_n\| \leq \rho_m - \rho_{m-1} + \dots + \rho_{n+1} - \rho_n = \rho_m - \rho_n.$$

Hence for all m and n

$$\|u_m - u_n\| \leq |\rho_m - \rho_n|. \quad (12)$$

Since the sequence $\{\rho_n\}$ converges to t_* , it follows from the inequality (12) that the sequence $\{u_n\}$ also converges to some x_* . Further

$$\|u_n - u_0\| \leq \rho_n \leq t_*, \quad n = 0, 1, \dots,$$

and, consequently, all u_n with x_* belong to $\overline{B(x_0, t_*)}$. If $n \rightarrow \infty$ in $u_{n+1} = Du_n$, we obtain that $x_* = D(x_*)$, or $f(x_*) + g(x_*) = 0$. Thus, x_* is a solution of the equation (1) in $\overline{B(x_0, t_*)}$.

To prove the uniqueness of the solution x_* in $\overline{B(x_0, t_*)}$ let us consider the second solution $x_{**} \in \overline{B(x_0, t_*)}$ of the equation (1) and show that for all $n = 0, 1, \dots$ the inequality

$$\|x_{**} - u_n\| \leq t_* - \rho_n \quad (13)$$

holds. For $n = 0$ the inequality (13) is obvious:

$$\|x_{**} - x_0\| \leq t_* - \rho_0 = t_*.$$

We suppose that inequality (13) holds for all $n \leq k$. Then

$$\begin{aligned}
 \|x_{**} - u_{k+1}\| &= \|x_{**} - Du_k\| = \|x_{**} - u_k + f(u_k) + g(u_k)\| = \\
 &= \|f(u_k) - f(x_{**}) - (u_k - x_{**}) + g(u_k) - g(x_{**})\| \leq \\
 &\leq \|f(u_k) - f(x_{**}) - f'(x_0)(u_k - x_{**})\| + \|g(x_{**}) - g(u_k)\| \leq \\
 &\leq \int_0^1 \|f'(\tilde{u}_t) - f'(x_0)\| \|u_k - x_{**}\| dt + \|g(x_{**}) - g(u_k)\| \leq \\
 &\leq \int_0^1 \left(\omega\left((\chi - \|\tilde{u}_t - x_0\|)^+ + \|\tilde{u}_t - x_0\|\right) - \omega\left((\chi - \|\tilde{u}_t - x_0\|)^+\right) \right) \|u_k - x_{**}\| dt + \|g(x_{**}) - g(u_k)\|,
 \end{aligned}$$

where $\tilde{u}_t = x_{**} + t(u_k - x_{**})$, $0 \leq t \leq 1$. Further

$$\|\tilde{u}_t - x_0\| = \|(1-t)(x_{**} - x_0) + t(u_k - x_0)\| \leq (1-t)\|x_{**} - x_0\| + t\|u_k - x_0\| \leq (1-t)t_* + t\rho_k.$$

Because of the concavity of ω , the inequality (11) and the induction hypothesis, we have

$$\begin{aligned}
\|x_{**} - u_{k+1}\| &\leq \int_0^1 (\omega(\chi) - \omega(\chi - \|\tilde{u}_t - x_0\|))(t_* - \rho_k) dt + \Psi(\rho_k + \|x_{**} - u_k\|) - \Psi(\rho_k) \leq \\
&\leq \int_0^1 (\omega(\chi) - \omega(\chi - ((1-t)t_* + t\rho_k)))(t_* - \rho_k) dt + \Psi(t_*) - \Psi(\rho_k) = \\
&= \int_{\rho_k}^{t_*} (\omega(\chi) - \omega(\chi - \theta)) d\theta + \Psi(t_*) - \Psi(\rho_k) = d(t_*) - d(\rho_k) = t_* - \rho_{k+1}.
\end{aligned}$$

Hence the inequality (13) holds for $n = k + 1$. If $n \rightarrow \infty$ in the inequality (13), we obtain that

$$\|x_{**} - x_*\| \leq t_* - t_* = 0$$

and hence $x_{**} = x_*$. Lemma 2 is proved.

Let us denote for all $n = 1, 2, \dots$

$$r_n = \|f(x_n) - f(x_{n-1}) - f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})\|.$$

Lemma 3. Let us suppose that there exists a constant $\chi \in [0, \omega^{-1}(1)]$ satisfying the condition (8), the operator f satisfies the condition (5) on $\overline{B(x_0, R)}$ with such χ , the operator g satisfies the condition (3), the function (6) has a unique zero $t_* \in [0, \chi]$, and the sequence $\{t_n\}$ is defined by the recurrence formula (7). If for all $1 \leq k \leq n$ successive approximations x_k are defined and satisfy the inequality

$$\|x_k - x_{k-1}\| \leq t_k - t_{k-1}, \quad (14)$$

then

$$r_n \leq a - \Omega(\chi) + \Omega(\chi - t_n) - t_n(1 - \omega(\chi)) + \Psi(t_{n-1}). \quad (15)$$

Proof. Let $x_t = x_{n-1} + t(x_n - x_{n-1})$, $0 \leq t \leq 1$. Then

$$\begin{aligned}
r_n &\leq \int_0^1 \|f'(x_t) - f'(x_{n-1})\| \|x_n - x_{n-1}\| dt \leq \\
&\leq \int_0^1 \left(\omega\left(\left(\chi - r - \|x_t - x_{n-1}\|\right)^+ + \|x_t - x_{n-1}\|\right) - \omega\left(\left(\chi - r - \|x_t - x_{n-1}\|\right)^+\right) \right) \|x_n - x_{n-1}\| dt,
\end{aligned}$$

where $r = \|x_{n-1} - x_0\|$.

Since for all $1 \leq k \leq n$ the inequality (14) holds, it follows that

$$\|x_{n-1} - x_0\| \leq \sum_{k=1}^{n-1} \|x_k - x_{k-1}\| \leq \sum_{k=1}^{n-1} (t_k - t_{k-1}) = t_{n-1}$$

and

$$\|x_t - x_{n-1}\| = \|x_{n-1} + t(x_n - x_{n-1}) - x_{n-1}\| = t\|x_n - x_{n-1}\| \leq t(t_n - t_{n-1}).$$

According to lemma 1, $t_n < \chi$ for all $n = 0, 1, \dots$. Hence

$$\chi - r - \|x_t - x_{n-1}\| \geq \chi - t_{n-1} - t(t_n - t_{n-1}) = t(\chi - t_n) + (1-t)(\chi - t_{n-1}) > 0$$

and, because of the concavity and the monotonicity of ω ,

$$\begin{aligned}
r_n &\leq \int_0^1 (\omega(\chi - t_{n-1}) - \omega(\chi - t_{n-1} - t(t_n - t_{n-1}))) (t_n - t_{n-1}) dt = \\
&= \omega(\chi - t_{n-1})(t_n - t_{n-1}) - \int_{\chi - t_{n-1}}^{\chi - t_n} \omega(\theta) d\theta =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \omega(\chi - t_{n-1})(t_n - t_{n-1}) + \int_0^{\chi - t_n} \omega(\theta) d\theta - \int_0^{\chi - t_{n-1}} \omega(\theta) d\theta = \\
 &= \omega(\chi - t_{n-1})(t_n - t_{n-1}) + \Omega(\chi - t_n) - \Omega(\chi - t_{n-1}).
 \end{aligned}$$

Let us show that for all $n = 0, 1, \dots$ the equality

$$\omega(\chi - t_n)(t_{n+1} - t_n) - \Omega(\chi - t_n) + t_{n+1}(1 - \omega(\chi)) - \Psi(t_n) = a - \Omega(\chi) \quad (16)$$

holds. In fact, by the definition of the sequence $\{t_n\}$

$$(t_{n+1} - t_n)(1 - \omega(\chi) + \omega(\chi - t_n)) = a - \Omega(\chi) + \Omega(\chi - t_n) - t_n(1 - \omega(\chi)) + \Psi(t_n)$$

and

$$(t_n - t_{n-1})(1 - \omega(\chi) + \omega(\chi - t_{n-1})) = a - \Omega(\chi) + \Omega(\chi - t_{n-1}) - t_{n-1}(1 - \omega(\chi)) + \Psi(t_{n-1}).$$

It follows from the first of these equalities that

$$a - \Omega(\chi) = t_{n+1}(1 - \omega(\chi)) + \omega(\chi - t_n)(t_{n+1} - t_n) - \Omega(\chi - t_n) - \Psi(t_n)$$

and from the second that

$$a - \Omega(\chi) = t_n(1 - \omega(\chi)) + \omega(\chi - t_{n-1})(t_n - t_{n-1}) - \Omega(\chi - t_{n-1}) - \Psi(t_{n-1}).$$

Consequently,

$$\begin{aligned}
 &\omega(\chi - t_n)(t_{n+1} - t_n) - \Omega(\chi - t_n) + t_{n+1}(1 - \omega(\chi)) - \Psi(t_n) = \\
 &= \omega(\chi - t_{n-1})(t_n - t_{n-1}) - \Omega(\chi - t_{n-1}) + t_n(1 - \omega(\chi)) - \Psi(t_{n-1})
 \end{aligned}$$

for all $n = 1, 2, \dots$ and

$$\begin{aligned}
 &\omega(\chi - t_n)(t_{n+1} - t_n) - \Omega(\chi - t_n) + t_{n+1}(1 - \omega(\chi)) - \Psi(t_n) = \\
 &= \omega(\chi - t_0)(t_1 - t_0) - \Omega(\chi - t_0) + t_1(1 - \omega(\chi)) - \Psi(t_0) = \\
 &= \omega(\chi)a - \Omega(\chi) + a(1 - \omega(\chi)) = a - \Omega(\chi).
 \end{aligned}$$

Thus, the equality (16) holds for all $n = 0, 1, \dots$ and the estimate for r_n may be rewritten in the form of the inequality (15). Lemma 3 is proved.

Convergence theorem

Theorem. Let us suppose that there exists a constant $\chi \in [0, \omega^{-1}(1)]$ satisfying the condition (8), the operator f satisfies the condition (5) on $\overline{B(x_0, R)}$ with such χ , the operator g satisfies the condition (3), and the function (6) has a unique zero $t_* \leq R$ in $[0, \chi]$. Then the following conditions are met:

- 1) the equation (1) has a unique solution x_* in $\overline{B(x_0, t_*)}$;
- 2) the successive approximations (2) are defined for all $n = 0, 1, \dots$ and belong to $\overline{B(x_0, t_*)}$ as well as converge to x_* ;
- 3) for all $n = 0, 1, \dots$ the inequalities

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq t_{n+1} - t_n, \quad (17)$$

$$\|x_* - x_n\| \leq t_* - t_n \quad (18)$$

hold, where the sequence $\{t_n\}$ is defined by the recurrence formula (7), monotonically increases and converges to t_* .

Proof. In order to prove the theorem it is sufficient to show that successive approximations (2) are defined for all $n = 0, 1, \dots$ and belong to $\overline{B(x_0, t_*)}$ as well as satisfy the inequalities (17) and (18). The other assertions of the theorem follow from lemmas 1 and 2.

Since the inequality (18) is a direct consequence of the inequality (17), it is sufficient to prove the inequality (17). For $n = 0$ the inequality (17) is obvious:

$$\|x_1 - x_0\| = \left\| [f'(x_0)]^{-1} (f(x_0) + g(x_0)) \right\| \leq a = t_1 - t_0.$$

We suppose that the inequality (17) holds for all $n < k$. Let us show that the operator $f'(x_k)$ is invertible. In fact,

$$\begin{aligned} & \left\| [f'(x_0)]^{-1} (f'(x_k) - f'(x_0)) \right\| = \|f'(x_k) - f'(x_0)\| \leq \\ & \leq \omega\left((\chi - \|x_k - x_0\|)^+ + \|x_k - x_0\|\right) - \omega\left((\chi - \|x_k - x_0\|)^+\right). \end{aligned}$$

By the induction hypothesis,

$$\|x_k - x_0\| \leq \sum_{j=1}^k \|x_j - x_{j-1}\| \leq \sum_{j=1}^k (t_j - t_{j-1}) = t_k$$

and hence $\chi - \|x_k - x_0\| \geq \chi - t_k > 0$ ($t_k < \chi$ for all $k = 0, 1, \dots$ as it was shown in lemma 1). Because of the concavity and the monotonicity of ω , we have

$$\begin{aligned} & \omega\left((\chi - \|x_k - x_0\|)^+ + \|x_k - x_0\|\right) - \omega\left((\chi - \|x_k - x_0\|)^+\right) \leq \\ & \leq \omega(\chi - t_k + t_k) - \omega(\chi - t_k) < \omega(\chi) - \omega(0) = \omega(\chi) \leq 1. \end{aligned}$$

Thus, $\left\| [f'(x_0)]^{-1} (f'(x_k) - f'(x_0)) \right\| < 1$ and, consequently, the operator

$$T = I + [f'(x_0)]^{-1} (f'(x_k) - f'(x_0))$$

is invertible. Since $f'(x_k) = f'(x_0)T = T$, the operator $f'(x_k)$ is also invertible and

$$\left\| [f'(x_k)]^{-1} \right\| = \|T^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T - I\|} \leq \frac{1}{1 - [\omega(\chi) - \omega(\chi - t_k)]}.$$

Using the estimate for r_k from lemma 3 and the inequality (11), we get

$$\begin{aligned} & \|x_{k+1} - x_k\| = \left\| [f'(x_k)]^{-1} (f(x_k) + g(x_k)) \right\| = \\ & = \left\| [f'(x_k)]^{-1} (f(x_k) - f(x_{k-1}) - f'(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) + g(x_k) - g(x_{k-1})) \right\| \leq \\ & \leq \left\| [f'(x_k)]^{-1} \right\| \left\| f(x_k) - f(x_{k-1}) - f'(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \right\| + \left\| [f'(x_k)]^{-1} \right\| \|g(x_k) - g(x_{k-1})\| \leq \\ & \leq \frac{r_k + \Psi(t_k) - \Psi(t_{k-1})}{1 - [\omega(\chi) - \omega(\chi - t_k)]} \leq \frac{a - \Omega(\chi) + \Omega(\chi - t_k) - t_k(1 - \omega(\chi)) + \Psi(t_k)}{1 - [\omega(\chi) - \omega(\chi - t_k)]} = t_{k+1} - t_k. \end{aligned}$$

Consequently, the inequality (17) holds for $n = k$.

Since for all $n = 0, 1, \dots$ the operator $f'(x_n)$ is invertible and $\|x_n - x_0\| \leq t_n \leq t_*$, the successive approximations (2) are defined for all $n = 0, 1, \dots$ and belong to $\overline{B(x_0, t_*)}$. The convergence of the successive approximations to x_* follows from the inequality (18). The theorem is proved.

Conclusions

In this paper the generalised Newton – Kantorovich method for solving non-linear operator equations with non-differentiable operators in Banach spaces was considered. The regular smoothness condition of the operator involved, which was proposed by A. Galperin and Z. Waksman, was replaced by a simpler one in which increments of the operator derivative are majorised by increments of a scalar function. The convergence theorem was proved by means of majorant scalar equations.

It should be noted that each Lipschitz smooth operator is also regularly smooth but the opposite is not true. So the theorem is applicable to more wide class of non-linear operator equations of the form (1) than the corresponding convergence theorems from articles [1; 3].

References

1. Забрейко ПП, Злепко ПП. Об обобщении метода Ньютона – Канторовича на уравнения с недифференцируемыми операторами. *Украинский математический журнал*. 1982;34(3):365–369.
2. Kantorovich LV, Akilov GP. *Functional analysis in normed spaces*. Moscow: Fizmatgiz; 1959. 684 p. Russian.
3. Zabrejko PP, Nguen DF. The majorant method in the theory of Newton – Kantorovich approximations and the Pták error estimates. *Numerical Functional Analysis and Optimization*. 1987;9(5–6):671–684. DOI: 10.1080/01630568708816254.
4. Galperin A, Waksman Z. Newton’s method under a weak smoothness assumption. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 1991;35(1–3):207–215. DOI: 10.1016/0377-0427(91)90208-2.
5. Galperin A, Waksman Z. Regular smoothness and Newton’s method. *Numerical Functional Analysis and Optimization*. 1994;15(7–8):813–858. DOI: 10.1080/01630569408816595.
6. Таныгина АН. Обобщенный метод Ньютона – Канторовича для уравнений с недифференцируемыми операторами. *Доклады Национальной академии наук Беларуси*. 2011;55(6):17–22. EDN: YPSBZL.
7. Забрейко ПП, Таныгина АН. Модификация условия Гальперина – Ваксмана для решения нелинейных операторных уравнений методом Ньютона – Канторовича. *Доклады Национальной академии наук Беларуси*. 2013;57(6):8–12. EDN: WIQWOR.
8. Таныгина АН. Сравнительный анализ условий сходимости метода Ньютона – Канторовича для приближенного решения нелинейных операторных уравнений. *Вестник Белорусского государственного университета. Серия 1, Физика. Математика. Информатика*. 2014;2:97–103.

Received 11.05.2025 / revised 15.11.2025 / accepted 15.11.2025.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND OPTIMAL CONTROL

УДК 517.956.35

СЛАБОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ВОЛНОВЫМ ОПЕРАТОРОМ

В. И. КОРЗЮК^{1), 2)}, Я. В. РУДЬКО²⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

²⁾Институт математики НАН Беларуси, ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Беларусь

Аннотация. Для полулинейного гиперболического уравнения третьего порядка, заданного в первом квадранте, изучается слабое решение смешанной задачи, в которой начальные условия заданы на пространственной полупрямой, а смешанные условия – на временной полупрямой. Оператор в уравнении представляет собой композицию из волнового оператора и оператора переноса. Слабое решение определяется как решение системы связанных интегральных уравнений, которым удовлетворяет классическое решение. Показывается, что при некоторых условиях гладкости начальных и граничных данных рассматриваемая задача допускает существование и единственность слабого решения. Устанавливается, что дважды непрерывно дифференцируемое слабое решение является пределом классических решений изучаемой задачи.

Образец цитирования:

Корзюк В.И., Рудько Я.В. Слабое решение смешанной задачи для полулинейного гиперболического уравнения третьего порядка с волновым оператором. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2025;3:15–28 (на англ.).
EDN: GJYLJR

For citation:

Korzyuk VI, Rudzko JV. Mild solution of a mixed problem for a third-order semilinear hyperbolic equation with the wave operator. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2025;3:15–28.
EDN: GJYLJR

Авторы:

Виктор Иванович Корзюк – доктор физико-математических наук, академик НАН Беларуси, профессор; профессор кафедры био- и наномеханики механико-математического факультета¹⁾, главный научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений²⁾.

Ян Вячеславович Рудько – младший научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений.

Authors:

Viktor I. Korzyuk, doctor of science (physics and mathematics), academician of the National Academy of Sciences of Belarus, full professor; professor at the department of bio- and nanomechanics, faculty of mechanics and mathematics^a, and chief researcher at the department of differential equations^b.

korzyuk@bsu.by

Jan V. Rudzko, junior researcher at the department of differential equations.

janycz@yahoo.com

<https://orcid.org/0000-0002-1482-9106>

Ключевые слова: нелинейное гиперболическое уравнение третьего порядка; смешанная задача; обобщенное решение; слабое решение.

Благодарность. Работа выполнена при финансовой поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики (соглашение № 075-15-2025-345).

MILD SOLUTION OF A MIXED PROBLEM FOR A THIRD-ORDER SEMILINEAR HYPERBOLIC EQUATION WITH THE WAVE OPERATOR

V. I. KORZYUK^{a, b}, J. V. RUDZKO^b

^aBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

^bInstitute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus,
11 Surganova Street, Minsk 220072, Belarus

Corresponding author: J. V. Rudzko (janycz@yahoo.com)

Abstract. For a semilinear hyperbolic equation of the third-order given in the first quadrant we study a mild solution of a mixed problem in which the initial conditions are specified on the spatial half-line and the mixed conditions are specified on the time half-line. The operator in the equation is a composition of the wave operator and the transport operator. Mild solution is defined as a solution to coupled integral equations that are satisfied by a classical solution. It is shown that under some smoothness conditions on the initial and boundary data the problem under consideration admits the existence and uniqueness of the mild solution. It is established that the twice continuously differentiable mild solution is the limit of classical solutions to the problem under study.

Keywords: non-linear hyperbolic equation of the third-order; mixed problem; generalised solution; mild solution.

Acknowledgements. This work was financially supported by the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics (agreement No. 075-15-2025-345).

Introduction and statement of the problem

Third-order differential equations arise in the description of certain physical phenomena. For example, we use such hyperbolic equations of the indicated order in modelling the propagation of linear acoustic waves in a medium with dispersion [1]. Mathematical models of such problems were considered in papers [2–4].

In the domain $Q = (0, \infty) \times (0, \infty)$ of two independent variables (t, x) we consider one dimensional non-linear equation of the third-order

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + b \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(t, x) = f(t, x, u(t, x)), \quad (t, x) \in Q, \quad (1)$$

where a and b are positive (to be definite) real numbers, $a \neq b$. On the lower part $t = 0$ of the boundary ∂Q we supplement equation (1) with the initial conditions

$$u(0, x) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \varphi_1(x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, x) = \varphi_2(x), \quad x \in [0, \infty), \quad (2)$$

and on the lateral part of the boundary ∂Q we supplement it with the mixed conditions

$$u(t, 0) = \mu_0(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \mu_1(t), \quad t \in [0, \infty). \quad (3)$$

In the paper [5] a mild solution to the Cauchy problem for equation (1) is considered. The authors of the work [6] obtained a mild solution to a similar equation

$$\left(\tau \frac{\partial^3}{\partial t^3} + \alpha \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - b \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} \right) u(t, x) = f \left(u(t, x), \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \right)$$

in a Hilbert space $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, where $\Omega \subset \mathbb{R}$. As a result of the work [7] it was constructed a generalised solution to the Jordan – Moore – Gibson – Thompson equation

$$\left(\tau \frac{\partial^3}{\partial t^3} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} - (\delta + \tau c^2) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(t, x) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\kappa \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \right)^2 + \sigma \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right)^2 \right).$$

In the article [8] a weak solution for an equation similar to equation (1) with power non-linearity is considered.

Mild solution

In our paper [9] it was proved the following statement.

Theorem 1. Let the conditions $\varphi_0 \in C^3([0, \infty))$, $\varphi_1 \in C^2([0, \infty))$, $\varphi_2 \in C^1([0, \infty))$, $\mu_0 \in C^3([0, \infty))$, $\mu_1 \in C^2([0, \infty))$ and $f \in C^1(\bar{Q} \times \mathbb{R})$ be satisfied, and let the function f satisfy the Lipschitz condition with a function $L \in C(\bar{Q})$ with respect to the third variable, i. e. for any pair $(t, x) \in \bar{Q}$ and any real numbers z_1 and z_2 the inequality $|f(t, x, z_1) - f(t, x, z_2)| \leq L(t, x)|z_1 - z_2|$ holds. Problem (1) – (3) has a unique solution $u : \bar{Q} \mapsto \mathbb{R}$ in the class $C^3(\bar{Q})$ if and only if the matching conditions

$$\mu_0(0) = \varphi_0(0), \quad (4)$$

$$\mu'_0(0) = \varphi_1(0), \quad \mu_1(0) = \varphi'_0(0), \quad (5)$$

$$\mu''_0(0) = \varphi_2(0), \quad \mu'_1(0) = \varphi'_1(0), \quad (6)$$

$$\mu'''_0(0) = f(0, 0, \varphi_0(0)) - b\varphi'_2(0) + a^2\varphi''_1(0) + a^2b\varphi'''_0(0), \quad \mu''_1(0) = \varphi'_2(0) \quad (7)$$

are satisfied. This solution is determined by the formulas

$$u(t, x) = u^{(j)}(t, x), \quad (t, x) \in \overline{Q^{(j)}}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} u^{(1)}(t, x) = & v(t, x) + \int_0^t \left\{ \int_0^{a(t-\tau)+x} \frac{f(\tau, z, u^{(1)}(\tau, z))(a(t-\tau) + x - z)}{2a(a+b)} dz + \right. \\ & + \int_0^{x-b(t-\tau)} \frac{f(\tau, z, u^{(1)}(\tau, z))(b(t-\tau) - x + z)}{(a-b)(a+b)} dz + \\ & \left. + \int_0^{x-a(t-\tau)} \frac{f(\tau, z, u^{(1)}(\tau, z))(a(\tau-t) + x - z)}{2a(a-b)} dz \right\} d\tau, \quad (t, x) \in \overline{Q^{(1)}}, \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^{(2)}(t, x) = & v(t, x) + \int_{t-\frac{x}{b}}^t \left\{ \int_0^{x+a(t-\tau)} \frac{(x-z+a(t-\tau))f(\tau, z, u^{(1)}(\tau, z))}{2a(a+b)} dz + \right. \\ & + \int_0^{x-b(t-\tau)} \frac{(z-x+b(t-\tau))f(\tau, z, u^{(1)}(\tau, z))}{(a-b)(a+b)} dz + \int_0^{x-a(t-\tau)} \frac{(x-z+a(\tau-t))f(\tau, z, u^{(1)}(\tau, z))}{2a(a-b)} dz \Big\} d\tau + \\ & + \int_0^{t-\frac{x}{b}} \left\{ \int_0^{x+a(t-\tau)} \frac{(x-z+a(t-\tau))f(\tau, z, u^{(2)}(\tau, z))}{2a(a+b)} dz + \int_0^{x-a(t-\tau)} \frac{(x-z+a(\tau-t))f(\tau, z, u^{(2)}(\tau, z))}{2a(a-b)} dz - \right. \\ & \left. - \int_0^{a(t-\tau-\frac{x}{b})} \frac{(bz+a(x+b(\tau-t)))f(\tau, z, u^{(2)}(\tau, z))}{a(a-b)(a+b)} dz \right\} d\tau, \quad a < b, \quad (t, x) \in \overline{Q^{(2)}}, \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u^{(3)}(t, x) = & v(t, x) + \int_{t-\frac{x}{b}}^t \left\{ \int_0^{x+a(t-\tau)} \frac{(x-z+a(t-\tau))f(\tau, z, u^{(1)}(\tau, z))}{2a(a+b)} dz + \right. \\
 & + \int_0^{x-b(t-\tau)} \frac{(z-x+b(t-\tau))f(\tau, z, u^{(1)}(\tau, z))}{(a-b)(a+b)} dz + \int_0^{x-a(t-\tau)} \frac{(x-z+a(\tau-t))f(\tau, z, u^{(1)}(\tau, z))}{2a(a-b)} dz \Big\} d\tau + \\
 & + \int_{t-\frac{x}{a}}^{t-\frac{x}{b}} \left\{ \int_0^{x+a(t-\tau)} \frac{(x-z+a(t-\tau))f(\tau, z, u^{(2)}(\tau, z))}{2a(a+b)} dz + \int_0^{x-a(t-\tau)} \frac{(x-z+a(\tau-t))f(\tau, z, u^{(2)}(\tau, z))}{2a(a-b)} dz - \right. \\
 & - \int_0^{a(t-\frac{x}{b}-\tau)} \frac{(bz+a(x+b(\tau-t)))f(\tau, z, u^{(2)}(\tau, z))}{a(a-b)(a+b)} dz \Big\} d\tau + \\
 & + \int_0^{t-\frac{x}{a}} \left\{ \int_0^{x+a(t-\tau)} \frac{(x-z+a(t-\tau))f(\tau, z, u^{(3)}(\tau, z))}{2a(a+b)} dz + \int_0^{a(t-\tau)-x} \frac{(x+z+a(\tau-t))f(\tau, z, u^{(3)}(\tau, z))}{2a(a-b)} dz - \right. \\
 & - \int_0^{a(t-\frac{x}{b}-\tau)} \frac{(bz+a(x+b(\tau-t)))f(\tau, z, u^{(3)}(\tau, z))}{a(a-b)(a+b)} dz \Big\} d\tau, \quad a < b, (t, x) \in \overline{Q^{(3)}}, \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u^{(2)}(t, x) = & v(t, x) + \int_0^{t-\frac{x}{a}} \left\{ \int_0^{x+a(t-\tau)} \frac{(x-z+a(t-\tau))f(\tau, z, u^{(2)}(\tau, z))}{2a(a+b)} dz + \right. \\
 & + \int_0^{x-b(t-\tau)} \frac{(-x+z+b(t-\tau))f(\tau, z, u^{(2)}(\tau, z))}{a^2-b^2} dz + \int_0^{a(t-\tau)-x} \frac{(x+z+a(\tau-t))f(\tau, z, u^{(2)}(\tau, z))}{2a(a-b)} dz \Big\} d\tau + \\
 & + \int_{t-\frac{x}{a}}^t \left\{ \int_0^{x+a(t-\tau)} \frac{(x-z+a(t-\tau))f(\tau, z, u^{(1)}(\tau, z))}{2a(a+b)} dz + \int_0^{x-b(t-\tau)} \frac{(-x+z+b(t-\tau))f(\tau, z, u^{(1)}(\tau, z))}{(a-b)(a+b)} dz + \right. \\
 & + \int_0^{x-a(t-\tau)} \frac{(x-z+a(\tau-t))f(\tau, z, u^{(1)}(\tau, z))}{2a(a-b)} dz \Big\} d\tau, \quad b < a, (t, x) \in \overline{Q^{(2)}}, \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u^{(3)}(t, x) = & v(t, x) + \int_{t-\frac{x}{b}}^{t-\frac{x}{a}} \left\{ \int_0^{x+a(t-\tau)} \frac{(x-z+a(t-\tau))f(\tau, z, u^{(2)}(\tau, z))}{2a(a+b)} dz + \right. \\
 & + \int_0^{x-b(t-\tau)} \frac{(-x+z+b(t-\tau))f(\tau, z, u^{(2)}(\tau, z))}{a^2-b^2} dz + \int_0^{a(t-\tau)-x} \frac{(x+z+a(\tau-t))f(\tau, z, u^{(2)}(\tau, z))}{2a(a-b)} dz \Big\} d\tau +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{t-\frac{x}{a}}^t \left\{ \int_0^{x+a(t-\tau)} \frac{(x-z+a(t-\tau))f(\tau, z, u^{(1)}(\tau, z))}{2a(a+b)} dz + \int_0^{x-b(t-\tau)} \frac{(-x+z+b(t-\tau))f(\tau, z, u^{(1)}(\tau, z))}{(a-b)(a+b)} dz + \right. \\
 & \quad \left. + \int_0^{x-a(t-\tau)} \frac{(x-z+a(t-\tau))f(\tau, z, u^{(1)}(\tau, z))}{2a(a-b)} dz \right\} d\tau + \\
 & + \int_0^{t-\frac{x}{b}} \left\{ \int_0^{x+a(t-\tau)} \frac{(x-z+a(t-\tau))f(\tau, z, u^{(3)}(\tau, z))}{2a(a+b)} dz + \int_0^{a(t-\tau)-x} \frac{(x+z+a(t-\tau))f(\tau, z, u^{(3)}(\tau, z))}{2a(a-b)} dz - \right. \\
 & \quad \left. - \int_0^{a(t-\frac{x}{b}-\tau)} \frac{(bz+a(x+b(t-\tau)))f(\tau, z, u^{(3)}(\tau, z))}{a(a-b)(a+b)} dz \right\} d\tau, \quad b < a, (t, x) \in \overline{Q^{(3)}}, \quad (13)
 \end{aligned}$$

where v is a function defined by the formula

$$\begin{aligned}
 v(t, x) &= \sum_{k=1}^2 \frac{(-1)^k \left((a + (-1)^k b) \Im[\varphi_1] + \Im^2[\varphi_2] + ab\varphi_0 \right) (x + (-1)^k at)}{2a(a + (-1)^k b)} + \frac{(a^2\varphi_0 - \Im^2[\varphi_2])(x - bt)}{a^2 - b^2}, \quad (t, x) \in \overline{Q^{(1)}}, \\
 v(t, x) &= \sum_{k=1}^2 \frac{(-1)^k \left((a + (-1)^k b) \Im[\varphi_1] + \Im^2[\varphi_2] + ab\varphi_0 \right) (x + (-1)^k at)}{2a(a + (-1)^k b)} + \frac{1}{a-b} \left[\frac{b}{a} \Im[\varphi_1] \left(at - \frac{ax}{b} \right) - \right. \\
 & \quad \left. - ab\Im[\mu_1] \left(t - \frac{x}{b} \right) + \frac{b\Im^2[\varphi_2] \left(at - \frac{ax}{b} \right)}{a(a+b)} + \frac{b^2\varphi_0 \left(at - \frac{ax}{b} \right)}{a+b} + a\varphi(0) - b\mu_0 \left(t - \frac{x}{b} \right) \right], \quad a < b, (t, x) \in \overline{Q^{(2)}}, \\
 v(t, x) &= \frac{((a+b)\Im[\varphi_1] + \Im^2[\varphi_2] + ab\varphi_0)(x + at)}{2a(a+b)} + \frac{(a^2\varphi_0 - \Im^2[\varphi_2])(x - bt)}{a^2 - b^2} - \frac{1}{2a(a-b)} \times \\
 & \quad \times \left(((a+b)\Im[\varphi_1] + \Im^2[\varphi_2] + ab\varphi_0)(at - x) - 2a^2b\Im[\mu_1] \left(t - \frac{x}{a} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + 2a^2\varphi_0(0) - 2a^2\mu_0 \left(t - \frac{x}{a} \right) \right), \quad b < a, (t, x) \in \overline{Q^{(2)}}, \\
 v(t, x) &= \frac{1}{a-b} \left[\frac{b}{a} \Im[\varphi_1] \left(at - \frac{ax}{b} \right) - ab\Im[\mu_1] \left(t - \frac{x}{b} \right) + \frac{b\Im^2[\varphi_2] \left(at - \frac{ax}{b} \right)}{a(a+b)} + \frac{b^2\varphi_0 \left(at - \frac{ax}{b} \right)}{a+b} - \right. \\
 & \quad \left. - b\mu_0 \left(t - \frac{x}{b} \right) \right] + \frac{((a+b)\Im[\varphi_1] + \Im^2[\varphi_2] + ab\varphi_0)(x + at)}{2a(a+b)} - \\
 & \quad - \frac{1}{2a(a-b)} \left(((a+b)\Im[\varphi_1] + \Im^2[\varphi_2] + ab\varphi_0)(at - x) - 2a^2b\Im[\mu_1] \left(t - \frac{x}{a} \right) - \right. \\
 & \quad \left. - 2a^2\mu_0 \left(t - \frac{x}{a} \right) \right), \quad (t, x) \in \overline{Q^{(3)}},
 \end{aligned}$$

where $\mathfrak{I}$ is the integration operator acting by the formula $\mathfrak{I}[h](x) = \int_0^x h(z)dz$, and

$$Q^{(1)} = \{(t, x) | x - at > 0 \wedge x - bt > 0\},$$

$$Q^{(2)} = Q \setminus \overline{Q^{(1)} \cup Q^{(3)}},$$

$$Q^{(3)} = \{(t, x) | x - at < 0 \wedge x - bt < 0\}.$$

Representation of the function u in the form of equations (8)–(12) is well defined even if the functions $u^{(j)}(t, x)$, $j = 1, 2, 3$, are not differentiable, prompting a generalisation of the classical solution using a weak type of solution that has the same form as the classical solution and will be one, when certain smoothness conditions and comparability conditions are fulfilled. This is roughly the same motivation that encourages looking for solutions in various Sobolev spaces [10; 11], in the form of power series (often formal or convergent in the sense of Cesàro) [12], or in the sense of generalised functions [13; 14]. Moreover, in many cases of linear abstract Cauchy problems, the concepts of mild and weak solutions (in the dual sense, in the sense of distributions) are equivalent¹.

Based on sources [15; 16], we introduce the following definition.

Definition. We call the function u representable in the form of equations (8)–(13) a mild solution of problem (1)–(3).

Definition introduces the notion of mild solution [16]. However, in the literature such solutions are also called solutions in the broad sense [17; 18], weak solutions [19] and generalised solutions [20].

The results of the work [9] yield the following statements.

Remark 1. Any classical solution of problem (1)–(3) is also a mild solution of this problem.

Remark 2. If the additional smoothness conditions $\varphi_0 \in C^3([0, \infty))$, $\varphi_1 \in C^2([0, \infty))$, $\varphi_2 \in C^1([0, \infty))$, $\mu_0 \in C^3([0, \infty))$, $\mu_1 \in C^2([0, \infty))$ and $f \in C^1(\bar{Q} \times \mathbb{R})$, and the matching conditions (4)–(7) are satisfied, then the mild solution of problem (1)–(3) is classical.

Denote $\tilde{Q} = \bar{Q} \setminus \{(t, x) | x - at = 0 \vee x - bt = 0\}$. The following statement holds.

Theorem 2. Let the conditions $\varphi_0 \in C([0, \infty))$, $\varphi_1 \in L_{\text{loc}}^1([0, \infty))$, $\varphi_2 \in W_{\text{loc}}^{-1,1}([0, \infty))$, $\mu_0 \in C([0, \infty))$, $\mu_1 \in L_{\text{loc}}^1([0, \infty))$ and $f \in C(\bar{Q} \times \mathbb{R})$ be satisfied, and let the function f satisfy the Lipschitz condition with a function $L \in C(\bar{Q})$ with respect to the third variable, i. e. for any pair $(t, x) \in \bar{Q}$ and any real numbers z_1 and z_2 the inequality $|f(t, x, z_1) - f(t, x, z_2)| \leq L(t, x)|z_1 - z_2|$ holds. Problem (1)–(3) has a unique mild solution $u : \bar{Q} \mapsto \mathbb{R}$ in the class $C(\tilde{Q})$.

Proof. The solvability of equations (9)–(13) in the class of continuous functions follows from the article [9].

For a mild solution, smoothness can be increased if the matching conditions (4)–(7) are partially satisfied, as it is done in the following theorem.

Theorem 3. Let the conditions $\varphi_0 \in C([0, \infty))$, $\varphi_1 \in L_{\text{loc}}^1([0, \infty))$, $\varphi_2 \in W_{\text{loc}}^{-1,1}([0, \infty))$, $\mu_0 \in C([0, \infty))$, $\mu_1 \in L_{\text{loc}}^1([0, \infty))$ and $f \in C(\bar{Q} \times \mathbb{R})$ be satisfied, and let the function f satisfy the Lipschitz condition with a function $L \in C(\bar{Q})$ with respect to the third variable, i. e. for any pair $(t, x) \in \bar{Q}$ and any real numbers z_1 and z_2 the inequality $|f(t, x, z_1) - f(t, x, z_2)| \leq L(t, x)|z_1 - z_2|$ holds. Problem (1)–(3) has a unique mild solution $u : \bar{Q} \mapsto \mathbb{R}$ in the class $C(\bar{Q})$ if and only if the condition (4) is satisfied.

Proof. If $\mu_0(0) = \varphi_0(0)$, then a mild solution u of problem (1)–(3) is continuous on the set $\{(t, x) | x - at = 0 \vee x - bt = 0\}$ due to the relations

¹What «mild solution» means, and how to find it? // Mathoverflow : website. URL: <https://mathoverflow.net/questions/320300/what-mild-solution-means-and-how-to-find-it> (date of access: 21.07.2025) ; Is a mild solution the same thing as a weak solution? // Mathematics : website. URL: <https://math.stackexchange.com/questions/708407/is-a-mild-solution-the-same-thing-as-a-weak-solution> (date of access: 21.07.2025).

$$\begin{aligned} \left[(u)^+ - (u)^- \right](t, x = bt) &= \frac{b(\varphi_0(0) - \mu_0(0))}{a - b}, \left[(u)^+ - (u)^- \right](t, x = bt) = \\ &= \frac{a(\varphi_0(0) - \mu_0(0))}{a - b}, a < b, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \left[(u)^+ - (u)^- \right](t, x = bt) &= \frac{b(\mu_0(0) - \varphi_0(0))}{a - b}, \left[(u)^+ - (u)^- \right](t, x = bt) = \\ &= \frac{a(\mu_0(0) - \varphi_0(0))}{a - b}, b < a, \end{aligned} \quad (15)$$

which follows from the equations (8)–(13). Here by $(u)^\pm$ we have denoted the limit values of the function u calculated on different sides of the curve $x = r(t)$, where r is a real-valued function, i. e. $(u)^\pm(t, x = r(t)) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} u(t, r(t) \pm \delta)$. Thus, the solution not only satisfies $u \in C(\bar{Q})$ but is also a continuous function on the closure $\bar{Q}$, $u \in C(\bar{Q})$.

However, if $\mu_0(0) \neq \varphi_0(0)$, then a mild solution u of problem (1)–(3) cannot be continuous on the set $\bar{Q}$ by the relations (14) and (15). The proof of the theorem is complete.

Following the work [21] and assuming that $\varphi_0 \in C^2([0, \infty))$, $\varphi_1 \in C^1([0, \infty))$, $\varphi_2 \in C([0, \infty))$, $\mu_0 \in C^2([0, \infty))$, $\mu_1 \in C^1([0, \infty))$, $f \in C(\bar{Q} \times \mathbb{R})$, we prove that a mild solution u of problem (1)–(3) from the class $C^2(\bar{Q})$ is a limit of the classical solutions of problem (1)–(3).

Since the spaces $C^6(\bar{Q})$ and $C^1(\bar{Q} \times \mathbb{R})$ are dense in $C^2(\bar{Q})$ and $C(\bar{Q} \times \mathbb{R})$, respectively [22], there are sequences $w^{(n)} \in C^6(\bar{Q})$ and $f^{(n)} \in C^1(\bar{Q} \times \mathbb{R})$ such that $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(w^{(n)}, u)_{C^2(\bar{Q})} = 0$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f^{(n)}, f)_{C(\bar{Q} \times \mathbb{R})} = 0$, where $\rho(x_1, x_2)_X$ is the distance between elements $x_1 \in X$ and $x_2 \in X$ in a metric space X . Additionally, we want to choose the sequence $w^{(n)}$ so that the condition

$$\frac{\partial^3 w^{(n)}}{\partial t^3}(t, x) = f^{(n)}(t, x, w^{(n)}(t, x)) - b \frac{\partial^3 w^{(n)}}{\partial t^2 \partial x}(t, x) + a^2 \frac{\partial^3 w^{(n)}}{\partial t \partial x^2}(t, x) + a^2 b \frac{\partial^3 w^{(n)}}{\partial x^3}(t, x)$$

is also satisfied.

Let us consider on the closed ray $[0, \infty)$ a continuous function $h_\delta(x)$ with the parameter $\delta \in (0, \infty)$:

$$h_\delta(x) = \begin{cases} \frac{x}{\delta}, & x < \delta, \\ 1, & x \geq \delta. \end{cases}$$

There are obvious equalities

$$w^{(n)}(t, x) = w^{(n)}(0, x) + t \frac{\partial w^{(n)}}{\partial t}(0, x) + \frac{t^2}{2} \frac{\partial^2 w^{(n)}}{\partial t^2}(0, x) + \frac{1}{2} \int_0^t (t - \tau)^2 \frac{\partial^3 w^{(n)}}{\partial t^3}(\tau, x) d\tau,$$

$$w^{(n)}(t, x) = w^{(n)}(t, 0) + x \frac{\partial w^{(n)}}{\partial x}(t, 0) + \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 w^{(n)}}{\partial x^2}(t, 0) + \frac{1}{2} \int_0^x (x - \xi)^2 \frac{\partial^3 w^{(n)}}{\partial x^3}(t, \xi) d\xi,$$

which imply

$$\begin{aligned} w^{(n)}(t, x) &= w^{(n)}(0, 0) + x \frac{\partial w^{(n)}}{\partial x}(0, 0) + \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 w^{(n)}}{\partial x^2}(0, 0) + \frac{1}{2} \int_0^x (x - \xi)^2 \frac{\partial^3 w^{(n)}}{\partial x^3}(0, \xi) d\xi + \\ &+ t \frac{\partial w^{(n)}}{\partial t}(0, x) + \frac{t^2}{2} \frac{\partial^2 w^{(n)}}{\partial t^2}(0, x) + \frac{1}{2} \int_0^t (t - \tau)^2 \frac{\partial^3 w^{(n)}}{\partial t^3}(\tau, x) d\tau. \end{aligned}$$

Let

$$z^{(n)}(t, x) = w^{(n)}(0, 0) + x \frac{\partial w^{(n)}}{\partial x}(0, 0) + \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 w^{(n)}}{\partial x^2}(0, 0) + t \frac{\partial w^{(n)}}{\partial t}(0, x) + \frac{t^2}{2} \frac{\partial^2 w^{(n)}}{\partial t^2}(0, x) + \\ + \frac{1}{2} \int_0^x (x - \xi)^2 \left[h_\delta(\xi) \frac{\partial^3 w^{(n)}}{\partial x^3}(0, \xi) + \alpha(1 - h_\delta(\xi)) \right] d\xi + \frac{1}{2} \int_0^t (t - \tau)^2 \frac{\partial^3 w^{(n)}}{\partial t^3}(\tau, x) d\tau, \quad (16)$$

where

$$\alpha = \frac{1}{a^2 b} \left(4 \frac{\partial^3 w^{(n)}}{\partial t^3}(0, 0) + b \frac{\partial^3 w^{(n)}}{\partial t^2 \partial x}(0, 0) - a^2 \frac{\partial^3 w^{(n)}}{\partial t \partial x^2}(0, 0) - f^{(n)}(0, 0, w^{(n)}(0, 0)) \right).$$

It is easy to see that the function $z^{(n)}(t, x)$ belongs to the class $C^3(\bar{Q})$. Let us denote

$$\tilde{\varphi}_i^{(n)}(x) = \frac{\partial^i z^{(n)}}{\partial t^i}(0, x), \quad i = 0, 1, 2, \quad x \in [0, \infty), \quad (17)$$

$$\tilde{\mu}_i^{(n)}(t) = \frac{\partial^i z^{(n)}}{\partial x^i}(t, 0), \quad i = 0, 1, \quad t \in [0, \infty). \quad (18)$$

Similarly to theorem 1 from the article [9], we derive the following matching conditions by differentiating «conditions» (17) and (18) and taking into account the formula (16):

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_0^{(n)}(0) &= \tilde{\varphi}_0^{(n)}(0), \quad D\tilde{\mu}_0^{(n)}(0) = \tilde{\varphi}_1^{(n)}(0), \quad \tilde{\mu}_1^{(n)}(0) = D\tilde{\varphi}_0^{(n)}(0), \\ D^2\tilde{\mu}_0^{(n)}(0) &= \tilde{\varphi}_2^{(n)}(0), \quad D\tilde{\mu}_1^{(n)}(0) = D\tilde{\varphi}_1^{(n)}(0), \quad D^2\tilde{\mu}_1^{(n)}(0) = D\tilde{\varphi}_2^{(n)}(0), \\ D^3\tilde{\mu}_0^{(n)}(0) &= f^{(n)}(0, 0, \tilde{\varphi}_0(0)) - bD\tilde{\varphi}_2^{(n)}(0) + a^2 D^2\tilde{\varphi}_1^{(n)}(0) + a^2 b D^3\tilde{\varphi}_0^{(n)}(0), \end{aligned} \quad (19)$$

where D is the Newton – Leibnitz operator.

We consider the difference

$$\begin{aligned} z^{(n)}(t, x) - w^{(n)}(t, x) &= w^{(n)}(0, 0) - w^{(n)}(t, x) + x \frac{\partial w^{(n)}}{\partial x}(0, 0) + \\ &+ \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 w^{(n)}}{\partial x^2}(0, 0) + t \frac{\partial w^{(n)}}{\partial t}(0, x) + \frac{t^2}{2} \frac{\partial^2 w^{(n)}}{\partial t^2}(0, x) + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^x (x - \xi)^2 \left[h_\delta(\xi) \frac{\partial^3 w^{(n)}}{\partial x^3}(0, \xi) + \alpha(1 - h_\delta(\xi)) \right] d\xi + \frac{1}{2} \int_0^t (t - \tau)^2 \frac{\partial^3 w^{(n)}}{\partial t^3}(\tau, x) d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^x (x - \xi)^2 \left[(h_\delta(\xi) - 1) \frac{\partial^3 w^{(n)}}{\partial x^3}(0, \xi) + \alpha(1 - h_\delta(\xi)) \right] d\xi = \\ &= \frac{\alpha \delta (\delta^2 + 6x^2 - 4\delta x)}{24} + \frac{1}{2} \int_0^x (x - \xi)^2 (h_\delta(\xi) - 1) \frac{\partial^3 w^{(n)}}{\partial x^3}(0, \xi) d\xi. \end{aligned}$$

Therefore, the value $|z^{(n)}(t, x) - w^{(n)}(t, x)|$ can be estimated as

$$|z^{(n)}(t, x) - w^{(n)}(t, x)| \leq \left| \frac{\delta (\delta^2 + 6x^2 - 4\delta x) \left(\alpha - \max_{\xi \in [0, \delta]} \frac{\partial^3 w^{(n)}}{\partial x^3}(0, \xi) \right)}{24} \right|. \quad (20)$$

Let us introduce in the Fréchet space $C(\bar{Q})$ a countable system of seminorms

$$\mathfrak{p}_m(g) = \max_{(t,x) \in [0,m] \times [0,m]} |g(t,x)| \exp(-x), \quad m \in \mathbb{N}.$$

If δ is small enough, then estimate of the expression (20) yields the inequality

$$\mathfrak{p}_m(z^{(n)} - w^{(n)}) \leq \frac{1}{n}. \quad (21)$$

Now let us consider the inequality

$$0 \leq \mathfrak{p}_m(z^{(n)} - u) \leq \mathfrak{p}_m(z^{(n)} - w^{(n)}) + \mathfrak{p}_m(w^{(n)} - u).$$

From estimate of the inequality (21) it follows that $\mathfrak{p}_m(z^{(n)} - w^{(n)}) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. And since $w^{(n)}: \bar{Q} \mapsto \mathbb{R}$ converges to $u: \bar{Q} \mapsto \mathbb{R}$ in the space $C(\bar{Q})$, which obviously implies $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{p}_m(w^{(n)} - u) = 0$ for any $m \in \mathbb{N}$. Then by the squeeze theorem, we have that $\lim_{n \rightarrow \infty} z^{(n)} = u$. Thus, we constructed a sequence $z^{(n)} \in C^3(\bar{Q})$, which converges to the function $u: \bar{Q} \mapsto \mathbb{R}$ in the space $C(\bar{Q})$, and matching conditions (19) are satisfied.

In addition, we note that

$$\tilde{\varphi}_i = \frac{\partial^i u}{\partial t^i}(0, \cdot) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial^i z^{(n)}}{\partial t^i}(0, \cdot), \quad i = 0, 1, 2,$$

and

$$\tilde{\mu}_i = \frac{\partial^i u}{\partial x^i}(\cdot, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial^i z^{(n)}}{\partial x^i}(\cdot, 0), \quad i = 0, 1,$$

where the limits are understood in the spaces $C^{2-i}([0, \infty))$.

Let us introduce the function $v^{(n)}(t, x)$ and the operator $K_n: C(\bar{Q}) \mapsto C(\bar{Q})$:

$$\begin{aligned} v^{(n)}(t, x) &= \sum_{k=1}^2 \frac{(-1)^k \left((a + (-1)^k b) \Im[\tilde{\varphi}_1^{(n)}] + \Im^2[\tilde{\varphi}_2^{(n)}] + ab\tilde{\varphi}_0^{(n)} \right) (x + (-1)^k at)}{2a(a + (-1)^k b)} + \\ &\quad + \frac{(a^2 \tilde{\varphi}_0^{(n)} - \Im^2[\tilde{\varphi}_2^{(n)}])(x - bt)}{a^2 - b^2}, \quad (t, x) \in \overline{Q^{(1)}}, \\ v^{(n)}(t, x) &= \sum_{k=1}^2 \frac{(-1)^k \left((a + (-1)^k b) \Im[\tilde{\varphi}_1^{(n)}] + \Im^2[\tilde{\varphi}_2^{(n)}] + ab\tilde{\varphi}_0^{(n)} \right) (x + (-1)^k at)}{2a(a + (-1)^k b)} + \\ &\quad + \frac{1}{a-b} \left[\frac{b}{a} \Im[\tilde{\varphi}_1^{(n)}] \left(at - \frac{ax}{b} \right) - ab \Im[\tilde{\mu}_1^{(n)}] \left(t - \frac{x}{b} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{b \Im^2[\tilde{\varphi}_2^{(n)}] \left(at - \frac{ax}{b} \right)}{a(a+b)} + \frac{b^2 \tilde{\varphi}_0^{(n)} \left(at - \frac{ax}{b} \right)}{a+b} + a\tilde{\varphi}_0^{(n)}(0) - b\tilde{\mu}_0^{(n)} \left(t - \frac{x}{b} \right) \right], \quad a < b, \quad (t, x) \in \overline{Q^{(2)}}, \\ v^{(n)}(t, x) &= \frac{\left((a+b) \Im[\tilde{\varphi}_1^{(n)}] + \Im^2[\tilde{\varphi}_2^{(n)}] + ab\tilde{\varphi}_0^{(n)} \right) (x + at)}{2a(a+b)} + \frac{(a^2 \tilde{\varphi}_0^{(n)} - \Im^2[\tilde{\varphi}_2^{(n)}])(x - bt)}{a^2 - b^2} - \frac{1}{2a(a-b)} \times \\ &\quad \times \left(\left((a+b) \Im[\tilde{\varphi}_1^{(n)}] + \Im^2[\tilde{\varphi}_2^{(n)}] + ab\tilde{\varphi}_0^{(n)} \right) (at - x) - 2a^2 b \Im[\tilde{\mu}_1^{(n)}] \left(t - \frac{x}{a} \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2a^2 \tilde{\varphi}_0^{(n)}(0) - 2a^2 \tilde{\mu}_0^{(n)}\left(t - \frac{x}{a}\right) \Bigg), \quad b < a, (t, x) \in \overline{Q^{(2)}}, \\
 v^{(n)}(t, x) = & \frac{1}{a-b} \left(\frac{b}{a} \Im \left[\tilde{\varphi}_1^{(n)} \right] \left(at - \frac{ax}{b} \right) - ab \Im \left[\tilde{\mu}_1^{(n)} \right] \left(t - \frac{x}{b} \right) + \frac{b \Im^2 \left[\tilde{\varphi}_2^{(n)} \right] \left(at - \frac{ax}{b} \right)}{a(a+b)} + \frac{b^2 \tilde{\varphi}_0^{(n)} \left(at - \frac{ax}{b} \right)}{a+b} - \right. \\
 & \left. - b \tilde{\mu}_0^{(n)} \left(t - \frac{x}{b} \right) \right) + \frac{\left((a+b) \Im \left[\tilde{\varphi}_1^{(n)} \right] + \Im^2 \left[\tilde{\varphi}_2^{(n)} \right] + ab \tilde{\varphi}_0^{(n)} \right) (x+at)}{2a(a+b)} - \\
 & - \frac{1}{2a(a-b)} \left(\left((a+b) \Im \left[\tilde{\varphi}_1^{(n)} \right] + \Im^2 \left[\tilde{\varphi}_2^{(n)} \right] + ab \tilde{\varphi}_0^{(n)} \right) (at-x) - \right. \\
 & \left. - 2a^2 b \Im \left[\tilde{\mu}_1^{(n)} \right] \left(t - \frac{x}{a} \right) - 2a^2 \tilde{\mu}_0^{(n)} \left(t - \frac{x}{a} \right) \right), \quad (t, x) \in \overline{Q^{(3)}}, \\
 K_n[u](t, x) = & \int_0^t \left\{ \int_0^{a(t-\tau)+x} \frac{f^{(n)}(\tau, z, u^{(1)}(\tau, z)) (a(t-\tau) + x - z)}{2a(a+b)} dz + \right. \\
 & + \int_0^{x-b(t-\tau)} \frac{f^{(n)}(\tau, z, u^{(1)}(\tau, z)) (b(t-\tau) - x + z)}{(a-b)(a+b)} dz + \\
 & \left. + \int_0^{x-a(t-\tau)} \frac{f^{(n)}(\tau, z, u^{(1)}(\tau, z)) (a(\tau-t) + x - z)}{2a(a-b)} dz \right\} d\tau, \quad (t, x) \in \overline{Q^{(1)}}, \\
 K_n[u](t, x) = & \int_{t-\frac{x}{b}}^t \left\{ \int_0^{x+a(t-\tau)} \frac{f^{(n)}(\tau, z, u^{(1)}(\tau, z)) (x-z+a(t-\tau))}{2a(a+b)} dz + \right. \\
 & + \int_0^{x-b(t-\tau)} \frac{f^{(n)}(\tau, z, u^{(1)}(\tau, z)) (z-x+b(t-\tau))}{(a-b)(a+b)} dz + \int_0^{x-a(t-\tau)} \frac{f^{(n)}(\tau, z, u^{(1)}(\tau, z)) (x-z+a(\tau-t))}{2a(a-b)} dz \Bigg\} d\tau + \\
 & + \int_0^{t-\frac{x}{b}} \left\{ \int_0^{x+a(t-\tau)} \frac{f^{(n)}(\tau, z, u^{(2)}(\tau, z)) (x-z+a(t-\tau))}{2a(a+b)} dz + \int_0^{x-a(t-\tau)} \frac{f^{(n)}(\tau, z, u^{(2)}(\tau, z)) (x-z+a(\tau-t))}{2a(a-b)} dz - \right. \\
 & \left. - \int_0^{a\left(t-\tau-\frac{x}{b}\right)} \frac{f^{(n)}(\tau, z, u^{(2)}(\tau, z)) (bz+a(x+b(\tau-t)))}{a(a-b)(a+b)} dz \right\} d\tau, \quad a < b, (t, x) \in \overline{Q^{(2)}}, \\
 K_n[u](t, x) = & \int_{t-\frac{x}{b}}^t \left\{ \int_0^{x+a(t-\tau)} \frac{f^{(n)}(\tau, z, u^{(1)}(\tau, z)) (x-z+a(t-\tau))}{2a(a+b)} dz + \right. \\
 & + \int_0^{x-b(t-\tau)} \frac{f^{(n)}(\tau, z, u^{(1)}(\tau, z)) (z-x+b(t-\tau))}{(a-b)(a+b)} dz + \int_0^{x-a(t-\tau)} \frac{f^{(n)}(\tau, z, u^{(1)}(\tau, z)) (x-z+a(\tau-t))}{2a(a-b)} dz \Bigg\} d\tau +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{t-\frac{x}{a}}^{t-\frac{x}{b}} \left\{ \int_0^{x+a(t-\tau)} \frac{(x-z+a(t-\tau))f^{(n)}(\tau, z, u^{(2)}(\tau, z))}{2a(a+b)} dz + \int_0^{x-a(t-\tau)} \frac{(x-z+a(\tau-t))f^{(n)}(\tau, z, u^{(2)}(\tau, z))}{2a(a-b)} dz - \right. \\
& \quad \left. - \int_0^{a(t-\frac{x}{b}-\tau)} \frac{(bz+a(x+b(\tau-t)))f^{(n)}(\tau, z, u^{(2)}(\tau, z))}{a(a-b)(a+b)} dz \right\} d\tau + \\
& + \int_0^{t-\frac{x}{a}} \left\{ \int_0^{x+a(t-\tau)} \frac{(x-z+a(t-\tau))f^{(n)}(\tau, z, u^{(3)}(\tau, z))}{2a(a+b)} dz + \int_0^{a(t-\tau)-x} \frac{(x+z+a(\tau-t))f^{(n)}(\tau, z, u^{(3)}(\tau, z))}{2a(a-b)} dz - \right. \\
& \quad \left. - \int_0^{a(t-\frac{x}{b}-\tau)} \frac{(bz+a(x+b(\tau-t)))f^{(n)}(\tau, z, u^{(3)}(\tau, z))}{a(a-b)(a+b)} dz \right\} d\tau, a < b, (t, x) \in \overline{Q^{(3)}}, \\
& K_n[u](t, x) = \int_0^{t-\frac{x}{a}} \left\{ \int_0^{x+a(t-\tau)} \frac{(x-z+a(t-\tau))f^{(n)}(\tau, z, u^{(2)}(\tau, z))}{2a(a+b)} dz + \right. \\
& + \int_0^{x-b(t-\tau)} \frac{(-x+z+b(t-\tau))f^{(n)}(\tau, z, u^{(2)}(\tau, z))}{a^2-b^2} dz + \int_0^{a(t-\tau)-x} \frac{(x+z+a(\tau-t))f^{(n)}(\tau, z, u^{(2)}(\tau, z))}{2a(a-b)} dz \Big\} d\tau + \\
& + \int_{t-\frac{x}{a}}^t \left\{ \int_0^{x+a(t-\tau)} \frac{(x-z+a(t-\tau))f^{(n)}(\tau, z, u^{(1)}(\tau, z))}{2a(a+b)} dz + \int_0^{x-b(t-\tau)} \frac{(-x+z+b(t-\tau))f^{(n)}(\tau, z, u^{(1)}(\tau, z))}{(a-b)(a+b)} dz + \right. \\
& \quad \left. + \int_0^{x-a(t-\tau)} \frac{(x-z+a(\tau-t))f^{(n)}(\tau, z, u^{(1)}(\tau, z))}{2a(a-b)} dz \right\} d\tau, b < a, (t, x) \in \overline{Q^{(2)}}, \\
& K_n[u](t, x) = \int_{t-\frac{x}{b}}^{t-\frac{x}{a}} \left\{ \int_0^{x+a(t-\tau)} \frac{(x-z+a(t-\tau))f^{(n)}(\tau, z, u^{(2)}(\tau, z))}{2a(a+b)} dz + \right. \\
& + \int_0^{x-b(t-\tau)} \frac{(-x+z+b(t-\tau))f^{(n)}(\tau, z, u^{(2)}(\tau, z))}{a^2-b^2} dz + \int_0^{a(t-\tau)-x} \frac{(x+z+a(\tau-t))f^{(n)}(\tau, z, u^{(2)}(\tau, z))}{2a(a-b)} dz \Big\} d\tau + \\
& + \int_{t-\frac{x}{a}}^t \left\{ \int_0^{x+a(t-\tau)} \frac{(x-z+a(t-\tau))f^{(n)}(\tau, z, u^{(1)}(\tau, z))}{2a(a+b)} dz + \int_0^{x-b(t-\tau)} \frac{(-x+z+b(t-\tau))f^{(n)}(\tau, z, u^{(1)}(\tau, z))}{(a-b)(a+b)} dz + \right. \\
& \quad \left. + \int_0^{x-a(t-\tau)} \frac{(x-z+a(\tau-t))f^{(n)}(\tau, z, u^{(1)}(\tau, z))}{2a(a-b)} dz \right\} d\tau +
\end{aligned}$$

$$+ \int_0^{t-\frac{x}{b}} \left\{ \int_0^{x+a(t-\tau)} \frac{(x-z+a(t-\tau)) f^{(n)}(\tau, z, u^{(3)}(\tau, z))}{2a(a+b)} dz + \int_0^{a(t-\tau)-x} \frac{(x+z+a(\tau-t)) f^{(n)}(\tau, z, u^{(3)}(\tau, z))}{2a(a-b)} dz - \right. \\ \left. - \int_0^{a(t-\frac{x}{b}-\tau)} \frac{(bz+a(x+b(\tau-t))) f^{(n)}(\tau, z, u^{(3)}(\tau, z))}{a(a-b)(a+b)} dz \right\} d\tau, b < a, (t, x) \in \overline{Q^{(3)}}.$$

For the sake of notation we also set $f^{(\infty)} = f$. We note that the operator $K_n : C(\overline{Q}) \mapsto C(\overline{Q})$ is well-defined and continuous, since the smoothness conditions

$$z^{(n)} \in C^3(\overline{Q}), f^{(n)} \in C^3(\overline{Q}), \tilde{\varphi}_0^{(n)} \in C^3([0, \infty)), \tilde{\varphi}_1^{(n)} \in C^2([0, \infty)), \\ \tilde{\varphi}_2^{(n)} \in C^1([0, \infty)), \tilde{\mu}_0^{(n)} \in C^3([0, \infty)), \tilde{\mu}_1^{(n)} \in C^2([0, \infty)) \quad (22)$$

and the matching conditions (19) are fulfilled.

Now we construct a sequence u_n by the formula

$$u_n = K_n[z^{(n)}] + v^{(n)}. \quad (23)$$

By virtue of conditions (19) and (22), the function u_n belongs to the class $C^3(\overline{Q})$. Taking into account the relations

$$\tilde{\varphi}_i = \frac{\partial^i u}{\partial t^i}(0, \cdot) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial^i z^{(n)}}{\partial t^i}(0, \cdot), i = 0, 1, 2,$$

and

$$\tilde{\mu}_i = \frac{\partial^i u}{\partial x^i}(\cdot, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial^i z^{(n)}}{\partial x^i}(\cdot, 0), i = 0, 1,$$

we pass to the limit in formula (23) and get

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (K_n[z^{(n)}] + v^{(n)}) = K_\infty[u] + v = u.$$

Direct verification proves that the function u_n is a solution to the problem

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + b \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u_n(t, x) = f^{(n)}(t, x, z^{(n)}(t, x)), (t, x) \in Q,$$

$$\frac{\partial^i u_n}{\partial t^i}(0, x) = \tilde{\varphi}_i^{(n)}(x), i = 0, 1, 2, x \in [0, \infty),$$

$$\frac{\partial^i u_n}{\partial x^i}(t, 0) = \tilde{\mu}_i^{(n)}(t), i = 0, 1, t \in [0, \infty).$$

Due to the continuity of the Nemytskii operator,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} + b \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u_n(\cdot) - f(\cdot, u_n(\cdot)) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f^{(n)}(\cdot, z^{(n)}(\cdot)) - f(\cdot, u_n(\cdot))) = 0$$

in the space $C(\overline{Q})$. In addition, the relations

$$\varphi_i = \frac{\partial^i u}{\partial t^i}(0, \cdot) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial^i u_n}{\partial t^i}(0, \cdot), i = 0, 1, 2,$$

$$\mu_i = \frac{\partial^i u}{\partial x^i}(\cdot, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial^i u_n}{\partial x^i}(\cdot, 0), i = 0, 1,$$

where the limits are understood in the spaces $C^{2-i}([0, \infty))$ hold.

Thus, we have proven the following theorem.

Theorem 4. Let the conditions $\varphi_0 \in C^2([0, \infty))$, $\varphi_1 \in C^1([0, \infty))$, $\varphi_2 \in C([0, \infty))$, $\mu_0 \in C^2([0, \infty))$, $\mu_1 \in C([0, \infty))$ and $f \in C(\bar{Q} \times \mathbb{R})$ be satisfied. Then a mild solution $u : \bar{Q} \mapsto \mathbb{R}$ of problem (1)–(3) from the class $C^2(\bar{Q})$ is the limit of classical solutions, i. e. there exists a sequence of functions $u_n \in C^3(\bar{Q})$ such that

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \rho \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} + b \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u_n(\cdot), f(\cdot, u_n(\cdot)) \right)_{C(\bar{Q} \times \mathbb{R})} &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u, u_n)_{C(\bar{Q})} &= 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\varphi_0, u_n(0, \cdot))_{C^2([0, \infty))} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\mu_0, u_n(\cdot, 0))_{C^2([0, \infty))} = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \rho \left(\varphi_1, \frac{\partial u_n}{\partial t}(0, \cdot) \right)_{C^1([0, \infty))} &= 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho \left(\mu_1, \frac{\partial u_n}{\partial x}(\cdot, 0) \right)_{C^1([0, \infty))} = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \rho \left(\varphi_2, \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}(0, \cdot) \right)_{C([0, \infty))} &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

It turns out that the statement opposite to theorem 4 is also true.

Theorem 5. Let the conditions $\varphi_0 \in C^2([0, \infty))$, $\varphi_1 \in C^1([0, \infty))$, $\varphi_2 \in C([0, \infty))$, $\mu_0 \in C^2([0, \infty))$, $\mu_1 \in C([0, \infty))$ and $f \in C(\bar{Q} \times \mathbb{R})$ be satisfied, and let there exists a sequence of functions $u_n \in C^3(\bar{Q})$ such that equalities (24) hold, where $u \in C^2(\bar{Q})$. Then the function $u : \bar{Q} \mapsto \mathbb{R}$ is a mild solution of problem (1)–(3).

Proof. It is easy to see that u_n is a classical solution of the mixed problem

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + b \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u_n(t, x) &= f^{(n)}(t, x, u_n(t, x)) := f(t, x, u_n(t, x)) + \varepsilon_n(t, x), \quad (t, x) \in Q, \\ \frac{\partial^i u_n}{\partial t^i}(0, x) &:= \tilde{\varphi}_i^{(n)}(x), \quad i = 0, 1, 2, \quad x \in [0, \infty), \\ \frac{\partial^i u_n}{\partial x^i}(t, 0) &:= \tilde{\mu}_i^{(n)}(t), \quad i = 0, 1, \quad t \in [0, \infty), \end{aligned}$$

where $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\varepsilon_n, 0)_{C(\bar{Q} \times \mathbb{R})} = 0$. In this case the matching condition (19), which can be deduced according to the scheme we outlined in the work [9], is satisfied. Then by theorem 1 from the article [9], the function u_n is a solution to the integral equation

$$u_n = K_n[u_n] + v^{(n)}. \quad (25)$$

Taking into account $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\varepsilon_n, 0)_{C(\bar{Q} \times \mathbb{R})} = 0$ and the continuity of the operator K_n and passing to the limit in the equation (25), we obtain

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (K_n[u_n] + v^{(n)}) = K_\infty[u] + v.$$

The theorem is proved.

Conclusions

The sufficient conditions under which there exists a unique mild solution of a mixed problem for a third-order non-linear strictly hyperbolic equation with the wave operator are presented.

References

1. Rudenko OV, Soluian SI. *Theoretical foundations of nonlinear acoustics*. New York: Consultants Bureau; 1984. VII, 274 p.
2. Varlamov VV. The problem of the propagation of nonstationary acoustic waves in a relaxing medium. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1990;30(1):241–245. DOI: 10.1016/0041-5553(90)90037-S.
3. Varlamov VV. The Cauchy problem for an equation that describes nonstationary waves in a medium with relaxation. *Soviet Mathematics. Doklady*. 1989;39:145–148.

4. Varlamov VV. On a hyperbolic equation that describes wave processes in media with dispersion and absorption. *Soviet Mathematics. Doklady*. 1991;42:256–259.
5. Rudzko JV. Global classical and mild solutions of the Cauchy problem for a semilinear hyperbolic equation in the case of two independent variables. In: Gusakov VG, editor. *Molodezh v nauke – 2023. Tezisy dokladov XX Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii molodykh uchenykh; 20–22 sentyabrya 2023 g.; Minsk, Belarus'* [Youth in science – 2023. Abstracts of the reports of the 20th International scientific conference of young scientists; 2023 September 20–22; Minsk, Belarus]. Minsk: Belaruskaja navuka; 2023. p. 544–546. Russian.
6. Caixeta AH, Lasiecka I, Cavalcanti VND. Global attractors for a third order in time nonlinear dynamics. *Journal of Differential Equations*. 2016;261(1):113–147. DOI: 10.1016/j.jde.2016.03.006.
7. Kaltenbacher B, Nikolić V. The inviscid limit of third-order linear and nonlinear acoustic equations. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 2021;81(4):1461–1482.
8. Buhrii O, Kholyavka O, Pukach P, Vovk M. Cauchy problem for hyperbolic equations of third order with variable exponent of nonlinearity. *Carpathian Mathematical Publications*. 2020;12(2):419–433.
9. Korzyuk VI, Rudzko JV. Initial-boundary value problem for a third-order semilinear hyperbolic equation with the wave operator. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2024;45(11):5569–5580. DOI: 10.1134/S199508022460643X.
10. Demidenko GV. Quasielliptic operators and equations not solvable with respect to the higher order derivative. *Journal of Mathematical Sciences*. 2018;230(1):25–35. DOI: 10.1007/s10958-018-3723-2.
11. Il'in VA, Moiseev EI. Uniqueness of the solution of a mixed problem for the wave equation with nonlocal boundary conditions. *Differential Equations*. 2000;36(5):728–733. DOI: 10.1007/BF02754231.
12. Gaiduk SI, Zayats GM. A problem in the wave theory of mechanical impact. *Differential Equations*. 1986;22:215–225.
13. Egorov YV. A contribution to the theory of generalized functions. *Russian Mathematical Surveys*. 1990;45(5):1–49. DOI: 10.1070/RM1990v045n05ABEH002683.
14. Nualart M. Distributional solutions for damped wave equations. *Electronic Journal of Differential Equations*. 2020;2020:131. DOI: 10.58997/ejde.2020.131.
15. Korzyuk VI, Rudzko JV. Classical solution of the first mixed problem for the telegraph equation with a nonlinear potential in a curvilinear quadrant. *Differential Equations*. 2023;59(8):1075–1089. DOI: 10.1134/S0012266123080062.
16. Ahmed HM, el-Owaidy HM, al-Nahhas MA. Nonlinear hilfer fractional integro-partial differential system. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2019;40(2):115–126. DOI: 10.1134/S1995080219020021.
17. Rozhdestvenskiy BL, Yanenko NN. *Systems of quasilinear equations and their applications to gas dynamics*. Providence: [s. n.]; 1983. 676 p.
18. Friedrichs KO. Nonlinear hyperbolic differential equations for functions of two independent variables. *American Journal of Mathematics*. 1948;70(3):555–589. DOI: 10.2307/2372200.
19. DiBenedetto E. *Partial differential equations*. Boston: Birkhäuser Boston; 2009. 409 p.
20. Khromov AP. Divergent series and generalized mixed problem for a wave equation of the simplest type. *Izvestiya of Saratov University Mathematics Mechanics Informatics*. 2022;22(3):322–331. DOI: 10.18500/1816-9791-2022-22-3-322-331.
21. Kharibegashvili SS, Jokhadze OM. Global and blowup solutions of a mixed problem with nonlinear boundary conditions for a one-dimensional semilinear wave equation. *Sbornik: Mathematics*. 2014;205(4):573–599. DOI: 10.1070/SM2014v205n04ABEH004388.
22. Narasimhan R. *Analysis on real and complex manifolds*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company; 1968. X, 246 p.

Received 21.07.2025 / revised 25.11.2025 / accepted 25.11.2025.

УДК 514.764.227

КОНФОРМНОЕ УРАВНЕНИЕ КИЛЛИНГА НА 2-СИММЕТРИЧЕСКОМ ШЕСТИМЕРНОМ НЕРАЗЛОЖИМОМ ЛОРЕНЦЕВОМ МНОГООБРАЗИИ С ТРИВИАЛЬНЫМ ТЕНЗОРОМ ВЕЙЛЯ

М. Е. ГНЕДКО¹⁾, О. П. ХРОМОВА¹⁾

¹⁾Алтайский государственный университет, пр. Ленина, 61, 656049, г. Барнаул, Россия

Аннотация. Исследован конформный аналог уравнения Киллинга на 2-симметрических шестимерных неразложимых лоренцевых многообразиях, а также изучены свойства конформного множителя данного уравнения. Для случая конформно-плоских метрик построены новые нетривиальные примеры конформно-киллинговых векторных полей с переменным конформным множителем.

Ключевые слова: конформно-киллингово векторное поле; лоренцево многообразие; k -симметрическое пространство; тензор Вейля.

Образец цитирования:

Гнедко М.Е., Хромова О.П. Конформное уравнение Киллинга на 2-симметрическом шестимерном неразложимом лоренцевом многообразии с тривиальным тензором Вейля. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2025;3:29–37.
EDN: BWDOWO

For citation:

Gnedko ME, Khromova OP. Conformal Killing equation on a 2-symmetric six-dimensional indecomposable Lorentzian manifold with trivial Weyl tensor. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2025;3:29–37. Russian.
EDN: BWDOWO

Авторы:

Максим Евгеньевич Гнедко – ассистент кафедры математического анализа Института математики и информационных технологий.

Олеся Павловна Хромова – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры математического анализа Института математики и информационных технологий.

Authors:

Maxim E. Gnedko, assistant at the department of mathematical analysis, Institute of Mathematics and Information Technologies. gnedko98@mail.ru

Olesya P. Khromova, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of mathematical analysis, Institute of Mathematics and Information Technologies. khromova.olesya@gmail.com

CONFORMAL KILLING EQUATION ON A 2-SYMMETRIC SIX-DIMENSIONAL INDECOMPOSABLE LORENTZIAN MANIFOLD WITH TRIVIAL WEYL TENSOR

M. E. GNEDKO^a, O. P. KHROMOVA^a

^aAltai State University, 61 Lenina Avenue, Barnaul 656049, Russia

Corresponding author: O. P. Khromova (khromova.olesya@gmail.com)

Abstract. In this paper, we study the conformal analogue of the Killing equation on 2-symmetric six-dimensional indecomposable Lorentzian manifolds, and also study the properties of the conformal factor of this equation. For the case of conformally flat metrics, new non-trivial examples of conformal Killing vector fields with a variable conformal factor are constructed.

Keywords: conformal Killing vector field; Lorentzian manifold; k -symmetric space; Weyl tensor.

Введение

Конформно-киллинговы векторные поля являются естественным обобщением векторных полей Киллинга и играют важную роль в изучении группы конформных преобразований многообразия, потоков Риччи на многообразии, теории солитонов Риччи. Псевдоримановы симметрические пространства порядка k , где $k \geq 2$, возникают в исследованиях по псевдоримановой геометрии и в физике. В случаях, когда $k = 2$ и $k = 3$, они изучены Д. В. Алексеевским и А. С. Галаевым [1]. При малых размерностях эти пространства и векторные поля Киллинга на них исследовали Д. Н. Оскорбин, Е. Д. Родионов и И. В. Эрнст [2].

Солитоны Риччи являются обобщением метрик Эйнштейна на (псевдо)римановых многообразиях. Уравнение солитонов Риччи изучалось на различных классах многообразий многими математиками. В частности, Д. Н. Оскорбиным и Е. Д. Родионовым [3] найдено общее решение уравнения солитона Риччи на 2-симметрических лоренцевых многообразиях малой размерности, доказана локальная разрешимость этого уравнения в классе 3-симметрических лоренцевых многообразий. В случае постоянства константы Эйнштейна в уравнении солитона Риччи векторные поля Киллинга позволяют найти общее решение уравнения солитона Риччи, отвечающее данной константе. Однако для различных значений константы Эйнштейна роль векторных полей Киллинга играют конформно-киллинговы векторные поля, в связи с чем возникает потребность в их изучении.

В настоящей работе исследован конформный аналог уравнения Киллинга на 2-симметрических шестимерных неразложимых лоренцевых многообразиях, изучены свойства конформного множителя этого уравнения на них. Установлено, что конформный множитель конформного аналога уравнения Киллинга зависит от поведения тензора Вейля. Так, если тензор Вейля нетривиален, то конформный множитель постоянен (данный случай исследован ранее в работах [3; 4]). Если же тензор Вейля тривиален, то конформный множитель и общее решение конформного аналога уравнения Киллинга выражаются через функции Эйри. Кроме того, для случая равенства нулю тензора Вейля построены новые нетривиальные примеры конформно-киллинговых векторных полей с переменным конформным множителем.

Предварительные сведения

Псевдоримановым многообразием называется гладкое многообразие M , на котором задан гладкий невырожденный симметричный метрический тензор g . Если метрический тензор имеет сигнатуру $(1, n - 1)$, то (M, g) называется лоренцевым многообразием.

Псевдориманово многообразие (M, g) называется симметрическим порядка k , или k -симметрическим, если $\nabla^k R = 0$, $\nabla^{k-1} R \neq 0$, где $k \geq 1$, R – тензор кривизны (M, g) , а ∇ – связность Леви-Чивиты.

В работах [5–7] М. Каэн и Н. Уоллах показали, что односвязное лоренцево симметрическое пространство изометрично произведению риманова симметрического пространства и одного из следующих лоренцевых многообразий: $(\mathbb{R}, dt^2)$, универсальной накрывающей k -мерного пространства де Ситтера или анти де Ситтера ($k \leq 2$), пространства Каэна – Уоллаха, т. е. пространства $SW^{n+2}(A) = (\mathbb{R}^{n+2}, g)$ с метрикой

$$g = -2du(dv + A_{ij}x^i x^j du) + \delta_{ij}x^i x^j,$$

где δ_{ij} – символы Кронекера; A_{ij} – матричные константы.

Далее все рассматриваемые лоренцевы многообразия будем полагать локально неразложимыми, так как из теоремы Ву [8] вытекает, что любое лоренцево многообразие локально может быть представлено в виде прямого произведения некоторого риманова многообразия (M_1, g_1) и локально неразложимого лоренцева многообразия (M_2, g_2) .

Определение 1. Обобщенное пространство Казна – Уоллаха (CW_d^{n+2}, g) размерности $n+2 \geq 4$, порядка d определяется как $\mathbb{R}^{n+2}$ с метрикой

$$g = 2dudv + \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(u) x^i x^j du^2, \quad A = (a_{ij}(u)) = \sum_{i=0}^n H_i u^i,$$

где H_i – симметрические постоянные матрицы размера $n \times n$.

Теорема 1 [1; 9]. *Локально неразложимое лоренцево многообразие (M, g) размерности $n+2 \geq 4$ является 2-симметрическим (3-симметрическим) в том и только в том случае, если оно локально изометрично обобщенному пространству Казна – Уоллаха (CW_d^{n+2}) порядка $d=1$ ($d=2$).*

Определение 2. Гладкое полное векторное поле K на (псевдо)римановом многообразии (M, g) называется векторным полем Киллинга, если выполняется равенство $L_K g = 0$, где $L_K g$ – производная Ли метрического тензора вдоль поля K .

Определение 3. Гладкое полное векторное поле K на (псевдо)римановом многообразии (M, g) называется конформно-киллинговым векторным полем, если выполняется равенство $L_K g = f(p)g$, где $L_K g$ – производная Ли метрического тензора вдоль поля K , $p \in M$, а $f(p)$ – гладкая вещественная функция на многообразии.

Пусть (M, g) – 2-симметрическое локально неразложимое лоренцево многообразие размерности n . Исходя из работы Д. В. Алексеевского и А. С. Галаева [1], выберем в (M, g) локальную систему координат $(v, x^1, x^2, \dots, x^n, u)$ такую, что

$$g = 2dudv + \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 + \sum_{i,j=1}^n H_{ij0} x^i x^j + \sum_{i=1}^n u H_{i1} (x^i)^2 du^2, \quad (1)$$

где H_0 – симметрические постоянные матрицы размера $n \times n$; H_1 – невырожденная диагональная матрица.

В уравнении конформного аналога уравнения Киллинга $L_K g = f(p)g$ вид конформного множителя $f(p)$ зависит от того, является ли метрика g конформно-плоской. Путем прямых вычислений компонент тензора Вейля метрики (1) доказывается следующая лемма.

Лемма. *Равенство тензора Вейля метрики (1) нулю ($W=0$) равносильно условиям, что все H_{i1} равны между собой, все H_{i0} равны между собой, а при $i \neq j$ имеем $H_{ij0} = 0$.*

Доказательство. Тензор Вейля на многообразии с метрикой (1) принимает вид

$$\begin{aligned} W = & \frac{1}{n-2} \left((2-n)(H_{i1}u + H_{i0}) + \sum_{j=1}^n (H_{jj1}u + H_{jj0}) \right) \times \\ & \times \sum_{i=1}^n (dudx^i dux^i + dx^i dudx^i du - dux^i dx^i du - dx^i dudux^i) + \\ & + H_{ij0} (1 - \delta_{ij}) \sum_{i,j=1}^n (dudx^i dx^j du + dx^i dudux^j - dux^i dux^j - dx^i dudx^j du). \end{aligned}$$

Заметим, что в случае, когда $i \neq j$, компоненты тензора Вейля при $dudx^i dx^j du$, $dx^i dudux^j$, $dudx^i dux^j$ и $dx^i dudx^j du$ равны H_{ij0} . Следовательно, если $W=0$, то при $i \neq j$ имеем $H_{ij0} = 0$.

Все компоненты тензора Вейля при $dudx^i dux^i$, $dx^i dudx^i du$, $dudx^i dx^i du$ и $dx^i dudux^i$ с точностью до знака имеют следующий вид:

$$-H_{i1}u - H_{i0} + \frac{1}{n-2} \sum_{j=1}^n (H_{jj1}u + H_{jj0}).$$

Приравняем к нулю коэффициент при u , а также свободный член данного выражения:

$$-H_{i1} + \frac{1}{n-2} \sum_{j=1}^n H_{jj1} = 0,$$

$$-H_{ii0} + \frac{1}{n-2} \sum_{j=1}^n H_{jj0} = 0.$$

Так как эти уравнения должны быть справедливы при любых $1 \leq i \leq n$, то из них следует, что все H_{ii1} равны между собой и все H_{ii0} также равны между собой. Лемма доказана.

Шестимерный случай

Перейдем к анализу уравнения конформно-киллингова векторного поля. Зафиксируем точку $p \in M$ и рассмотрим уравнение $L_K g = fg$ в локальных координатах (1) в окрестности этой точки. С учетом результатов работы [10] будем считать, что гладкая функция f зависит только от переменной u .

Исходя из этого, можем принять, что $f = \frac{dF(u)}{du}$ для некоторой функции $F(u)$. Для простоты изложения будем полагать, что $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, $x^4 = t$. Обозначим координаты искомого векторного поля K через $V = V(v, x, y, z, t, u)$, $X = X(v, x, y, z, t, u)$, $Y = Y(v, x, y, z, t, u)$, $Z = Z(v, x, y, z, t, u)$, $T = T(v, x, y, z, t, u)$, $U = U(v, x, y, z, t, u)$ (V, X, Y, Z, T, U – гладкие функции), $H = H_{110}x^2 + 2H_{120}xy + 2H_{130}xz + 2H_{140}xt + H_{220}y^2 + 2H_{230}yz + 2H_{240}yt + H_{330}z^2 + 2H_{340}zt + H_{440}t^2 + u(H_{111}x^2 + H_{221}y^2 + H_{331}z^2 + H_{441}t^2)$. В результате получим систему уравнений конформно-киллинговых векторных полей в локальных координатах:

$$\begin{cases} U_v = 0, \\ U_x + X_v = 0, U_y + Y_v = 0, U_z + Z_v = 0, U_t + T_v = 0, \\ X_y + Y_x = 0, X_z + Z_x = 0, Y_z + Z_y = 0, X_t + T_x = 0, Y_t + T_y = 0, Z_t + T_z = 0, \\ 2X_x = f, 2Y_y = f, 2Z_z = f, 2T_t = f, \\ U_u + V_v = f, \\ HU_x + X_u + V_x = 0, HU_y + Y_u + V_y = 0, HU_z + Z_u + V_z = 0, HU_t + T_u + V_t = 0, \\ -fH + 2HU_u + 2V_u + XH_x + YH_y + ZH_z + TH_t + UH_u = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Рассмотрим все уравнения, кроме последнего. Из них, следуя рассуждениям работ [4; 11; 12], получаем систему

$$\begin{cases} U = F(u), \\ X = \frac{1}{2} \frac{dF(u)}{du} x + C_1 y + C_2 z + C_3 t + b_1(u), \\ Y = -C_1 x + \frac{1}{2} \frac{dF(u)}{du} y + C_3 z + C_4 t + b_2(u), \\ Z = -C_2 x - C_3 y + \frac{1}{2} \frac{dF(u)}{du} z + C_5 t + b_3(u), \\ T = -C_3 x - C_4 y - C_5 z + \frac{1}{2} \frac{dF(u)}{du} t + b_4(u), \\ V = -\frac{db_1(u)}{du} x - \frac{db_2(u)}{du} y - \frac{db_3(u)}{du} z - \frac{db_4(u)}{du} t - \frac{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{4} \frac{d^2 F(u)}{du^2} + C_6, \end{cases} \quad (3)$$

где C_i – произвольные константы, а $b_i(u)$ – гладкие функции, определяемые системой дифференциальных уравнений $\ddot{b}_i(u) = a_{ij}(u)b_j(u)$. Эта система с заданными начальными условиями разрешима, и размерность пространства решений при большей размерности равна $2n$ (подробнее см. [3; 12]).

Подставляя полученные выражения в уравнение (2), имеем

$$\frac{dF(u)}{du} \left(u(H_{111}x^2 + H_{221}y^2 + H_{331}z^2 + H_{441}t^2) + H_{110}x^2 + 2H_{120}xy + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + 2H_{130}xz + 2H_{140}xt + H_{220}y^2 + 2H_{230}yz + 2H_{240}yt + H_{330}z^2 + 2H_{340}zt + H_{440}t^2 + \\
& + \left(\frac{1}{2} \frac{dF(u)}{du} x + C_1y + C_2z + C_3t + b_1(u) \right) (2H_{111}ux + 2H_{110}x + 2H_{120}y + 2H_{130}z + 2H_{140}t) + \\
& + \left(-C_1x + \frac{1}{2} \frac{dF(u)}{du} y + C_3z + C_4t + b_2(u) \right) (2H_{221}uy + 2H_{120}x + 2H_{220}y + 2H_{230}z + 2H_{240}t) + \\
& + \left(-C_2x - C_3y + \frac{1}{2} \frac{dF(u)}{du} z + C_5t + b_3(u) \right) (2H_{331}uz + 2H_{130}x + 2H_{230}y + 2H_{330}z + 2H_{340}t) + \\
& + \left(-C_3x - C_4y - C_5z + \frac{1}{2} \frac{dF(u)}{du} t + b_4(u) \right) (2H_{441}uz + 2H_{140}x + 2H_{240}y + 2H_{340}z + 2H_{440}t) - \\
& - 2 \frac{d^2b_1(u)}{du^2} x - 2 \frac{d^2b_2(u)}{du^2} y - 2 \frac{d^2b_3(u)}{du^2} z - 2 \frac{d^2b_4(u)}{du^2} t - \frac{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{2} \frac{d^3F(u)}{du^3} + \\
& + F(u) (H_{111}x^2 + H_{221}y^2 + H_{331}z^2 + H_{441}t^2) = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Далее покажем, что в случае, когда тензор Вейля метрики (1) нетривиален, это равенство может выполняться только для постоянной функции $f = \frac{dF(u)}{du}$.

Теорема 2. Пусть M – 2-симметрическое шестимерное неразложимое лоренцево многообразие с метрикой (1) и нетривиальным тензором Вейля. Тогда конформный множитель $f(p)$ конформного аналога уравнения Киллинга $L_X g = f(p)g$ постоянен.

Доказательство. Левая часть уравнения (4) является полиномом относительно переменных x, y, z, t , его коэффициенты при x^2, y^2, z^2, t^2 должны обращаться в нуль:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \frac{d^3F(u)}{du^3} + 2 \frac{dF(u)}{du} (uH_{111} + H_{110}) - 2C_1H_{120} - 2C_2H_{130} - 2C_3H_{140} + H_{111}F(u) = 0, \\
& -\frac{1}{2} \frac{d^3F(u)}{du^3} + 2 \frac{dF(u)}{du} (uH_{221} + H_{220}) + 2C_1H_{120} - 2C_3H_{230} - 2C_4H_{240} + H_{221}F(u) = 0, \\
& -\frac{1}{2} \frac{d^3F(u)}{du^3} + 2 \frac{dF(u)}{du} (uH_{331} + H_{330}) + 2C_2H_{130} + 2C_3H_{230} - 2C_5H_{340} + H_{331}F(u) = 0, \\
& -\frac{1}{2} \frac{d^3F(u)}{du^3} + 2 \frac{dF(u)}{du} (uH_{441} + H_{440}) + 2C_3H_{140} + 2C_4H_{240} + 2C_5H_{340} + H_{441}F(u) = 0.
\end{aligned}$$

Рассмотрим почленные разности этих уравнений:

$$\begin{aligned}
& 2 \frac{dF(u)}{du} (uH_{111} + H_{110} - uH_{221} - H_{220}) + F(u) (H_{111} - H_{221}) - \\
& - 4C_1H_{120} - 2C_2H_{130} - 2C_3H_{140} + 2C_3H_{230} + 2C_4H_{240} = 0,
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
& 2 \frac{dF(u)}{du} (uH_{111} + H_{110} - uH_{331} - H_{330}) + F(u) (H_{111} - H_{331}) - \\
& - 2C_1H_{120} - 4C_2H_{130} - 2C_3H_{140} - 2C_3H_{230} + 2C_5H_{340} = 0,
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
& 2 \frac{dF(u)}{du} (uH_{111} + H_{110} - uH_{441} - H_{440}) + F(u) (H_{111} - H_{441}) - \\
& - 2C_1H_{120} - 2C_2H_{130} - 4C_3H_{140} - 2C_4H_{240} - 2C_5H_{340} = 0,
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 & 2 \frac{dF(u)}{du} (uH_{221} + H_{220} - uH_{331} - H_{330}) + F(u)(H_{221} - H_{331}) + 2C_1H_{120} - \\
 & - 2C_2H_{130} - 4C_3H_{230} - 2C_4H_{240} + 2C_5H_{340} = 0, \\
 & 2 \frac{dF(u)}{du} (uH_{221} + H_{220} - uH_{441} - H_{440}) + F(u)(H_{221} - H_{441}) + 2C_1H_{120} - \\
 & - 2C_3H_{230} - 2C_3H_{140} - 4C_4H_{240} - 2C_5H_{340} = 0, \\
 & 2 \frac{dF(u)}{du} (uH_{331} + H_{330} - uH_{441} - H_{440}) + F(u)(H_{331} - H_{441}) + \\
 & + 2C_2H_{130} + 2C_3H_{230} - 2C_3H_{140} - 2C_4H_{240} - 4C_5H_{340} = 0.
 \end{aligned}$$

Далее рассмотрим полученные уравнения в разных случаях.

Случай 1. Если $H_{111} = H_{221} = H_{331} = H_{441}$, то рассматриваемые уравнения принимают вид

$$\begin{aligned}
 & 2 \frac{dF(u)}{du} (H_{110} - H_{220}) - 4C_1H_{120} - 2C_2H_{130} - 2C_3H_{140} + 2C_3H_{230} + 2C_4H_{240} = 0, \\
 & 2 \frac{dF(u)}{du} (H_{110} - H_{330}) - 2C_1H_{120} - 4C_2H_{130} - 2C_3H_{140} - 2C_3H_{230} + 2C_5H_{340} = 0, \\
 & 2 \frac{dF(u)}{du} (H_{110} - H_{440}) - 2C_1H_{120} - 2C_2H_{130} - 4C_3H_{140} - 2C_4H_{240} - 2C_5H_{340} = 0, \\
 & 2 \frac{dF(u)}{du} (H_{220} - H_{330}) + 2C_1H_{120} - 2C_2H_{130} - 4C_3H_{230} - 2C_4H_{240} + 2C_5H_{340} = 0, \\
 & 2 \frac{dF(u)}{du} (H_{220} - H_{440}) + 2C_1H_{120} - 2C_3H_{230} - 2C_3H_{140} - 4C_4H_{240} - 2C_5H_{340} = 0, \\
 & 2 \frac{dF(u)}{du} (H_{330} - H_{440}) + 2C_2H_{130} + 2C_3H_{230} - 2C_3H_{140} - 2C_4H_{240} - 4C_5H_{340} = 0.
 \end{aligned}$$

Следовательно, при $H_{111} = H_{221} = H_{331} = H_{441}$ и $H_{i10} \neq H_{jj0}$, $i = \overline{1, 4}$, $j = \overline{1, 4}$, имеем $\frac{dF(u)}{du} = \text{const.}$

Случай 2. Если один из H_{i11} не будет равен остальным (пусть для определенности $H_{111} \neq H_{jj1}$, $j = \overline{2, 4}$), поделив уравнение (5) на $H_{111} - H_{221}$, уравнение (6) на $H_{111} - H_{331}$ и уравнение (7) на $H_{111} - H_{441}$, получим

$$\begin{aligned}
 & 2 \frac{dF(u)}{du} \left(u + \frac{H_{110} - H_{220}}{H_{111} - H_{221}} \right) + F(u) + \frac{-4C_1H_{120} - 2C_2H_{130} - 2C_3H_{140} + 2C_3H_{230} + 2C_4H_{240}}{H_{111} - H_{221}} = 0, \\
 & 2 \frac{dF(u)}{du} \left(u + \frac{H_{110} - H_{330}}{H_{111} - H_{331}} \right) + F(u) + \frac{-2C_1H_{120} - 4C_2H_{130} - 2C_3H_{140} - 2C_3H_{230} + 2C_5H_{340}}{H_{111} - H_{331}} = 0, \\
 & 2 \frac{dF(u)}{du} \left(u + \frac{H_{110} - H_{440}}{H_{111} - H_{441}} \right) + F(u) + \frac{-2C_1H_{120} - 2C_2H_{130} - 4C_3H_{140} - 2C_4H_{240} - 2C_5H_{340}}{H_{111} - H_{441}} = 0.
 \end{aligned}$$

Пусть $D_1 = \frac{2H_{110} - 2H_{220}}{H_{111} - H_{221}}$, $D_2 = \frac{2H_{110} - 2H_{330}}{H_{111} - H_{331}}$, $D_3 = \frac{2H_{110} - 2H_{440}}{H_{111} - H_{441}}$,

$$E_1 = \frac{-4C_1H_{120} - 2C_2H_{130} - 2C_3H_{140} + 2C_3H_{230} + 2C_4H_{240}}{H_{111} - H_{221}},$$

$$E_2 = \frac{-2C_1H_{120} - 4C_2H_{130} - 2C_3H_{140} - 2C_3H_{230} + 2C_5H_{340}}{H_{111} - H_{331}},$$

$$E_3 = \frac{-2C_1H_{120} - 2C_2H_{130} - 4C_3H_{140} - 2C_4H_{240} - 2C_5H_{340}}{H_{111} - H_{441}}.$$

Тогда имеем

$$\frac{dF(u)}{du}(2u + D_1) + F(u) + E_1 = 0,$$

$$\frac{dF(u)}{du}(2u + D_2) + F(u) + E_2 = 0,$$

$$\frac{dF(u)}{du}(2u + D_3) + F(u) + E_3 = 0.$$

Заметим, что если $D_1 = D_2 = D_3$ и $E_1 = E_2 = E_3$, то достаточно рассмотреть первые два полученных уравнения. Остальные уравнения рассматриваются аналогично.

Пусть $D_1 \neq D_2$. Вычтем из первого уравнения второе: $\frac{dF(u)}{du}(D_1 - D_2) + E_1 - E_2 = 0$. Следовательно, при $D_1 \neq D_2$ получаем постоянство $\frac{dF(u)}{du}$.

Пусть $D_1 = D_2$. Вычтем из уравнения (5), умноженного на H_{221} , уравнение (6), умноженное на H_{111} :

$$\frac{d^3F(u)}{du^3} \left(\frac{H_{111} - H_{221}}{2} \right) + \frac{dF(u)}{du} (2H_{110}H_{221} - 2H_{220}H_{111}) - 4C_1H_{120}(H_{221} + H_{111}) -$$

$$- 2C_2H_{130}H_{221} - 2C_3H_{140}H_{221} + 2C_3H_{230}H_{111} + 2C_4H_{240}H_{111} = 0. \quad (8)$$

Выразим из уравнения (5) производную функции $F(u)$ через функцию $F(u)$:

$$\frac{dF(u)}{du} = \frac{-F(u)(H_{111} - H_{221}) - (4C_1H_{120} + 2C_2H_{130} - 2C_3H_{230} + 2C_3H_{140} - 2C_4H_{240})}{2u(H_{111} - H_{221}) + 2H_{110} - 2H_{220}}.$$

Вычислим из полученного выражения поочередно вторую и третью производные. Полагая, что $S = 4C_1H_{120} + 2C_2H_{130} - 2C_3H_{230} + 2C_3H_{140} - 2C_4H_{240}$, имеем

$$\frac{dF(u)}{du} = -\frac{F(u)(H_{111} - H_{221}) + S}{2u(H_{111} - H_{221}) + 2H_{110} - 2H_{220}},$$

$$\frac{d^2F(u)}{du^2} = \frac{3F(u)(H_{111} - H_{221})^2 + 3S(H_{111} - H_{221})}{(2u(H_{111} - H_{221}) + 2H_{110} - 2H_{220})^2},$$

$$\frac{d^3F(u)}{du^3} = -\frac{15F(u)(H_{111} - H_{221})^3 + 15S(H_{111} - H_{221})^2}{(2u(H_{111} - H_{221}) + 2H_{110} - 2H_{220})^3}.$$

Подставим эти производные в уравнение (8). В результате получим следующее уравнение в общем виде: $T_1(u)F(u) + T_2(u) = 0$, где $T_1(u)$ и $T_2(u)$ – некоторые постоянные многочлены, зависящие от u , коэффициенты которых можно выразить через H_{ijk} и C_i .

Заметим, что $F(u)$ – рациональная функция. В то же время уравнение (8) с помощью линейной подстановки сводится к однородному дифференциальному уравнению третьего порядка с постоянными коэффициентами. В таком случае решением уравнения (8) не может быть рациональная функция. Следовательно, $F(u)$ – постоянная функция.

Конформно-плоский случай размерности 6

С учетом вышеприведенной леммы метрический тензор имеет вид

$$g = 2dudv + dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2 + \left(b(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) + au(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) \right) du^2,$$

где $a = H_{111} = H_{221} = H_{331} = H_{441}$ и $b = H_{110} = H_{220} = H_{330} = H_{440}$ – произвольные постоянные. В таком случае получаем дифференциальное уравнение относительно функции $F(u)$ следующего вида:

$$-\frac{1}{2} \frac{d^3 F(u)}{du^3} + 2 \frac{dF(u)}{du} (au + b) + aF(u) = 0.$$

Из этого уравнения функция $F(u)$ выражается как

$$F(u) = C_1 \text{AiryAi} \left(\frac{au + b}{(-a)^{\frac{2}{3}}} \right)^2 + C_2 \text{AiryAi} \left(\frac{au + b}{(-a)^{\frac{2}{3}}} \right) \text{AiryBi} \left(\frac{au + b}{(-a)^{\frac{2}{3}}} \right) + C_3 \text{AiryBi} \left(\frac{au + b}{(-a)^{\frac{2}{3}}} \right)^2, \quad (9)$$

где AiryAi и AiryBi – частные решения дифференциального уравнения $y'' - uy = 0$, называемые функциями Эйри. Это дифференциальное уравнение имеет на действительной оси точку, в которой вид решения меняется с колеблющегося на экспоненциальный. Для действительных u функция Эйри первого рода определяется следующим несобственным интегралом:

$$\text{AiryAi}(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos \left(\frac{x^3}{3} + ux \right) dx.$$

Другим линейно независимым частным решением данного уравнения является функция Эйри второго рода, у которой при $x \rightarrow \infty$ колебания имеют ту же амплитуду, что и у функции Эйри первого рода $\text{AiryAi}(u)$, но отличаются по фазе на $\frac{\pi}{2}$. Для действительных u функция Эйри второго рода выражается следующим интегралом¹:

$$\text{AiryBi}(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\exp \left(-\frac{x^3}{3} + ux \right) + \sin \left(\frac{x^3}{3} + ux \right) \right] dx.$$

В данном случае имеем векторное поле вида (3), где

$$\begin{aligned} b_1(u) &= C_4 \text{AiryAi} \left(\frac{au + b}{(-a)^{\frac{2}{3}}} \right) + C_5 \text{AiryBi} \left(\frac{au + b}{(-a)^{\frac{2}{3}}} \right), \\ b_2(u) &= C_6 \text{AiryAi} \left(\frac{au + b}{(-a)^{\frac{2}{3}}} \right) + C_7 \text{AiryBi} \left(\frac{au + b}{(-a)^{\frac{2}{3}}} \right), \\ b_3(u) &= C_8 \text{AiryAi} \left(\frac{au + b}{(-a)^{\frac{2}{3}}} \right) + C_9 \text{AiryBi} \left(\frac{au + b}{(-a)^{\frac{2}{3}}} \right), \\ b_4(u) &= C_{10} \text{AiryAi} \left(\frac{au + b}{(-a)^{\frac{2}{3}}} \right) + C_{11} \text{AiryBi} \left(\frac{au + b}{(-a)^{\frac{2}{3}}} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

являются решениями уравнения $L_K g = f(p)g$ для системы (1), а конформный множитель принимает вид

$$f(u) = \frac{2aC_{12} \text{AiryAi} \left(\frac{au + b}{(-a)^{\frac{2}{3}}} \right) \text{AiryAi} \left(1, \frac{au + b}{(-a)^{\frac{2}{3}}} \right)}{(-a)^{\frac{2}{3}}} + \frac{2aC_{13} \text{AiryBi} \left(\frac{au + b}{(-a)^{\frac{2}{3}}} \right) \text{AiryBi} \left(1, \frac{au + b}{(-a)^{\frac{2}{3}}} \right)}{(-a)^{\frac{2}{3}}} +$$

¹Федорюк М. В. Эйри функции // Математическая энциклопедия : в 5 т. Т. 5 / гл. ред. И. М. Виноградов. М. : Сов. энцикл., 1985. С. 939–941.

$$+ \frac{2aC_{14} \text{AiryAi}\left(1, \frac{au+b}{(-a)^{\frac{2}{3}}}\right) \text{AiryBi}\left(\frac{au+b}{(-a)^{\frac{2}{3}}}\right)}{(-a)^{\frac{2}{3}}} + \frac{2aC_{15} \text{AiryAi}\left(\frac{au+b}{(-a)^{\frac{2}{3}}}\right) \text{AiryBi}\left(1, \frac{au+b}{(-a)^{\frac{2}{3}}}\right)}{(-a)^{\frac{2}{3}}}. \quad (11)$$

Теорема 3. Пусть M – 2-симметрическое шестимерное неразложимое лоренцево многообразие с метрикой (1), тензор Вейля которого равен нулю. Тогда решение конформного аналога уравнения Киллинга $L_K g = f(p)g$ и конформный множитель $f = \frac{dF(u)}{du}$ определяются в локальной системе координат (v, x, y, z, t, u) точки p из соотношений (3), (9) – (11).

Замечание. Доказанная теорема продолжает исследования, начатые в работе [4], и позволяет построить новые нетривиальные примеры конформно-киллинговых векторных полей с переменным конформным множителем на 2-симметрических неразложимых лоренцевых многообразиях. Кроме того, разработанные методы дают возможность получить многомерный аналог доказанной теоремы.

Библиографические ссылки

1. Alekseevsky DV, Galaev AS. Two-symmetric Lorentzian manifolds. *Journal of Geometry and Physics*. 2011;61(12):2331–2340. DOI: 10.1016/j.geomphys.2011.07.005.
2. Оскорбин ДН, Родионов ЕД, Эрнст ИВ. О размерностях пространства полей Киллинга на 2-симметрических лоренцевых многообразиях. *Математические заметки СВФУ*. 2019;26(3):47–56. EDN: RSCVOZ.
3. Оскорбин ДН, Родионов ЕД. Солитоны Риччи и поля Киллинга на обобщенных многообразиях Кахена – Уоллаха. *Сибирский математический журнал*. 2019;60(5):1165–1170. DOI: 10.33048/smzh.2019.60.513.
4. Андреева ТА, Оскорбин ДН, Родионов ЕД. О конформном множителе в конформном уравнении Киллинга на 2-симметрическом пятимерном неразложимом лоренцевом многообразии. *Владикавказский математический журнал*. 2023;25(3): 5–14. DOI: 10.46698/f6017-0875-0171-y.
5. Cahen M, Wallach N. Lorentzian symmetric spaces. *Bulletin of the American Mathematical Society*. 1970;76(3):585–591. DOI: 10.1090/S0002-9904-1970-12448-X.
6. Cahen M, Kerbrat Y. Champs de vecteurs conformes et transformations conformes des espaces Lorentziens symétriques. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. 1978;57(2):99–132.
7. Cahen M, Kerbrat Y. Transformations conformes des espaces symétriques pseudo-riemanniens. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*. 1982;132:275–289. DOI: 10.1007/BF01760985.
8. Wu H. On the de Rham decomposition theorem. *Illinois Journal of Mathematics*. 1964;8(2):291–311. DOI: 10.1215/ijm/1256059674.
9. Blanco OF, Senovilla JMM, Sánchez M. Structure of second-order symmetric Lorentzian manifolds. *Journal of the European Mathematical Society*. 2013;15(2):595–634. DOI: 10.4171/JEMS/368.
10. Hall GS. Conformal symmetries and fixed points in space-time. *Journal of Mathematical Physics*. 1990;31(5):1198–1207. DOI: 10.1063/1.528753.
11. Андреева ТА, Оскорбин ДН, Родионов ЕД. Исследование конформно-киллинговых векторных полей на пятимерных 2-симметрических лоренцевых многообразиях. *Вестник Югорского государственного университета*. 2021;17(1):17–22. DOI: 10.17816/byusu20210117-22.
12. Blau M, O’Loughlin M. Homogeneous plane waves. *Nuclear Physics B*. 2003;654(1–2):135–176. DOI: 10.1016/S0550-3213(03)00055-5.

Получена 02.07.2025 / исправлена 07.07.2025 / принята 09.11.2025.
Received 02.07.2025 / revised 07.07.2025 / accepted 09.11.2025.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS

УДК 519.2

ПОЛНАЯ СХОДИМОСТЬ ЧАСТИЧНЫХ ВЗВЕШЕННЫХ СУММ ОТРИЦАТЕЛЬНО ОРТАНТНО ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Т. Т. ТУ¹⁾

¹⁾Данангский университет – университет наук и образования,
ул. Тон Дык Тханг, 459, 550000, г. Дананг, Вьетнам

Аннотация. Отрицательная ортантная зависимость рассматривается как обобщение независимости случайных величин, которое ввели К. Джоаг-Дев и Ф. Прошан. Многие исследователи изучали неравенства и законы больших чисел для таких последовательностей случайных величин. В частности, понятие полной сходимости, определенное П. Л. Хсу и Г. Роббинсом, привлекло значительное внимание. Устанавливается полная сходимость для частичных взвешенных сумм отрицательно ортантно зависимых случайных величин, над которыми доминирует случайная величина X . Приводятся достаточные условия такой сходимости при выполнении мягких предположений относительно весов и моментов случайной величины X .

Ключевые слова: полная сходимость; отрицательная ортантная зависимость; взвешенные суммы; предельные теоремы; зависимые случайные величины.

Образец цитирования:

Ту ТТ. Полная сходимость частичных взвешенных сумм отрицательно ортантно зависимых случайных величин. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2025;3:38–50 (на англ.).
EDN: CTZGMT

For citation:

Tu TT. Complete convergence for partial weighted sums of negatively orthant dependent random variables. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2025; 3:38–50.
EDN: CTZGMT

Автор:

Тон Тхат Ту – кандидат физико-математических наук; преподаватель факультета математики и информационных технологий.

Author:

Ton That Tu, PhD (physics and mathematics); lecturer at the faculty of mathematics and information technology.
tttu@ued.udn.vn

COMPLETE CONVERGENCE FOR PARTIAL WEIGHTED SUMS OF NEGATIVELY ORTHANT DEPENDENT RANDOM VARIABLES

T. T. TU^a

^aThe University of Danang – University of Science and Education,
459 Ton Duc Thang Street, Danang 550000, Vietnam

Abstract. Negatively orthant dependence is regarded as a generalisation of independence for random variables, introduced by K. Joag-Dev and F. Proschan. Numerous researchers have investigated inequalities and laws of large numbers for such sequences of random variables. In particular, the concept of complete convergence, defined by P. L. Hsu and H. Robbins, has attracted significant attention. Complete convergence for partial weighted sums of negatively orthant dependent random variables dominated by a random variable X is established. Sufficient conditions for this type of convergence are provided under mild assumptions on the weights and the moments of random variable X .

Keywords: complete convergence; negatively orthant dependence; weighted sums; limit theorems; dependent random variables.

Introduction and preliminaries

The concept of a complete convergence was introduced by P. L. Hsu and H. Robbins [1] while K. Joag-Dev and F. Proschan introduced the definition of negatively orthant dependent (NOD) sequences [2]. Since then a wide range of limit theorems for NOD random variables have been developed by numerous researchers. H. C. Kim established a Hájek – Rényi type inequality [3] while N. Asadian and his colleagues obtained a Rosenthal-type inequality [4]. In addition, A. Volodin presented the Kolmogorov exponential inequality [5]. Results concerning almost sure convergence appear in the articles [6–8]. Complete convergence has been investigated by the authors of the works [9–15]. This paper aims to establish complete convergence for partial weighted sums of NOD random variables dominated by a random variable.

Definition 1. A sequence of random variables $\{X_n, n \geq 1\}$ is said to converge completely to a random variable X if for all $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty.$$

Definition 2. A finite collection of random variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ is said to be NOD if

$$P(X_1 > x_1, X_2 > x_2, \dots, X_n > x_n) \leq \prod_{i=1}^n P(X_i > x_i)$$

and

$$P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n) \leq \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x_i)$$

for all $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. An infinite sequence $\{X_n, n \geq 1\}$ is said to be NOD if every finite subcollection is NOD.

Definition 3. An array of random variables $\{X_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ is said to be rowwise NOD random variables if for every $n \geq 1$ $\{X_{ni}, 1 \leq i \leq n\}$ is a sequence of NOD random variables.

Definition 4. A sequence of random variables $\{X_n, n \geq 1\}$ is said to be stochastically dominated by a random variable X if for any $x \geq 0$

$$\sup_{n \geq 1} P(|X_n| > x) \leq P(|X| > x).$$

Let $I(A)$ be the indicator function of the set A . The symbol C denotes a positive constant, which may be different in each appearance, and $a_n = O(b_n)$ stands for $a_n \leq Cb_n$. The following lemmas are useful for the proof of the main results of the work.

Lemma 1 [16]. Let random variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ be NOD; $f_1, f_2, \dots, f_n$ be all non-decreasing (or all non-increasing) functions. Then random variables $f_1(X_1), f_2(X_2), \dots, f_n(X_n)$ are NOD.

Lemma 2 [16]. Let $X_1, X_2, \dots, X_n$ be non-negative NOD random variables. Then

$$E\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) \leq \prod_{i=1}^n E(X_i).$$

Lemma 3 [4; 12]. Let $p \geq 2$ and $\{X_n, n \geq 1\}$ be a sequence of NOD random variables with $E(X_n) = 0$ and $E(|X_n|^p) < \infty$ for every $n \geq 1$. Then there exists a positive constant C depending only on p such that for every $n \geq 1$

$$E\left|\sum_{i=1}^n X_i\right|^p \leq C \left[\sum_{i=1}^p E|X_i|^p + \left(\sum_{i=1}^n E|X_i|^2\right)^{\frac{p}{2}} \right],$$

$$E\left(\max_{1 \leq j \leq n} \left|\sum_{i=1}^j X_i\right|^p\right) \leq C \log^p(2n) \left[\sum_{i=1}^p E|X_i|^p + \left(\sum_{i=1}^n E|X_i|^2\right)^{\frac{p}{2}} \right].$$

Lemma 4. For any $x \in \mathbb{R}$ and $r \in [1, 2]$ the following inequality holds:

$$e^x \leq 1 + x + \frac{1}{r} |x|^r e^{|x|}.$$

Proof. Let us consider 2 cases.

1. Case $x \geq 0$. Since $e^x - 1 - x = e^x \int_0^x t e^{-t} dt$, it is sufficient to show

$$f(x) = \frac{1}{r} x^r - \int_0^x t e^{-t} dt \geq 0 \text{ for all } x \geq 0.$$

This inequality holds because $f(0) = 0$,

$$x^{2-r} e^{-x} \leq \sup_{x>0} x^{2-r} e^{-x} = (2-r)^{2-r} e^{r-2} \leq e^{2-r} e^{r-2} = 1,$$

and $f'(x) = x^{r-1} (1 - x^{2-r} e^{-x}) \geq 0$ for all $x > 0$.

2. Case $x < 0$. From the case 1 we have

$$\frac{1}{r} |x|^r e^{|x|} \geq e^{|x|} \int_0^{|x|} t e^{-t} dt = (e^x - 1 - x) + (e^{-x} - e^x + 2x), \quad x < 0.$$

Since $e^{-x} - e^x + 2x \geq 0$ for all $x < 0$, we obtain

$$\frac{1}{r} |x|^r e^{|x|} \geq e^x - 1 - x, \quad x < 0.$$

Lemma is proved.

Lemma 5. Let $p, q > 0$ and $\{X_n, n \geq 1\}$ be a sequence of random variables, which is stochastically dominated by a random variable X with $E(|X|^p) < \infty$. For all $n \geq 1$ and $x > 0$ the following inequalities hold:

$$(i) \quad E(|X_n|^q I(|X_n| \leq x)) \leq E(|X|^q I(|X| \leq x)) + x^q P(|X| > x);$$

$$(ii) \quad E(|X_n|^q I(|X_n| > x)) \leq E(|X|^q I(|X| > x)), \quad q \leq p.$$

Proof. Let us prove the inequality (i). We have

$$\begin{aligned} E(|X_n|^q I(|X_n| \leq x)) &= \int_0^x t^q dP(|X_n| \leq t) = - \int_0^x t^q dP(|X_n| > t) = \\ &= -x^q P(|X_n| > x) + \int_0^x P(|X_n| > t) dt^q \leq \int_0^x P(|X_n| > t) dt^q = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= x^q P(|X| > x) - \int_0^x t^q dP(|X| > t) = x^q P(|X| > x) + \int_0^x t^q dP(|X| \leq t) = \\
 &= x^q P(|X| > x) + E(|X|^q I(|X| \leq x)).
 \end{aligned}$$

Let us prove the inequality (ii). From the inequality (i) for $q \leq p$ and letting $x \rightarrow \infty$ we obtain

$$E|X_n|^q \leq E|X|^q < \infty \text{ for all } n \geq 1.$$

Similarly, for $q \leq p$ we have

$$\begin{aligned}
 E(|X_n|^q I(|X_n| > x)) &= \int_x^{+\infty} t^q dP(|X_n| \leq t) = - \int_x^{+\infty} t^q dP(|X_n| > t) = \\
 &= x^q P(|X_n| > x) + \int_x^{+\infty} P(|X_n| > t) dt^q \leq \\
 &\leq x^q P(|X| > x) + \int_x^{+\infty} P(|X| > t) dt^q = E(|X|^q I(|X| > x)).
 \end{aligned}$$

Lemma 6. Let $\{X_n, x \geq 1\}$ be a sequence of NOD random variables with mean zero and $0 < B_n^2 = \sum_{i=1}^n EX_i^2 < \infty$. Then for any $x > 0$ and $y > 0$

$$P(|S_n| \geq x) \leq \sum_{k=1}^n P(|X_k| \geq y) + 2 \exp\left(\frac{x}{y} - \frac{x}{y} \log\left(1 + \frac{xy}{B_n}\right)\right),$$

where $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

Proof. For a fixed $y > 0$ and each $n \geq 1$ put $X'_n = X_n I(X_n < y)$ and $S'_n = \sum_{i=1}^n X'_i$. Then we have

$$\begin{aligned}
 P(S_n \geq x) &= P(S_n \geq x, S_n \neq S'_n) + P(S_n \geq x, S_n = S'_n) = \\
 &= P(S_n \neq S'_n) + P(S'_n \geq x) \leq \sum_{k=1}^n P(X_k \geq y) + P(S'_n \geq x).
 \end{aligned}$$

Note that for a fixed $h > 0$ the function $f(u) = \frac{e^{hu} - hu - 1}{u^2}$ is increasing for u . Since $E(X_k) = 0$, for any $y > 0$

$$\int_{-\infty}^y t dP(X_k \leq t) = - \int_y^{+\infty} t dP(X_k \leq t) \leq 0, \quad k \geq 1.$$

Therefore,

$$\begin{aligned}
 Ee^{hX'_k} &= \int_{-\infty}^y e^{ht} dP(X_k \leq t) + \int_y^{+\infty} dP(X_k \leq t) = \\
 &= 1 + h \int_{-\infty}^y t dP(X_k \leq t) + \int_{-\infty}^y (e^{ht} - 1 - ht) dP(X_k \leq t) \leq \\
 &\leq 1 + \int_{-\infty}^y \frac{e^{ht} - ht - 1}{t^2} t^2 dP(X_k \leq t) \leq 1 + \frac{e^{hy} - hy - 1}{y^2} \int_{-\infty}^y t^2 dP(X_k \leq t) \leq \\
 &\leq \exp\left(\frac{e^{hy} - hy - 1}{y^2} E(X_k^2)\right), \quad k \geq 1.
 \end{aligned}$$

By Markov inequality and lemma 2, for any $h > 0$

$$P(S'_n \geq x) \leq e^{-hx} E(e^{hS'_n}) \leq e^{-hx} \prod_{k=1}^n Ee^{hX'_k} \leq \exp\left(-hx + \frac{e^{hy} - hy - 1}{y^2} B_n^2\right).$$

Put $h = \frac{1}{y} \log \left(1 + \frac{xy}{B_n^2} \right)$ and get

$$P(S'_n \geq x) \leq \exp \left(\frac{x}{y} - \frac{x}{y} \log \left(1 + \frac{xy}{B_n^2} \right) - \frac{1}{y^2} \log \left(1 + \frac{xy}{B_n^2} \right) \right) \leq \exp \left(\frac{x}{y} - \frac{x}{y} \log \left(1 + \frac{xy}{B_n^2} \right) \right).$$

This implies that

$$P(S_n \geq x) \leq \sum_{k=1}^n P(X_k \geq y) + \exp \left(\frac{x}{y} - \frac{x}{y} \log \left(1 + \frac{xy}{B_n^2} \right) \right).$$

Replacing X_k with $-X_k$, we also have

$$P(S_n \leq -x) \leq \sum_{k=1}^n P(X_k \leq -y) + \exp \left(\frac{x}{y} - \frac{x}{y} \log \left(1 + \frac{xy}{B_n^2} \right) \right).$$

Combining the last two inequalities, we obtain the desired result. Lemma is proved.

Main results

The following theorem extends the result of lemma 2.3 from the article [11] to the case $r \in (1, 2]$.

Theorem 1. Let $\{X_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ be an array of rowwise NOD random variables with $E(X_{ni}) = 0$ and let $\{b_n, n \geq 1\}$ be a sequence of positive real numbers. We assume that there exists a positive constant $r \in (1, 2]$ such that

$$\max_{1 \leq i \leq n} |X_{ni}| = O(b_n),$$

$$\sum_{i=1}^n E|X_{ni}|^r = O(b_n),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{-\alpha}{b_n^{(r-1)^{-1}}}} < \infty \text{ for some } \alpha > 0.$$

Then $\sum_{i=1}^n X_{ni}$ converges completely to zero.

Proof. Applying lemma 4 for any $t > 0$, we have

$$\begin{aligned} E(\exp(tX_{ni})) &\leq E\left\{1 + tX_{ni} + \frac{1}{r}|tX_{ni}|^r \exp(|tX_{ni}|)\right\} = 1 + \frac{1}{r}E(|tX_{ni}|^r \exp(|tX_{ni}|)) \leq \\ &\leq 1 + \frac{1}{r}E(|tX_{ni}|^r \exp(Ctb_n)) \leq \exp\left(\frac{t^r}{r} \exp(Ctb_n) E(|X_{ni}|^r)\right). \end{aligned}$$

By Markov inequality and lemma 2, for any $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^n X_{ni} > \varepsilon\right) &\leq e^{-t\varepsilon} E \exp\left(t \sum_{i=1}^n X_{ni}\right) \leq e^{-t\varepsilon} \prod_{i=1}^n E \exp(tX_{ni}) \leq \\ &\leq e^{-t\varepsilon} \exp\left(\frac{t^r}{r} \exp(Ctb_n) \sum_{i=1}^n E(|X_{ni}|^r)\right) \leq e^{-t\varepsilon} \exp(t^r \exp(Ctb_n) Cb_n). \end{aligned}$$

Put $t = \frac{\alpha + 1}{\varepsilon b_n^{(r-1)^{-1}}}$ for n large enough and $C > 0$ such that $C(\alpha + 1)^r \varepsilon^{-r} > 1$ we obtain

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^n X_{ni} > \varepsilon\right) &\leq \exp\left(\left(C(\alpha + 1)^r \varepsilon^{-r} \exp\left(C(\alpha + 1)^{-1} b_n^{(r-2)(r-1)^{-1}}\right) - \alpha - 1\right) b_n^{-(r-1)^{-1}}\right) \leq \\ &\leq \exp\left(-C(\alpha + 1)^r \varepsilon^{-r} \frac{\alpha}{b_n^{(r-1)^{-1}}}\right) \leq \exp\left(-\frac{\alpha}{b_n^{(r-1)^{-1}}}\right). \end{aligned}$$

Therefore,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^n X_{ni} > \varepsilon\right) < \infty.$$

Since $\{-X_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ is still an array of rowwise NOD random variables, we can replace X_{ni} with $-X_{ni}$ from the above statement. That is

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^n X_{ni} < -\varepsilon\right) < \infty.$$

Theorem is proved.

Theorem 2. Let $\{X_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ be an array of rowwise NOD random variables such that $E(X_{ni}) = 0$ and $\{X_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ are stochastically dominated by a random variable X satisfying $E(|X|^{p+1} \log|X|) < \infty$ for some $p \in (1, 2)$. We assume that $\{a_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ is an array of positive real numbers such that

$$\max_{1 \leq i \leq n} |a_{ni}| = O\left(n^{\frac{-1}{p}}\right) \text{ and } \sum_{i=1}^n a_{ni}^2 = O\left(n^{\frac{-2}{1+p}}\right).$$

Then $\sum_{i=1}^n a_{ni} X_{ni}$ converges completely to zero.

Proof. For $q \in \left(\frac{2p}{2-p}, 1+p\right)$ put $X_{ni} = X'_{ni} + X''_{ni}$, where

$$X'_{ni} = X_{ni} I\left(|X_{ni}| \leq n^{\frac{1}{q}}\right), \quad X''_{ni} = X_{ni} I\left(|X_{ni}| > n^{\frac{1}{q}}\right), \quad n \geq 1, 1 \leq i \leq n.$$

For any $\varepsilon > 0$ we have

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|\sum_{i=1}^n a_{ni} X_{ni}\right| > 2\varepsilon\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|\sum_{i=1}^n a_{ni} (X_{ni} - EX_{ni})\right| > 2\varepsilon\right) \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|\sum_{i=1}^n a_{ni} (X'_{ni} - EX'_{ni})\right| > \varepsilon\right) + \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|\sum_{i=1}^n a_{ni} (X''_{ni} - EX''_{ni})\right| > \varepsilon\right). \end{aligned}$$

For n large enough and $b_n = (\log n)^{-1}$, $2 \geq r > \frac{pq}{q-p}$ we get

$$\begin{aligned} |a_{ni} (X'_{ni} - EX'_{ni})| &\leq 2|a_{ni}| n^{\frac{1}{q}} \leq C n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \leq C b_n, \\ \sum_{i=1}^n E|a_{ni} (X'_{ni} - EX'_{ni})|^r &\leq C \sum_{i=1}^n E|a_{ni} X'_{ni}|^r \leq C n^{1 + \frac{r}{q} - \frac{r}{p}} \leq C b_n, \\ \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{-\alpha}{b_n^{(r-1)^{-1}}}} &< \infty \text{ for any } \alpha > 1. \end{aligned}$$

Therefore, by theorem 1, we obtain

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|\sum_{i=1}^n a_{ni} (X'_{ni} - EX'_{ni})\right| > \varepsilon\right) < \infty.$$

Additionally, by Markov inequality, C_r -inequality and lemma 3, we have

$$\begin{aligned} P\left(\left|\sum_{i=1}^n a_{ni} (X''_{ni} - EX''_{ni})\right| > \varepsilon\right) &\leq \frac{1}{\varepsilon^2 E} \left|\sum_{i=1}^n a_{ni} (X''_{ni} - EX''_{ni})\right|^2 \leq \\ &\leq C \sum_{i=1}^n a_{ni}^2 E|X''_{ni} - EX''_{ni}|^2 \leq C \sum_{i=1}^n a_{ni}^2 E|X''_{ni}|^2 = C \sum_{i=1}^n a_{ni}^2 E\left(|X_{ni}|^2 I\left(|X_{ni}| > n^{\frac{1}{q}}\right)\right) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq C \sum_{i=1}^n a_{ni}^2 E \left(|X|^2 I \left(|X| > n^{\frac{1}{q}} \right) \right) \leq C \sum_{i=1}^n a_{ni}^2 E \left(|X|^2 I \left(|X| > n^{\frac{1}{1+p}} \right) \right) \leq \\ &\leq C n^{-1} E \left(|X|^{p+1} I \left(|X| > n^{\frac{1}{1+p}} \right) \right). \end{aligned}$$

Consequently,

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} P \left(\left| \sum_{i=1}^n a_{ni} (X_{ni}'' - EX_{ni}'') \right| > \varepsilon \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} E \left(|X|^{p+1} I \left(|X| > n^{\frac{1}{1+p}} \right) \right) = \\ &= C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \sum_{k=n}^{\infty} E \left(|X|^{p+1} I \left(k^{\frac{1}{1+p}} < |X| \leq (k+1)^{\frac{1}{1+p}} \right) \right) = \\ &= C \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^k n^{-1} E \left(|X|^{p+1} I \left(k^{\frac{1}{1+p}} < |X| \leq (k+1)^{\frac{1}{1+p}} \right) \right) \leq \\ &\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \log(k) E \left(|X|^{p+1} I \left(k^{\frac{1}{1+p}} < |X| \leq (k+1)^{\frac{1}{1+p}} \right) \right) \leq \\ &\leq C \sum_{k=1}^{\infty} E \left(|X|^{p+1} \log(|X|) I \left(k^{\frac{1}{1+p}} < |X| \leq (k+1)^{\frac{1}{1+p}} \right) \right) = \\ &= CE \left(|X|^{p+1} \log(|X|) \right) < \infty. \end{aligned}$$

Theorem is proved.

Theorem 3. Let $\{X_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ be an array of rowwise NOD random variables with $E(X_{ni}) = 0, 1 \leq i \leq n, n \geq 1$, which is stochastically dominated by a random variable X ; $\{a_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ be an array of positive real numbers; $\{b_n, n \geq 1\}$ be a sequence of positive real numbers, $b_n \uparrow \infty$. Let $\{\psi_n(t), n \geq 1\}$ be a sequence of non-negative even functions satisfying the following conditions:

$$\frac{\psi_n(t)}{|t|} \uparrow \text{ and } \frac{\psi_n(t)}{|t|^p} \downarrow \text{ as } |t| \uparrow$$

for some real number $p \in (1, 2]$. We assume that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \frac{E\psi_i(X)}{\psi_i(b_n)} < \infty \text{ and } \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n a_{ni}^2 \frac{E\psi_i(X)}{\psi_i(b_n)} < \infty.$$

Then

$$\frac{1}{b_n} \sum_{i=1}^n a_{ni} X_{ni} \rightarrow 0$$

completely.

Proof. Note that for any $r \in [0, 2]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n a_{ni}^r \frac{E\psi_i(X)}{\psi_i(b_n)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n (1 + a_{ni}^2) \frac{E\psi_i(X)}{\psi_i(b_n)} < \infty.$$

For a fixed $n \geq 1$ define

$$X_i^{(n)} = -b_n I(X_{ni} < -b_n) + X_{ni} I(|X_{ni}| \leq b_n) + b_n I(X_{ni} > b_n), 1 \leq i \leq n,$$

$$T_j^{(n)} = \sum_{i=1}^j a_{ni} \left(X_i^{(n)} - EX_i^{(n)} \right), 1 \leq j \leq n.$$

For any $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
 & P\left(\left|\sum_{i=1}^n a_{ni} X_{ni}\right| > b_n \varepsilon\right) = \\
 & = P\left(\left|\sum_{i=1}^n a_{ni} X_{ni}\right| > b_n \varepsilon, \max_{1 \leq i \leq n} |X_{ni}| \leq b_n\right) + P\left(\left|\sum_{i=1}^n a_{ni} X_{ni}\right| > b_n \varepsilon, \max_{1 \leq i \leq n} |X_{ni}| > b_n\right) \leq \\
 & \leq P\left(\left|\sum_{i=1}^n a_{ni} X_i^{(n)}\right| > b_n \varepsilon\right) + P\left(\max_{1 \leq i \leq n} |X_{ni}| > b_n\right) \leq \\
 & \leq P\left(\left|T_n^{(n)}\right| > b_n \varepsilon - \left|\sum_{i=1}^n a_{ni} E X_i^{(n)}\right|\right) + P\left(\max_{1 \leq i \leq n} |X_{ni}| > b_n\right).
 \end{aligned}$$

We will show that

$$\frac{1}{b_n} \sum_{i=1}^n a_{ni} E X_i^{(n)} \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

Indeed, it is clear that $|X_i^{(n)}| \leq |X_{ni}| I(|X_{ni}| \leq b_n)$, $1 \leq i \leq n$, $n \geq 1$. Since $E(X_{ni}) = 0$ and $\frac{\Psi_n(t)}{|t|} \uparrow$ as $t \uparrow$, we have

$$\begin{aligned}
 & \left|b_n^{-1} \sum_{i=1}^n a_{ni} E X_i^{(n)}\right| \leq \\
 & \leq \left|b_n^{-1} \sum_{i=1}^n a_{ni} E\left(X_i^{(n)} I(|X_{ni}| \leq b_n)\right)\right| + \left|b_n^{-1} \sum_{i=1}^n a_{ni} E\left(X_i^{(n)} I(|X_{ni}| > b_n)\right)\right| \leq \\
 & \leq \left|b_n^{-1} \sum_{i=1}^n a_{ni} E\left(X_{ni} I(|X_{ni}| \leq b_n)\right)\right| + b_n^{-1} \sum_{i=1}^n a_{ni} E\left(|X_i^{(n)}| I(|X_{ni}| > b_n)\right) = \\
 & = \left|b_n^{-1} \sum_{i=1}^n a_{ni} E\left(X_{ni} I(|X_{ni}| > b_n)\right)\right| + \sum_{i=1}^n a_{ni} P(|X_{ni}| > b_n) \leq \\
 & \leq b_n^{-1} \sum_{i=1}^n a_{ni} E(|X| I(|X| > b_n)) + \sum_{i=1}^n a_{ni} P(|X| > b_n) \leq \\
 & \leq \sum_{i=1}^n a_{ni} \frac{E(\Psi_i(X) I(|X| > b_n))}{\Psi_i(b_n)} + \sum_{i=1}^n a_{ni} \frac{E \Psi_i(X)}{\Psi_i(b_n)} \leq \\
 & \leq 2 \sum_{i=1}^n a_{ni} \frac{E \Psi_i(X)}{\Psi_i(b_n)} \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

Thus, for n large enough

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^n a_{ni} X_{ni}\right| > b_n \varepsilon\right) \leq P\left(\left|T_n^{(n)}\right| > \frac{b_n \varepsilon}{2}\right) + P\left(\max_{1 \leq i \leq n} |X_{ni}| > b_n\right).$$

To complete the proof, it is sufficient to show:

$$I_1 = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(\left|T_n^{(n)}\right| > \frac{b_n \varepsilon}{2}\right) < \infty$$

and

$$I_2 = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(\max_{1 \leq i \leq n} |X_{ni}| > b_n\right) < \infty.$$

Put $B_n^2 = \sum_{i=1}^n a_{ni}^2 E\left(X_i^{(n)} - E X_i^{(n)}\right)^2$, $n \geq 1$. Take $x = \frac{\varepsilon b_n}{2}$, $y = \frac{\varepsilon b_n}{2\eta}$ and $\eta > 1$. On the one hand, by lemma 6, we have

$$I_1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n P\left(a_{ni} \left|X_i^{(n)} - EX_i^{(n)}\right| > \frac{\varepsilon b_n}{2}\right) + C \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{B_n^2}{B_n^2 + \frac{\varepsilon^2 b_n^2}{2\eta}} \right)^{\eta} := I_{11} + I_{12}.$$

By Markov inequality, C_r -inequality, lemma 5 and the facts that $\frac{\psi_i(|t|)}{|t|} \uparrow$ and $\frac{\psi_i(|t|)}{|t|^p} \downarrow$ as $|t| \uparrow$, we obtain

$$\begin{aligned} I_{11} &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n a_{ni}^p \frac{E|X_i^{(n)} - EX_i^{(n)}|^p}{b_n^p} \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n a_{ni}^p \frac{E|X_i^{(n)}|^p}{b_n^p} \leq \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n a_{ni}^p \frac{E(|X_{ni}|^p I(|X_{ni}| \leq b_n))}{b_n^p} \leq \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n a_{ni}^p \frac{E(|X|^p I(|X| \leq b_n))}{b_n^p} + C \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n a_{ni}^p P(|X| > b_n) \leq \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n a_{ni}^p \frac{E(\psi_i(X) I(|X| \leq b_n))}{\psi_i(b_n)} + C \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n a_{ni}^p \frac{E\psi_i(X)}{\psi_i(b_n)} \leq \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n a_{ni}^p \frac{E\psi_i(X)}{\psi_i(b_n)} < \infty \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} I_{12} &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n^{-2} \sum_{i=1}^n a_{ni}^2 E(X_i^{(n)} - EX_i^{(n)})^2 \right)^{\eta} \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n a_{ni}^2 \frac{E|X_i^{(n)}|^2}{b_n^2} \right)^{\eta} \leq \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n a_{ni}^2 \frac{E(|X_{ni}|^2 I(|X_{ni}| \leq b_n))}{b_n^2} \right)^{\eta} \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n a_{ni}^2 \frac{E(|X_{ni}|^p I(|X_{ni}| \leq b_n))}{b_n^p} \right)^{\eta} \leq \\ &\leq C \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n a_{ni}^2 \frac{E(|X_{ni}|^p I(|X_{ni}| \leq b_n))}{b_n^p} \right)^{\eta} \leq \\ &\leq C \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n a_{ni}^2 \frac{E(|X|^p I(|X| \leq b_n))}{b_n^p} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n a_{ni}^2 P(|X| > b_n) \right)^{\eta} \leq \\ &\leq C \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n a_{ni}^2 \frac{E\psi_i(X)}{\psi_i(b_n)} \right)^{\eta} < \infty. \end{aligned}$$

On the other hand,

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\max_{1 \leq i \leq n} |X_{ni}| > b_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n P(|X_{ni}| > b_n) \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n P(|X| > b_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \frac{E\psi_i(X)}{\psi_i(b_n)} < \infty. \end{aligned}$$

Theorem is proved.

Theorem 4. Let $\{X_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ be an array of rowwise NOD random variables with $E(X_{ni}) = 0$, $1 \leq i \leq n, n \geq 1$, which is stochastically dominated by a random variable X ; $\{a_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ be an array of positive real numbers; $\{b_n, n \geq 1\}$ be a sequence of positive real numbers, $b_n \uparrow \infty$. Let $\psi(t)$ be a non-negative even function satisfying the following conditions:

$$\frac{\psi(|t|)}{|t|} \uparrow \text{ and } \frac{\psi(|t|)}{|t|^p} \downarrow \text{ as } |t| \uparrow$$

for some real number $p \in (1, 2]$. Put $A(n, t) = \sum_{i=1}^n a_{ni}'$, $n \geq 1, t \geq 0$. If

$$\sum_{n=1}^{\infty} A(n, t) \frac{E\psi(X)}{\psi(b_n)} < \infty, t \in \{0, 1\}, \text{ and } \sum_{n=1}^{\infty} A^p(n, 2) \log^{2p}(n) \frac{E\psi(X)}{\psi(b_n)} < \infty,$$

then

$$\frac{1}{b_n} \max_{1 \leq j \leq n} \left| \sum_{i=1}^j a_{ni} X_{ni} \right| \rightarrow 0$$

completely.

Proof. We continue to use the notations $X_i^{(n)}$ and $T_i^{(n)}$ introduced in the proof of theorem 3. For any $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} & P\left(\max_{1 \leq j \leq n} \left| \sum_{i=1}^j a_{ni} X_{ni} \right| > b_n \varepsilon\right) \leq \\ & \leq P\left(\max_{1 \leq j \leq n} \left| \sum_{i=1}^j a_{ni} X_i^{(n)} \right| > b_n \varepsilon\right) + P\left(\max_{1 \leq i \leq n} |X_{ni}| > b_n\right) \leq \\ & \leq P\left(\max_{1 \leq j \leq n} |T_j^{(n)}| > b_n \varepsilon - \max_{1 \leq j \leq n} \left| \sum_{i=1}^j a_{ni} EX_i^{(n)} \right|\right) + P\left(\max_{1 \leq i \leq n} |X_{ni}| > b_n\right). \end{aligned}$$

Since $\frac{\psi(t)}{|t|} \uparrow$, it follows that

$$\begin{aligned} & b_n^{-1} \max_{1 \leq j \leq n} \left| \sum_{i=1}^j a_{ni} EX_i^{(n)} \right| \leq \\ & \leq b_n^{-1} \max_{1 \leq j \leq n} \left| \sum_{i=1}^j a_{ni} E(X_{ni} I(|X_{ni}| > b_n)) \right| + \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^j a_{ni} P(|X_{ni}| > b_n) \leq \\ & \leq b_n^{-1} \sum_{i=1}^n a_{ni} E(|X| I(|X| > b_n)) + \sum_{i=1}^n a_{ni} P(|X| > b_n) \leq \\ & \leq A(n, 1) E\left(\frac{|X| I(|X| > b_n)}{b_n}\right) + A(n, 1) \frac{E\psi(X)}{\psi(b_n)} \leq \\ & \leq 2A(n, 1) \frac{E\psi(X)}{\psi(b_n)} \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Therefore, for n large enough

$$P\left(\max_{1 \leq j \leq n} \left| \sum_{i=1}^j a_{ni} X_{ni} \right| > b_n \varepsilon\right) \leq P\left(\max_{1 \leq j \leq n} |T_j^{(n)}| > \frac{b_n \varepsilon}{2}\right) + P\left(\max_{1 \leq i \leq n} |X_{ni}| > b_n\right).$$

It is sufficient to show that

$$J_1 = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\max_{1 \leq j \leq n} |T_j^{(n)}| > \frac{b_n \varepsilon}{2}\right) < \infty$$

and

$$J_2 = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\max_{1 \leq i \leq n} |X_{ni}| > b_n\right) < \infty.$$

On the one hand, by Markov inequality, lemma 3 and C_p -inequality, we have

$$\begin{aligned} J_1 &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-2p} E\left(\max_{1 \leq j \leq n} |T_j^{(n)}|^{2p}\right) \leq \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-2p} \log^{2p}(n) \left[\sum_{i=1}^n a_{ni}^{2p} E\left|X_i^{(n)} - EX_i^{(n)}\right|^{2p} + \left(\sum_{i=1}^n a_{ni}^2 E\left|X_i^{(n)} - EX_i^{(n)}\right|^2\right)^p \right] \leq \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-2p} \log^{2p}(n) \left[\sum_{i=1}^n a_{ni}^{2p} E\left|X_i^{(n)}\right|^{2p} + \left(\sum_{i=1}^n a_{ni}^2 E\left|X_i^{(n)}\right|^2\right)^p \right] \leq \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-2p} \log^{2p}(n) \left[\sum_{i=1}^n a_{ni}^{2p} E\left(|X_{ni}|^{2p} I(|X_{ni}| \leq b_n)\right) + \left(\sum_{i=1}^n a_{ni}^2 E\left(|X_{ni}|^2 I(|X_{ni}| \leq b_n)\right)\right)^p \right]. \end{aligned}$$

On the other hand, by lemma 5 and the facts that $\frac{\psi(t)}{|t|} \uparrow$ and $\frac{\psi(t)}{|t|^p} \downarrow$ as $|t| \uparrow$, we obtain

$$\begin{aligned} b_n^{-2p} \sum_{i=1}^n a_{ni}^{2p} E\left(|X_{ni}|^{2p} I(|X_{ni}| \leq b_n)\right) &\leq b_n^{-p} \sum_{i=1}^n a_{ni}^{2p} E\left(|X_{ni}|^p I(|X_{ni}| \leq b_n)\right) \leq \\ &\leq b_n^{-p} \sum_{i=1}^n a_{ni}^{2p} \left[E\left(|X|^p I(|X| \leq b_n)\right) + b_n^p P(|X| > b_n) \right] \leq \\ &\leq A(n, 2p) \left[\frac{E(\psi(X) I(|X| \leq b_n))}{\psi(b_n)} + \frac{E\psi(X)}{\psi(b_n)} \right] \leq CA(n, 2p) \frac{E\psi(X)}{\psi(b_n)} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} b_n^{-2} \sum_{i=1}^n a_{ni}^2 E\left(|X_{ni}|^2 I(|X_{ni}| \leq b_n)\right) &\leq \\ &\leq b_n^{-2} A(n, 2) \left[E\left(|X|^2 I(|X| \leq b_n)\right) + b_n^2 P(|X| > b_n) \right] \leq \\ &\leq A(n, 2) \left[E\left(\frac{|X|^2 I(|X| \leq b_n)}{b_n^2}\right) + P\left(\psi^{\frac{1}{p}}(X) > \psi^{\frac{1}{p}}(b_n)\right) \right] \leq \\ &\leq A(n, 2) \left[E\left(\frac{|X| I(|X| \leq b_n)}{b_n}\right) + \frac{E\psi^{\frac{1}{p}}(X)}{\psi^{\frac{1}{p}}(b_n)} \right] \leq \\ &\leq A(n, 2) \left[\frac{E\left(\psi^{\frac{1}{p}}(X) I(|X| \leq b_n)\right)}{\psi^{\frac{1}{p}}(b_n)} + \frac{E\psi^{\frac{1}{p}}(X)}{\psi^{\frac{1}{p}}(b_n)} \right] \leq CA(n, 2) \frac{E\psi^{\frac{1}{p}}(X)}{\psi^{\frac{1}{p}}(b_n)}. \end{aligned}$$

Therefore,

$$\begin{aligned} J_1 &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \log^{2p}(n) [A(n, 2p) + A^p(n, 2)] \frac{E\psi(X)}{\psi(b_n)} \leq \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} A^p(n, 2) \log^{2p}(n) \frac{E\psi(X)}{\psi(b_n)} < \infty. \end{aligned}$$

For J_2 we have

$$J_2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n P(|X_{ni}| > b_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} nP(|X| > b_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{E\psi(X)}{\psi(b_n)} < \infty.$$

Theorem is proved.

Without the assumption of stochastic domination of $\{X_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ the proof of theorem 3 immediately yields the following result.

Theorem 5. Let $\{X_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ be an array of rowwise NOD random variables with $E(X_{ni}) = 0, 1 \leq i \leq n, n \geq 1$; $\{a_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ be an array of positive real numbers; $\{b_n, n \geq 1\}$ be a sequence of positive real numbers, $b_n \uparrow \infty$. Let $\{\psi_n(t), n \geq 1\}$ be a sequence of non-negative even functions satisfying the following conditions:

$$\frac{\psi_n(|t|)}{|t|} \uparrow \text{ and } \frac{\psi_n(|t|)}{|t|^p} \downarrow \text{ as } |t| \uparrow$$

for some real number $p \in (1, 2]$. We assume that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \frac{E\psi_i(X_{ni})}{\psi_i(b_n)} < \infty \text{ and } \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n a_{ni}^2 \frac{E\psi_i(X_{ni})}{\psi_i(b_n)} < \infty.$$

Then

$$\frac{1}{b_n} \sum_{i=1}^n a_{ni} X_{ni} \rightarrow 0$$

completely.

References

1. Hsu PL, Robbins H. Complete convergence and the law of large numbers. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. 1947;33(2):25–31. DOI: 10.1073/pnas.33.2.25.
2. Joag-Dev K, Proschan F. Negative association of random variables with applications. *Annals of Statistics*. 1983;11(1):286–295.
3. Kim HC. The Hájek – Rényi inequality for weighted sums of negatively orthant dependent random variables. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*. 2006;1(6):297–303.
4. Asadian N, Fakour V, Bozorgnia A. Rosenthal's type inequalities for negatively orthant dependent random variables. *Journal of the Iranian Statistical Society*. 2006;5(1–2):66–75.
5. Volodin A. On the Kolmogorov exponential inequality for negatively dependent random variables. *Pakistan Journal of Statistics*. 2002;18:249–254.
6. Klesov O, Rosalsky A, Volodin A. On the almost sure growth rate of sums of lower negatively dependent nonnegative random variables. *Statistics & Probability Letters*. 2005;71:193–202.
7. Ko M-H, Kim T-S. Almost sure convergence for weighted sums of negatively orthant dependent random variables. *Journal of the Korean Mathematical Society*. 2005;42(5):949–957. DOI: 10.4134/JKMS.2005.42.5.949.
8. Amini M, Azarnoosh HA, Bozorgnia A. The strong law of large numbers for negatively dependent generalized Gaussian random variables. *Stochastic Analysis and Applications*. 2004;22:893–901.
9. Amini M, Bozorgnia A. Complete convergence for negatively dependent random variables. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*. 2003;16:121–126.
10. Kuczmazewska A. On some conditions for complete convergence for arrays of rowwise negatively dependent random variables. *Stochastic Analysis and Applications*. 2006;24:1083–1095.
11. Sung SH. Complete convergence for weighted sums of negatively dependent random variables. *Statistical Papers*. 2012;53:73–82. DOI: 10.1007/s00362-010-0309-6.
12. Taylor RL, Patterson RF, Bozorgnia A. A strong law of large numbers for arrays of rowwise negatively dependent random variables. *Stochastic Analysis and Applications*. 2002;20:643–656.

13. Wu YF, Zhu D-J. Convergence properties of partial sums for arrays of rowwise negatively orthant dependent random variables. *Journal of the Korean Statistical Society*. 2010;39(2):189–197. DOI: 10.1016/j.jkss.2009.05.003.
14. Wu QY. Complete convergence for weighted sums of sequences of negatively dependent random variables. *Journal of Probability and Statistics*. 2011;2011:202015. DOI: 10.1155/2011/202015.
15. Zarei H, Jabbari H. Complete convergence of weighted sums under negative dependence. *Statistical Papers*. 2009;52:413–418. DOI: 10.1007/s00362-009-0238-4.
16. Bozorgnia A, Patterson RF, Taylor RL. Limit theorems for dependent random variables. In: Lakshmikantham V, editor. *World congress of nonlinear analysts '92. Proceedings of the First world congress of nonlinear analysts; 1992 August 19–26; Tampa, USA*. Berlin: De Gruyter; 1996. p. 1639–1650. DOI: 10.1515/9783110883237.1639.

Received 07.10.2025 / revised 06.11.2025 / accepted 06.11.2025.

УДК 517.968.73

СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД ЧЕБЫШЕВА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПОЛНОГО ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПРАНДТЛЯ

Г. А. РАСОЛЬКО¹⁾, В. М. ВОЛКОВ²⁾, М. В. ИГНАТЕНКО¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

²⁾Институт математики НАН Беларуси, ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Беларусь

Аннотация. Статья посвящена проблеме построения вычислительных схем для решения интегро-дифференциальных уравнений Прандтля, возникающих во многих задачах механики. В ней разработаны приближенные численные алгоритмы для решения сингулярных интегро-дифференциальных уравнений вида обобщенного уравнения Прандтля. Предлагаемые приближенные вычислительные схемы основаны на представлении решения уравнения в виде разложения по ортогональному базису полиномов Чебышева. Использование известных спектральных соотношений позволило получить аналитическое выражение для сингулярной составляющей уравнения. Как следствие, разработанная методика демонстрирует высокую точность и экспоненциальную скорость сходимости приближенного решения относительно степени интерполяционных многочленов. Вычислительные качества данной методики продемонстрированы на тестовом примере. В частности, показано, что дискретная

Образец цитирования:

Расолько ГА, Волков ВМ, Игнатенко МВ. Спектральный метод Чебышева для решения полного обобщенного уравнения Прандтля. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2025;3:51–61. EDN: WSUJFV

For citation:

Rasolko GA, Volkov VM, Ignatenko MV. Chebyshev spectral method for solving complete generalised Prandtl equation. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2025;3:51–61. Russian. EDN: WSUJFV

Авторы:

Галина Алексеевна Расолько – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета.

Василий Михайлович Волков – доктор физико-математических наук, доцент; главный научный сотрудник отдела вычислительной математики и математического моделирования.

Марина Викторовна Игнатенко – кандидат физико-математических наук, доцент; заведующий кафедрой веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета.

Authors:

Galina A. Rasolko, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of web-technologies and computer simulation, faculty of mechanics and mathematics. rasolka@bsu.by

<https://orcid.org/0000-0002-4055-7343>

Vasily M. Volkov, doctor of science (physics and mathematics), docent; chief researcher at the department of computational mathematics and mathematical modelling. volkov@tut.by

<https://orcid.org/0000-0003-0350-4186>

Marina V. Ignatenko, PhD (physics and mathematics), docent; head of the department of web-technologies and computer simulation, faculty of mechanics and mathematics. ignatenkomv@bsu.by

<https://orcid.org/0000-0002-8029-1842>

модель, основанная на представлении решения в виде разложения по многочленам Чебышева, приводит к хорошо обусловленной системе линейных алгебраических уравнений для коэффициентов разложения, а скорость сходимости погрешности приближенного решения может достигать линейной скорости относительно степени интерполяционного многочлена.

Ключевые слова: приближенный численный алгоритм; сингулярное уравнение; интегро-дифференциальное уравнение; ортогональный базис полиномов Чебышева; спектральный метод Чебышева; обобщенное уравнение Прандтля.

Благодарность. Работа выполнена в рамках государственной программы научных исследований «Конвергенция-2025» (подпрограмма «Математические модели и методы», задание 1.4.01.2).

Chebyshev Spectral Method for Solving Complete Generalised Prandtl Equation

G. A. RASOLKO^a, V. M. VOLKOV^b, M. V. IGNATENKO^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

^bInstitute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus,
11 Surganova Street, Minsk 220072, Belarus

Corresponding author: M. V. Ignatenko (ignatenkomv@bsu.by)

Abstract. This article is devoted to the problem of constructing computational schemes for solving Prandtl integro-differential equations that arise in many problems in mechanics. An approximate numerical method for solving singular integro-differential equations of the generalised Prandtl equation type has been developed. The proposed approximate computational schemes are based on representing the solution of the equation as an expansion over an orthogonal basis of Chebyshev polynomials. The use of known spectral relations has made it possible to obtain an analytical expression for the singular component of the equation. As a consequence, the developed method demonstrates excellent accuracy and exponential rate of convergence of the approximate solution in relation to the degree of interpolation polynomials. The computational qualities of this method are demonstrated using a test example. In particular, it is shown that a discrete model based on the representation of the solution as a decomposition by Chebyshev polynomials leads to a well-conditioned system of linear algebraic equations for the decomposition coefficients, and the convergence rate of the approximate solution error can reach a linear speed in relation to the degree of the interpolation polynomial.

Keywords: approximate numerical algorithm; singular equation; integro-differential equation; orthogonal basis of Chebyshev polynomials; Chebyshev spectral method; generalised Prandtl equation.

Acknowledgements. The work was carried out within the framework of the state programme of scientific research «Convergence-2025» (subprogramme «Mathematical models and methods», assignment 1.4.01.2).

Введение

В теории крыла конечного размаха, контактных задачах теории упругости и других задачах механики сплошной среды важную роль играет уравнение вида

$$\frac{\Gamma(x)}{B(x)} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(t)}{t-x} dt = f(x), \quad -1 < x < 1,$$

которое называется уравнением Прандтля¹. Здесь $B(x)$ и $f(x)$ – известные функции из класса $C[-1, 1]$, а $\Gamma(x)$ – искомая функция, удовлетворяющая краевым условиям на границе интервала $\Gamma(\pm 1) = 0$.

Ядро уравнения Прандтля имеет сингулярность, что порождает существенные трудности при численном решении вышеупомянутых задач с использованием традиционных подходов, основанных на непосредственной аппроксимации интеграла квадратурными формулами [1]. В связи с этим, как показано в исследованиях ряда авторов (см., например, [2–7]), весьма эффективный способ обработки подобного рода сингулярностей состоит в представлении решения задачи и коэффициентов уравнения в виде интерполяционных полиномов с использованием полиномов Чебышева. Данный прием с учетом известных спектральных соотношений [8, с. 188]

¹Голубев В. В. Лекции по теории крыла. М.: Гос. изд-во техн. теорет. лит., 1949. 480 с.

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t-x} = U_{n-1}(x), \quad (1)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_{n-1}(t) \frac{dt}{t-x} = -T_n(x), \quad -1 < x < 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где $T_n(x)$ и $U_n(x)$ – многочлены Чебышева степени n первого и второго рода соответственно, позволяет вычислить аналитически сингулярную составляющую интеграла и получить экспоненциальную скорость сходимости приближенного решения задачи [3]. Показавшие высокую эффективность спектральные методы на основе полиномов Чебышева для некоторых частных случаев уравнения Прандтля построены в работах [4–6].

Постановка задачи

Рассмотрим сингулярное уравнение Прандтля общего вида² [7]:

$$\frac{\Gamma(x)}{B(x)} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(t)}{t-x} dt + \int_{-1}^1 \frac{s(x,t)}{t-x} \Gamma(t) dt + \int_{-1}^1 g(x,t) \Gamma'(t) dt = f(x), \quad -1 < x < 1. \quad (2)$$

Здесь $B(x)$, $s(x,t)$, $g(x,t)$ и $f(x)$ – известные функции (при этом функция $s(x,t)$ удовлетворяет условию Гёльдера по обоим переменным), а $\Gamma(x)$ – искомая функция.

Предварительно в уравнении (2) выполним преобразование сингулярного интеграла $\int_{-1}^1 \frac{s(x,t)}{t-x} \Gamma(t) dt$ в соответствии с работой [9, с. 315]:

$$\int_{-1}^1 \frac{s(x,t)}{t-x} \Gamma(t) dt = \int_{-1}^1 \frac{s(x,t) - s(x,x) + s(x,x)}{t-x} \Gamma(t) dt = \frac{b(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma(t)}{t-x} dt + \int_{-1}^1 v(x,t) \Gamma(t) dt,$$

где $b(x) = \pi s(x,x)$; $v(x,t) = \frac{s(x,t) - s(x,x)}{t-x}$.

Далее будем рассматривать уравнение (2) в виде

$$\frac{\Gamma(x)}{B(x)} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(t)}{t-x} dt + \frac{b(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma(t)}{t-x} dt + \int_{-1}^1 g(x,t) \Gamma'(t) dt + \int_{-1}^1 v(x,t) \Gamma(t) dt = f(x), \quad |x| < 1. \quad (3)$$

Здесь $B(x)$, $b(x)$, $g(x,t)$, $v(x,t)$ и $f(x)$ – известные функции, а $\Gamma(x)$ – искомая функция, удовлетворяющая краевым условиям

$$\Gamma(\pm 1) = 0. \quad (4)$$

Полагаем, что производная решения задачи принадлежит классу функций $h(0)$ по Мусхелишвили (класс функций с интегрируемой особенностью в окрестности точек $x = \pm 1$ [9, с. 31]), т. е. $\psi(x) \in h(0)$, если на отрезке $[-1 + \varepsilon_1, 1 - \varepsilon_2]$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, $\psi(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера и в окрестности точек ± 1 допускает интегрируемую особенность.

Приведение уравнения (3) к уравнению Фредгольма

Как и в работе [10], сведем уравнение (3) к уравнению Фредгольма второго рода с логарифмической особенностью. Пусть

$$u(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(t)}{t-x} dt. \quad (5)$$

Применим формулу обращения сингулярного интеграла (5) в классе $h(0)$:

$$\Gamma'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2} u(t)}{t-x} dt + \frac{c}{\sqrt{1-x^2}},$$

где c – произвольная постоянная. Отсюда с учетом краевых условий (4) имеем

²Голубев В. В. Лекции по теории крыла... 480 с.

$$\Gamma(x) = \int_{-1}^x \Gamma'(\tau) d\tau = \int_{-1}^x \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2} u(t)}{t-\tau} dt + \frac{c}{\sqrt{1-\tau^2}} \right) \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x, t) u(t) dt + \mu(x),$$

где

$$H(x, t) = \sqrt{1-t^2} \int_{-1}^x \left(\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \frac{d\tau}{t-\tau} \right) = \ln \frac{1-xt + \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-t^2}}{|t-x|},$$

$$\mu(x) = c \left(\arcsin x + \frac{\pi}{2} \right).$$

Учитывая, что $H(-1, t) = H(1, t)$, получаем $c = 0$.

Отметим, что функция $H(x, t)$ симметрична и неотрицательна. Имеет место оценка

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 |H(x, t)| dt = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \int_{-1}^x \left(\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \frac{d\tau}{t-\tau} \right) dt = \sqrt{1-x^2} \leq 1. \quad (6)$$

Принимая во внимание, что

$$\Gamma(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x, t) u(t) dt, \quad (7)$$

а также

$$\frac{b(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma(t)}{t-x} dt = \frac{b(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(t_1, t) u(t) dt \right) \frac{1}{t_1-x} dt_1 = \frac{b(x)}{\pi} \int_{-1}^1 M(x, t) u(t) dt,$$

$$M(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(t_1, t) \frac{1}{t_1-x} dt_1,$$

$$\int_{-1}^1 g(x, t) \Gamma'(t) dt = - \int_{-1}^1 \sqrt{1-\tau^2} u(\tau) \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(x, t)}{\sqrt{1-t^2} (t-\tau)} dt \right) d\tau = \int_{-1}^1 G(x, \tau) u(\tau) d\tau,$$

$$G(x, \tau) = -\sqrt{1-\tau^2} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(x, t)}{\sqrt{1-t^2} (t-\tau)} dt,$$

$$\int_{-1}^1 v(x, t) \Gamma(t) dt = \int_{-1}^1 v(x, t) \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(t, \varsigma) u(\varsigma) d\varsigma dt = \int_{-1}^1 u(\varsigma) V(x, \varsigma) d\varsigma,$$

$$V(x, \varsigma) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 v(x, t) H(t, \varsigma) dt,$$

введем линейный оператор

$$K(u; x) = \frac{1}{B(x)} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x, t) u(t) dt + \frac{b(x)}{\pi} \int_{-1}^1 M(x, t) u(t) dt +$$

$$+ \int_{-1}^1 G(x, t) u(t) dt + \int_{-1}^1 u(t) V(x, t) dt. \quad (8)$$

Таким образом, граничная задача (3), (4) сводится к операторному уравнению вида

$$u(x) + K(u; x) = f(x). \quad (9)$$

Для вывода достаточных условий разрешимости уравнения (9), как и в работе [10], оценим оператор (8) в равномерной метрике. На основании предыдущих обозначений и оценки (6) имеем

$$\left| \frac{b(x)}{\pi} \int_{-1}^1 M(x, t) u(t) dt \right| \leq \|b\|_C \|u\|_C \left| \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(t_1, t) dt \right) \frac{1}{t_1-x} dt_1 \right| =$$

$$= \|b\|_C \|u\|_C \left| \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t_1^2} \frac{1}{t_1-x} dt_1 \right| \leq \|b\|_C \|u\|_C \|T_1(x)\|_C = \|b\|_C \|u\|_C.$$

Учитывая, что $\int_{-1}^1 G(x, t) u(t) dt = \int_{-1}^1 g(x, t) \Gamma'(t) dt$, получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^1 G(x, t) u(t) dt \right| &\leq \int_{-1}^1 |g(x, t) \Gamma'(t)| dt \leq \|g\|_C \int_{-1}^1 \left| \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t_1^2} u(t_1)}{t_1-t} dt_1 \right| dt \leq \\ &\leq \|g\|_C \|u\|_C \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t_1^2}}{t_1-t} dt_1 \right| dt = \|g\|_C \|u\|_C \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} |t| dt = \frac{2}{\pi} \|g\|_C \|u\|_C. \end{aligned}$$

Так как

$$|V(x, \varsigma)| = \left| \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 v(x, t) H(t, \varsigma) dt \right| \leq \|v\|_C \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 |H(t, \varsigma)| dt = \|v\|_C \sqrt{1-\varsigma^2},$$

то

$$\left| \int_{-1}^1 u(t) V(x, t) dt \right| \leq \|u\|_C \left| \int_{-1}^1 V(x, t) dt \right| \leq \|u\|_C \|v\|_C \left| \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt \right| = \frac{\pi}{2} \|v\|_C \|u\|_C.$$

С учетом данных оценок окончательно получаем

$$\|Ku\|_C \leq \|u\|_C \left(\max_{|x| \leq 1} \left| \frac{\sqrt{1-x^2}}{B(x)} \right| + \|b\|_C + \frac{\pi}{2} \|v\|_C + \frac{2}{\pi} \|g\|_C \right).$$

Относительно условий разрешимости задачи (3), (4) справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть функции $B(x)$, $b(x)$, $v(x, t)$, $g(x, t)$, входящие в уравнение (3), удовлетворяют условию

$$\rho = \max_{|x| \leq 1} \left| \frac{\sqrt{1-x^2}}{B(x)} \right| + \|b\|_C + \frac{\pi}{2} \|v\|_C + \frac{2}{\pi} \|g\|_C < 1.$$

Тогда граничная задача (3), (4) имеет единственное решение в классе функций $\Gamma'(x) \in h(0)$ для любой $f(x) \in C[-1, 1]$.

Некоторые предварительные сведения

Для получения приближенных схем решения задачи (3), (4) будем использовать интерполяционный многочлен для функции $f(x)$, построенный по узлам Чебышева первого рода [11, с. 89], в виде

$$f(x) \approx f_n(x) = \sum_{j=0}^n c_j T_j(x), \quad (10)$$

где $c_j = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) T_j(x_k)$, $j=0, 1, \dots, n$, $x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi$, $k=0, 1, \dots, n$. Здесь и далее $\sum_{j=0}^n {}^0 a_j = \frac{1}{2} a_0 + a_1 + \dots + a_n$.

На основании формулы (10) получим следующий вид интерполяционного многочлена:

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^n f_j U_j(x), \quad (11)$$

где

$$f_j = G_j - G_{j+2}, \quad j=0, 1, \dots, n-2, \quad f_{n-1} = G_{n-1}, \quad f_n = G_n,$$

$$G_j = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) T_j(x_k), \quad j=0, 1, \dots, n, \quad x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k=0, 1, \dots, n.$$

Здесь были использованы известные свойства полиномов Чебышева [11]:

$$T_0(x) = U_0(x), \quad 2T_1(x) = U_1(x), \quad 2T_j(x) = U_j(x) - U_{j-2}(x), \quad j \geq 2.$$

С учетом формул (10) и (11) интерполяционные многочлены для функции двух переменных будем рассматривать в виде разложения по многочленам Чебышева как первого, так и второго рода:

$$\begin{aligned} \psi_{n,n}(x, t) &= \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n \sigma_{m,j} T_j(t), \\ \sigma_{m,j} &= \frac{\delta_j}{n+1} \sum_{r=1}^{n+1} T_j(x_r) \frac{\delta_m}{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} T_m(x_l) \psi(x_l, x_r), \\ \delta_i &= \begin{cases} 1, & i=0, \\ 2, & i>0, \end{cases} \quad x_p = \cos \frac{2p-1}{2n+2} \pi, \quad p=1, 2, \dots, n+1; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \omega_{n,n}(x, t) &= \sum_{m=0}^n U_m(x) \sum_{j=0}^n \eta_{m,j} T_j(t), \\ \eta_{m,j} &= \frac{\delta_j}{(n+1)^2} \sum_{r=1}^{n+1} T_j(x_r) \sum_{l=1}^{n+1} (T_m(x_l) - v_m T_{m+2}(x_l)) \omega(x_l, x_r), \\ \delta_j &= \begin{cases} 1, & j=0, \\ 2, & j>0, \end{cases} \quad v_m = \begin{cases} 1, & 0 \leq m \leq n-2, \\ 0, & m=n-1, n, \end{cases} \quad x_k = \cos \frac{2k-1}{2n+2} \pi, \quad k=1, 2, \dots, n+1; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{n,n}(x, t) &= \sum_{m=0}^n U_m(x) \sum_{j=0}^n \rho_{m,j} U_j(t), \\ \rho_{m,j} &= \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{l=0}^n (T_m(x_l) - \sigma_m T_{m+2}(x_l)) \sum_{r=0}^n \varphi(x_l, x_r) (T_j(x_r) - \theta_j T_{j+2}(x_r)), \\ \theta_j &= \begin{cases} 1, & 0 \leq j \leq n-2, \\ 0, & j=n-1, n, \end{cases} \quad \sigma_m = \begin{cases} 1, & 0 \leq m \leq n-2, \\ 0, & m=n-1, n, \end{cases} \quad x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k=0, 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (14)$$

Вычислительные схемы

Приближенное решение задачи (3), (4) будем искать как решение следующего уравнения:

$$u_n(x) + K(u_n; x) = F_n(x),$$

где

$$\begin{aligned} K(u_n; x) &= \frac{1}{\pi B(x)} \int_{-1}^1 H(x, t) u_n(t) dt + \frac{b(x)}{\pi} \int_{-1}^1 M(x, t) u_n(t) dt + \\ &+ \int_{-1}^1 G_{n,n}(x, t) u_n(t) dt + \int_{-1}^1 V_{n,n}(x, t) u_n(t) dt, \end{aligned} \quad (15)$$

$$G_{n,n}(x, \tau) = -\sqrt{1-\tau^2} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g_{n,n}(x, t)}{\sqrt{1-t^2}(t-\tau)} dt, \quad V_{n,n}(x, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 v_{n,n}(x, t) H(t, \tau) dt,$$

$F_n(x)$ – некоторая функция из класса $C[-1, 1]$ такая, что $F_n(x_j) = f(x_j)$, $x_j = \cos \frac{j+1}{n+2}$, $j=0, 1, \dots, n$, а $g_{n,n}(x, t)$ и $v_{n,n}(x, t)$ – интерполяционные многочлены для функций $g(x, t)$ и $v(x, t)$ соответственно.

Схема 1. Пусть $u_n(x)$ – интерполяционный многочлен для функции $u(x)$, построенный по узлам Чебышева первого рода:

$$u_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'_n(t)}{t-x} dt = \sum_{k=0}^n c_k U_k(x), \quad (16)$$

где c_k , $k=0, 1, \dots, n$, – пока неизвестные постоянные.

С учетом соотношений (1), (7), свойства $\int_{-1}^x \frac{T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{k} U_{k-1}(x)$, $k \geq 0$, и формулы (16) вычислим $\Gamma_n(x)$. Имеем

$$\begin{aligned}\Gamma_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x, t) u_n(t) dt = \int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{u_n(t)}{t-\tau} dt \right) d\tau = \\ &= \sum_{k=0}^n c_k \int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_k(t)}{t-\tau} dt \right) d\tau = - \sum_{k=0}^n c_k \int_{-1}^x \frac{T_{k+1}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Gamma_n(x) = \sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{k+1} U_k(x). \quad (17)$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\frac{b(x)}{\pi} \int_{-1}^1 M(x, t) u_n(t) dt &\equiv \frac{b(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma_n(t)}{t-x} dt = \frac{b(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\sum_{k=0}^n c_k \frac{\sqrt{1-t^2}}{k+1} U_k(t) \right) \frac{dt}{t-x} = \\ &= \sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{k+1} \frac{b(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_k(t) \frac{dt}{t-x} = - \sum_{k=0}^n c_k \frac{b(x)}{k+1} T_{k+1}(x).\end{aligned}$$

Для функций $g(x, t)$, $v(x, t)$ выберем интерполяционные многочлены $g_{n,n}(x, t)$, $v_{n,n}(x, t)$ вида (12). Вычислим последовательно оставшиеся интегралы в равенствах (15). Имеем

$$\begin{aligned}G_{n,n}(x, \tau) &= -\sqrt{1-\tau^2} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g_{n,n}(x, t)}{\sqrt{1-t^2} (t-\tau)} dt = \\ &= - \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n \sigma_{m,j} \left(\frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_j(t) dt}{\sqrt{1-t^2} (t-\tau)} \right) = -\sqrt{1-\tau^2} \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=1}^n \sigma_{m,j} U_{j-1}(\tau),\end{aligned}$$

где

$$\sigma_{m,j} = \frac{\delta_j}{n+1} \sum_{r=1}^{n+1} T_j(x_r) \frac{\delta_m}{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} T_m(x_l) g(x_l, x_r),$$

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & i=0, \\ 2, & i>0, \end{cases} \quad x_p = \cos \frac{2p-1}{2n+2} \pi, \quad p=1, 2, \dots, n+1.$$

Изменяя порядок суммирования, с учетом свойства ортогональности многочленов Чебышева получаем

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 G_{n,n}(x, \tau) u_n(\tau) d\tau &= - \int_{-1}^1 \sqrt{1-\tau^2} \left(\sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=1}^n \sigma_{m,j} U_{j-1}(\tau) \right) \left(\sum_{k=0}^n c_k U_k(\tau) \right) d\tau = \\ &= - \sum_{k=0}^n c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=1}^n \sigma_{m,j} \left(\int_{-1}^1 \sqrt{1-\tau^2} U_k(\tau) U_{j-1}(\tau) d\tau \right) = - \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{n-1} c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) \sigma_{m,k+1}.\end{aligned}$$

Далее, используя явное представление интерполяционного многочлена вида (12) для функции $v_{n,n}(x, t)$, с учетом соотношений (1) и свойства многочленов Чебышева [11] $2U_k(t)T_j(t) = U_{k-j}(t) + U_{k+j}(t)$ получаем

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 V_{n,n}(x, \varsigma) u_n(\varsigma) d\varsigma \equiv \int_{-1}^1 v_{n,n}(x, t) \Gamma_n(t) dt = \\ & = \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{k+1} \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n \omega_{m,j} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_k(t) T_j(t) dt = \\ & = \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{k+1} \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n \omega_{m,j} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_{k-j}(t) + U_{k+j}(t)}{2} dt = \\ & = \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{2k+2} \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n \omega_{m,j} \beta_{k-j} + c_0 \frac{\pi}{4} \sum_{m=0}^n T_m(x) \omega_{m,0}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \omega_{m,j} &= \frac{\delta_j}{n+1} \sum_{r=1}^{n+1} T_j(x_r) \frac{\delta_m}{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} T_m(x_l) v(x_l, x_r), \\ \delta_i &= \begin{cases} 1, & i=0, \\ 2, & i>0, \end{cases} \quad x_p = \cos \frac{2p-1}{2n+2} \pi, \quad p=1, 2, \dots, n+1, \\ \beta_m &= \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_m(t) dt = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & m=-2, \\ \frac{\pi}{2}, & m=0, \\ 0, & m \neq -2, 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, имеем $u_n(x) + K(u_n; x) = F_n(x)$ или

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n c_k U_k(x) + \frac{\sqrt{1-x^2}}{B(x)} \sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{k+1} U_k(x) - \sum_{k=0}^n c_k \frac{b(x)}{k+1} T_{k+1}(x) + c_0 \frac{\pi}{4} \sum_{m=0}^n T_m(x) \omega_{m,0} - \\ & - \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{n-1} c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) \sigma_{m,k+1} + \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{2k+2} \sum_{j=0}^n \beta_{k-j} \sum_{m=0}^n T_m(x) \omega_{m,j} = F_n(x). \end{aligned} \quad (18)$$

На основании уравнения (18) получаем систему линейных алгебраических уравнений для вычисления $c_0, c_1, \dots, c_n$ путем последовательной подстановки в уравнение (18) вместо x нулей многочлена Чебышева второго рода $x_i = \cos \frac{i+1}{n+2}$, $i=0, 1, \dots, n$. Имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n c_k \left(U_k(x_i) + \frac{\sqrt{1-x_i^2}}{B(x_i)} \frac{U_k(x_i)}{k+1} - \frac{b(x_i)}{k+1} T_{k+1}(x_i) \right) + \\ & + c_0 \left(\frac{\pi}{4} \sum_{m=0}^n T_m(x_i) (\omega_{m,0} - 2\omega_{m,2} - 2\sigma_{m,1}) \right) + c_n \left\{ \frac{\pi}{4n+4} \sum_{m=0}^n T_m(x_i) \omega_{m,n} \right\} + \\ & + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \left(-\frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^n T_m(x_i) \sigma_{m,k+1} + \frac{\pi}{4k+4} \sum_{m=0}^n T_m(x_i) (\omega_{m,k} - \lambda_k \omega_{m,k+2}) \right) = f(x_i), \\ & \lambda_k \equiv \begin{cases} 0, & k > n-2, \\ 1, & k \leq n-2, \end{cases} \quad i=0, 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (19)$$

Совместность системы уравнений (19) позволяет вычислить коэффициенты c_k , $k=0, 1, \dots, n$. Приближенное решение задачи (3), (4) – функция $\Gamma_n(x)$ – вычисляется по формуле (17) для произвольной точки $x \in [-1, 1]$.

Схема 2. Если для функций $g(x, t)$, $v(x, t)$ выбрать интерполяционные многочлены $g_{n,n}(x, t)$, $v_{n,n}(x, t)$ вида (13), (14), получим еще одну вычислительную схему. Итак, $G_{n,n}(x, \tau) = -\sqrt{1-\tau^2} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g_{n,n}(x, t)}{\sqrt{1-t^2}(t-\tau)} dt$ или

$$\begin{aligned} G_{n,n}(x, \tau) &= -\sqrt{1-\tau^2} \sum_{m=0}^n U_m(x) \sum_{j=0}^n \eta_{m,j} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_j(t) dt}{\sqrt{1-t^2}(t-\tau)} \right) = \\ &= -\sqrt{1-\tau^2} \sum_{m=0}^n U_m(x) \sum_{j=1}^n \eta_{m,j} U_{j-1}(\tau), \\ \eta_{m,j} &= \frac{\delta_j}{(n+1)^2} \sum_{r=1}^{n+1} T_j(x_r) \sum_{l=1}^{n+1} (T_m(x_l) - v_m T_{m+2}(x_l)) g(x_l, x_r), \\ \delta_j &= \begin{cases} 1, & j=0, \\ 2, & j>0, \end{cases} \quad v_m = \begin{cases} 1, & 0 \leq m \leq n-2, \\ 0, & m=n-1, n, \end{cases} \quad x_k = \cos \frac{2k-1}{2n+2} \pi, \quad k=1, 2, \dots, n+1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 G_{n,n}(x, \tau) u_n(\tau) d\tau = \\ &= -\int_{-1}^1 \sqrt{1-\tau^2} \left(\sum_{m=0}^n U_m(x) \sum_{j=1}^n \eta_{m,j} U_{j-1}(\tau) \right) \left(\sum_{k=0}^n c_k U_k(\tau) \right) d\tau = \\ &= -\sum_{k=0}^n c_k \sum_{m=0}^n U_m(x) \sum_{j=1}^n \eta_{m,j} \left(\int_{-1}^1 \sqrt{1-\tau^2} U_k(\tau) U_{j-1}(\tau) d\tau \right) = -\frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{n-1} c_k \sum_{m=0}^n U_m(x) \eta_{m,k+1}. \end{aligned}$$

Далее получаем

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 V_{n,n}(x, \varsigma) u_n(\varsigma) d\varsigma \equiv \int_{-1}^1 v_{n,n}(x, t) \Gamma_n(t) dt = \\ &= \sum_{m=0}^n U_m(x) \sum_{j=0}^n \rho_{m,j} \int_{-1}^1 U_j(t) \left(\sqrt{1-t^2} \sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{k+1} U_k(t) \right) dt = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{k+1} \sum_{m=0}^n U_m(x) \sum_{j=0}^n \rho_{m,j} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_k(t) U_j(t) dt = \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{k+1} \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^n U_m(x) \rho_{m,k}, \\ \rho_{m,j} &= \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{l=0}^n (T_m(x_l) - \sigma_m T_{m+2}(x_l)) \sum_{r=0}^n v(x_l, x_r) (T_j(x_r) - \theta_j T_{j+2}(x_r)), \\ \theta_j &= \begin{cases} 1, & 0 \leq j \leq n-2, \\ 0, & j=n-1, n, \end{cases} \quad \sigma_m = \begin{cases} 1, & 0 \leq m \leq n-2, \\ 0, & m=n-1, n, \end{cases} \quad x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k=0, 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Отсюда $K(u_n; x)$ принимает вид

$$\begin{aligned} K(u_n; x) &= \sum_{k=0}^n c_k \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{B(x)} \frac{U_k(x)}{k+1} - \frac{b(x)}{k+1} T_{k+1}(x) \right) + c_n \left\{ \frac{\pi}{2n+2} \sum_{m=0}^n U_m(x) \rho_{m,n} \right\} + \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} c_k \left(-\frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^n U_m(x) \eta_{m,k+1} + \frac{\pi}{2k+2} \sum_{m=0}^n U_m(x) \rho_{m,k} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Как и выше, на основании равенства (20) получаем систему линейных алгебраических уравнений для вычисления $c_0, c_1, \dots, c_n$ путем последовательной подстановки в равенство (20) вместо x нулей многочлена Чебышева второго рода $x_i = \cos \frac{i+1}{n+2}$, $i=0, 1, \dots, n$. Имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n c_k \left(U_k(x_i) + \frac{\sqrt{1-x_i^2}}{B(x_i)} \frac{U_k(x_i)}{k+1} - \frac{b(x_i)}{k+1} T_{k+1}(x_i) \right) + \\ & + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \left(-\frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^n U_m(x_i) \eta_{m,k+1} + \frac{\pi}{2k+2} \sum_{m=0}^n U_m(x_i) \rho_{m,k} \right) + \\ & + c_n \left\{ \frac{\pi}{2n+2} \sum_{m=0}^n U_m(x_i) \rho_{m,n} \right\} = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (21)$$

Совместность системы уравнений (21) позволяет вычислить коэффициенты c_k , $k = 0, 1, \dots, n$. Приближенное решение задачи (3), (4) – функция $\Gamma_n(x)$ – вычисляется по формуле (17) для произвольной точки $x \in [-1, 1]$.

Результаты численного эксперимента

Приведем результаты численного эксперимента, проведенного согласно построенным вычислительным схемам. Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(x)}{B(x)} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(t)}{t-x} dt + \frac{b(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma(t)}{t-x} dt + \int_{-1}^1 g(x, t) \Gamma'(t) dt + \int_{-1}^1 v(x, t) \Gamma(t) dt = f(x), |x| < 1, \\ & B(x) = \sqrt{1-x^2} \frac{1+4x^2}{1+2x^2}, b(x) = \frac{x^2}{x+2}, \\ & v(x, t) = \frac{x}{20x+40} \frac{1}{t^2+1}, g(x, t) = \frac{1}{20x-40} \frac{t}{t^2+2}, \\ & f(x) = \frac{(32x^5 - 32x^3 + 6x)(2x^2 + 1)}{4x^2 + 1} - \frac{x^2(32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1)}{x+2} + \\ & + 192x^5 - 192x^3 + 36x. \end{aligned} \quad (22)$$

Известно, что решением задачи (4), (22) является функция

$$\Gamma(x) = \sqrt{1-x^2} (32x^5 - 32x^3 + 6x) = \sqrt{1-x^2} U_5(x).$$

Несложно убедиться в том, что производная данной функции $\Gamma'(x) \in h(0)$.

Как показывают расчеты, уже при сравнительно небольших значениях n достигается предельная точность приближенного решения, погрешность которого ограничена снизу лишь с вычислительной погрешностью.

Решая систему уравнений (19) или (21) при $n = 10$ и $n = 34$, видим, что приближенные решения $\Gamma_n(x)$, вычисленные по формуле (17), отличаются от точного решения $\Gamma(x)$ в точках $x = -0,99, -0,98, \dots, 0,99$ не более чем на $5,6 \cdot 10^{-6}$ и $1,5 \cdot 10^{-15}$ соответственно. Число обусловленности матриц систем (19) и (21) при размерности $n = 10$ и $n = 34$ составляет $\text{cond}(C_{10}) \leq 25$ и $\text{cond}(C_{34}) \leq 142$ соответственно, что позволяет грубо оценить зависимость числа обусловленности от размерности как $\text{cond}(C_n) \cong O\left(n^{\frac{3}{2}}\right)$.

Заключение

Представленные результаты могут быть использованы как в теоретических научных исследованиях, так и в инженерных расчетах, а также в образовательных программах по вычислительной математике. Итоги работы создают основу для дальнейшего развития спектральных методов, их адаптации к новым постановкам и интеграции в современные вычислительные комплексы.

Библиографические ссылки

1. Иванов ВВ. *Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений*. Киев: Наукова думка; 1968. 288 с.
2. Elliott D. A comprehensive approach to the approximate solution of singular integral equations over the arc $(-1, 1)$. *Journal of Integral Equations and Applications*. 1989;2(1):59–94. DOI: 10.1216/JIE-1989-2-1-59.

3. Sahlan MN, Feyzollahzadeh H. Operational matrices of Chebyshev polynomials for solving singular Volterra integral equations. *Mathematical Sciences*. 2017;11(2):165–171. DOI: 10.1007/s40096-017-0222-4.
4. Расолько ГА. Численное решение сингулярного интегро-дифференциального уравнения Прандтля методом ортогональных многочленов. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2018;3:68–74. EDN: ZLJXDF.
5. Расолько ГА. К численному решению сингулярного интегро-дифференциального уравнения Прандтля методом ортогональных многочленов. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2019;1:58–68. EDN: СКРРHZ.
6. Расолько ГА, Шешко СМ, Шешко МА. Об одном методе численного решения некоторых сингулярных интегро-дифференциальных уравнений. *Дифференциальные уравнения*. 2019;55(9):1285–1292. DOI: 10.1134/S0374064119090115.
7. Габдулхаев БГ. Прямые методы решения уравнения теории крыла. *Известия высших учебных заведений. Математика*. 1974;2:29–44.
8. Бейтмен Г, Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра*. 2-е издание. Виленкин НЯ, переводчик. Москва: Наука; 1973. 296 с. (Справочная математическая библиотека).
9. Мусхелишвили НИ. *Сингулярные интегральные уравнения: граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике*. 3-е издание. Москва: Наука; 1968. 513 с.
10. Rasolko GA, Volkov VM. Chebyshev spectral method for one class of singular integro-differential equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2025;65(2):339–348. DOI: 10.1134/S0965542524701963.
11. Пашковский С. *Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева*. Киро СН, переводчик; Лебедев ВИ, редактор. Москва: Наука; 1983. 384 с.

Получена 07.10.2025 / исправлена 06.11.2025 / принята 06.11.2025.
Received 07.10.2025 / revised 06.11.2025 / accepted 06.11.2025.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

THEORETICAL FOUNDATIONS OF COMPUTER SCIENCE

УДК 004

РАЗНОРОДНЫЙ БЛОЧНЫЙ АЛГОРИТМ ПОИСКА КРАТЧАЙШИХ ПУТЕЙ МЕЖДУ ВСЕМИ ПАРАМИ ВЕРШИН КЛАСТЕРИЗОВАННОГО ВЗВЕШЕННОГО ГРАФА

А. А. ПРИХОЖИЙ¹⁾, О. Н. КАРАСИК²⁾

¹⁾Белорусский национальный технический университет,
пр. Независимости, 65, 220013, г. Минск, Беларусь

²⁾Иссофт Солюшенз, ул. Чапаева, 5, 220034, г. Минск, Беларусь

Аннотация. Предлагается новый гетерогенный блочный алгоритм поиска кратчайших путей между всеми парами вершин большого ориентированного взвешенного простого графа, состоящего из слабосвязанных плотных кластеров (подграфов) разных размеров. Алгоритм учитывает и активно использует входные и выходные граничные вершины и ребра каждого кластера для ускорения вычислений и локализации обращений к памяти. Он делит все блоки матрицы «стоимость – смежность» на четыре типа (квадратный диагональный, прямоугольный вертикальный на кресте, прямоугольный горизонтальный на кресте и прямоугольный периферийный) и использует отдельную процедуру расчета для них, учитывает конструктивные особенности самого блока и способ его расчета через другие блоки. Приводится теоретическое обоснование преимуществ предлагаемых алгоритмов, сокращающих

Образец цитирования:

Прихожий АА, Карасик ОН. Разнородный блочный алгоритм поиска кратчайших путей между всеми парами вершин кластеризованного взвешенного графа. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2025;3:62–75 (на англ.).
EDN: SJMQEH

For citation:

Prihozhy AA, Karasik ON. Heterogeneous blocked all-pairs shortest paths algorithm for clustered weighted graphs. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2025;3:62–75.
EDN: SJMQEH

Авторы:

Анатолий Алексеевич Прихожий – доктор технических наук, профессор; профессор кафедры программного обеспечения информационных систем и технологий факультета информационных технологий и робототехники.

Олег Николаевич Карасик – кандидат технических наук; ведущий инженер.

Authors:

Anatoly A. Prihozhy, doctor of science (engineering), full professor; professor at the department of software of information systems and technologies, faculty of information technology and robotics.

prihozhy@yahoo.com

<https://orcid.org/0000-0002-1941-0806>

Oleg N. Karasik, PhD (engineering); leading engineer.

karasik.oleg.nikolaevich@gmail.com

время выполнения при поиске кратчайших путей. Достоверность сформулированных положений подтверждается результатами проведенных вычислительных экспериментов. Разрабатываются однопоточные реализации и многопоточные OpenMP реализации предлагаемого гетерогенного алгоритма и двух известных гомогенных блочных алгоритмов для поиска кратчайших путей. Вычислительные эксперименты на многоядерных процессорах проводятся на случайных ориентированных взвешенных графах, декомпозированных на слабосвязанные плотные кластеры разных размеров. Описываются результаты для четырех кластеризованных графов, два из которых имеют 4800 вершин (20 и 41 кластер соответственно) и два из которых имеют 9600 вершин (40 и 80 кластеров соответственно). На компьютере MacBook M1 Max в случае с однопоточностью предложенный гетерогенный блочный алгоритм для кластеризованных графов с граничными вершинами превзошел известный гомогенный блочный алгоритм для таких же графов в 1,62–1,94 раза; в случае с OpenMP-многопоточностью ускорение составило 1,87–1,97. На сервере из двух процессоров Intel Xeon E5-2620v4 гетерогенный алгоритм превзошел гомогенный алгоритм в 1,58–1,66 раза для однопоточности и в 1,29–1,64 раза для многопоточности. Сравнение предложенного алгоритма с классическим блочным алгоритмом Флойда – Уоршелла, в котором блоки имеют одинаковый размер, показало ускорение в 4,17–8,18 раза в случае с однопоточностью и ускорение в 3,91–6,36 раза в случае с OpenMP-многопоточностью.

Ключевые слова: кластеризованный взвешенный большой граф; кратчайшие пути между всеми парами вершин; блочный алгоритм; гетерогенные вычисления; ускорение.

HETEROGENEOUS BLOCKED ALL-PAIRS SHORTEST PATHS ALGORITHM FOR CLUSTERED WEIGHTED GRAPHS

A. A. PRIHOZHY^a, O. N. KARASIK^b

^aBelarusian National Technical University, 65 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220013, Belarus

^bISsoft Solutions, 5 Chapajeva Street, Minsk 220034, Belarus

Corresponding author: A. A. Prihozhy (prihozhy@yahoo.com)

Abstract. New heterogeneous blocked algorithm of finding all-pairs shortest paths in a large directed weighted simple graph consisting of weakly connected dense clusters (subgraphs) of different sizes is proposed. The algorithm considers and actively exploits the input and output bridge-vertices and edges of each cluster to speed up computation and localise memory accesses. It divides all blocks of the cost adjacent matrix into four types (square diagonal, rectangular vertical cross, rectangular horizontal cross and rectangular peripheral) and uses a separate computation procedure for each type, considering the design features of the block itself and the way it is computed through other blocks. A theoretical justification of the advantages of the proposed algorithms, which reduce the execution time when searching for the shortest paths, is given. The validity of the formulated statements is also confirmed by the results of computational experiments. We have developed single-threaded implementations and multi-threaded OpenMP implementations of the proposed heterogeneous algorithm and two known homogeneous blocked algorithms of finding shortest paths. Computational experiments on multicore processors were performed on directed weighted random sparse graphs decomposed into weakly connected dense clusters of different sizes. The results are described for four clustered graphs, two of which have 4800 vertices (20 and 41 clusters, respectively) and two of which have 9600 vertices (40 and 80 clusters, respectively). On the MacBook M1 Max computer in the case of single-threaded implementations proposed heterogeneous blocked algorithm for clustered graph with bridge-vertices outperformed the known homogeneous blocked algorithm for the same graphs by a factor of 1.62–1.94; in the case of multi-threaded OpenMP implementations the speedup was 1.87–1.97. On a server with Intel Xeon E5-2620v4 processors heterogeneous algorithm outperformed the known homogeneous algorithm by a factor of 1.58–1.66 for single-threaded implementations and by a factor of 1.29–1.64 for multi-threaded implementations. A comparison of proposed algorithm with the classical blocked Floyd – Warshall algorithm in which all blocks are of the same size showed a speedup of 4.17–8.18 times in the case of single-threaded implementations and a speedup of 3.91–6.36 times in the case of multi-threaded OpenMP implementations.

Keywords: clustered weighted large graph; all-pairs shortest paths; blocked algorithm; heterogeneous computations; speedup.

Introduction

The problem of all-pairs shortest paths (APSP) is fundamental in many domains including social networks, bioinformatics, transportation networks, synthesis of quantum logic circuits, etc. [1; 2]. The classical Floyd – Warshall algorithm (further *FW*) [3; 4] solves this problem. The blocked *FW* (further *BFW*) [5–7], which is

homogeneous, performs a partitioning of the graph into subgraphs of equal size and uses the same block calculation procedure for all blocks of the distance matrix. New APSP algorithms for large clustered graphs were proposed in the works [8; 9]. They combine the classical *FW* and Dijkstra algorithm and utilise bridge-vertices of the clusters to improve performance. The heterogeneous blocked APSP algorithm [10; 11] for non-clustered dense graphs distinguishes four types of blocks, each computed by a separate procedure, but all blocks are of the same size. The homogeneous *BFW*, which can handle subgraphs and blocks of different sizes [12; 13], uses the same universal procedure to calculate the blocks of all types. The blocked APSP algorithm for clustered graphs and unequally sized blocks [14], which uses bridge-vertices to reduce runtime, is homogeneous because it uses a single block calculation procedure. The works [15–22] improve *BFW* while considering aspects such as efficient utilisation of graphics processing units, tuning to optimal block size, using cooperative thread scheduler, reducing power consumption, establishing dataflow networks of actors, etc. In this paper, we present a new heterogeneous blocked algorithm for solving the problem of APSP on large clustered graphs considering bridge-vertices and bridge-edges, unequally sized blocks, separate computation procedures for each block type and algorithm transformation for localising data references.

Homogeneous *BFW*

Let $G = (V, E)$ be a directed simple graph with real edge-weights composed of a set V of N vertices and a set E of edges. A cost adjacency matrix W of G has $w_{i,i} = 0$, $1 \leq i \leq N$, where $w_{i,i}$ is equal to the weight of edge $(i, i) \in E$, and $w_{i,j} = \infty$ if $i \neq j$ and $(i, j) \notin E$. When G has no negative-weight cycle, the dynamic programming *FW* [3; 4] computes a sequence of distance matrices $D^0 = W, \dots, D^k, \dots, D^N$ such that in matrix D^k the shortest path from i to j is composed of the vertex subset $\{1, \dots, k\}$. *FW* calculates the elements of matrix D using the formula

$$d_{i,j}^k = \min(d_{i,j}^{k-1}, d_{i,k'}^{k'} + d_{k',j}^{k''}) \quad (1)$$

and assuming that $d_{i,j}^0 = w_{i,j}$.

Claim 1 [6]. We suppose that $d_{i,j}^k$, $k = 1, \dots, N$, is computed with the formula (1) for $k', k'' \geq k - 1$ and $k', k'' \leq N$, then upon termination *FW* correctly computes APSP.

Algorithm 1 (homogeneous *BFW*) [5; 6; 10–14] divides set V into subsets of equal size S and splits the matrix D into blocks leading to matrix $B[M \times M]$. Initially each block has a zero level of calculation, $B^0[v, u] = W[v, u]$.

Algorithm 1. Homogeneous *BFW*

for $m \leftarrow 1, \dots, M$ **do**

$B^m[m, m] \leftarrow BCal(B^{m-1}[m, m], B^{m-1}[m, m], B^{m-1}[m, m])$ // *D0* block

for $v \in \{1, \dots, M\}$ **and** $v \neq m$ **do**

$B^m[v, m] \leftarrow BCal(B^{m-1}[v, m], B^{m-1}[v, m], B^m[m, m])$ // *C1* block

$B^m[m, v] \leftarrow BCal(B^{m-1}[m, v], B^m[m, m], B^{m-1}[m, v])$ // *C2* block

for $v, u \in \{1, \dots, M\}$ **and** $v \neq m$ **and** $u \neq m$ **do**

$B^m[v, u] \leftarrow BCal(B^{m-1}[v, u], B^m[v, m], B^m[m, u])$ // *P3* block

return B^M .

In each of M iterations of the loop along m , homogeneous *BFW* computes one diagonal *D0* block $B^m[m, m]$ to level m of calculation, computes $M - 1$ vertical *C1* cross-blocks $B^m[v, m]$ to level m , computes $M - 1$ horizontal *C2* cross-blocks $B^m[m, v]$ to level m and computes $(M - 1)^2$ peripheral *P3* blocks $B^m[v, u]$ to level m . All cross-blocks can be calculated mutually in parallel. All peripheral blocks can be calculated in parallel as well. The following claim holds for all the blocks of type *P3* [19; 20].

Claim 2. We suppose that the *P3* block $B^m[v, u]$, $m = 1, \dots, M$, is computed with the formula

$$B^m[v, u] = BCal(B^{m-1}[v, u], B^{m'}[v, m], B^{m''}[m, u])$$

for $m', m'' \geq m$ and $m', m'' \leq M$. Upon termination *BFW* correctly computes APSP in graph G .

At each iteration *BFW* increments the calculation level of each block and fulfills the requirement of claim 2 for the *P3* blocks. Therefore, *BFW* computes APSP correctly.

The block calculation algorithm 2 (*BCal*) implements the classical *FW* and can compute $D0$, $C1$, $C2$ and $P3$ blocks in three loops along k , i and j (loops along i and j can be reordered). Its three input blocks are denoted $B1^0$, $B2^0$ and $B3^0$, respectively. Every execution of the assignment in the nest of loops increases the calculation level of element $B1_{ij}$ from $k-1$ to k . The assignment fulfills the requirement of claim 1; therefore, *BCal* correctly computes $B1$ block over itself, $B2$ and $B3$ blocks. But if we reorder the loop along k with the loop along i or j , the requirement is not fulfilled, and the algorithm becomes incorrect.

Algorithm 2. *BCal* (single calculation of all blocks)

for $k \leftarrow 1, \dots, S$ **do****for** $i, j \in \{1, \dots, S\}$ **do**
$$B1_{i,j}^k \leftarrow \min(B1_{i,j}^{k-1}, B2_{i,k}^{k'} + B3_{k,j}^{k''})$$
return B, P .

Directed weighted sparse graphs consisting of unequally sized clusters

In the paper we call a graph clustered if it can be partitioned into dense subgraphs that are interconnected by a few edges. We call a subgraph dense if its density (the actual number divided by the maximum number of directed edges) is over 0.5. We call a graph sparse if its density is less than 0.3. Figure 1 shows an example directed clustered graph that consists of 17 vertices, 69 edges and 3 clusters including 5, 5 and 7 inner vertices, respectively, and 14, 15 and 31 one-direction-edges, respectively. The clusters have densities of 0.70, 0.75 and 0.74, respectively, and are interconnected by 9 one-direction-edges. The density of the entire graph is 0.25. Let C be the set of all clusters, $C[c].\text{vert}$ be the set of vertices of cluster c and $C[c].\text{size}$ or $\text{size}(c)$ be the vertex set size. All vertices are numbered within the cluster, so $C[c].\text{vert}[v].\text{index} \in \{1, \dots, C[c].\text{size}\}$ is assigned to each $v \in C[c].\text{vert}$.

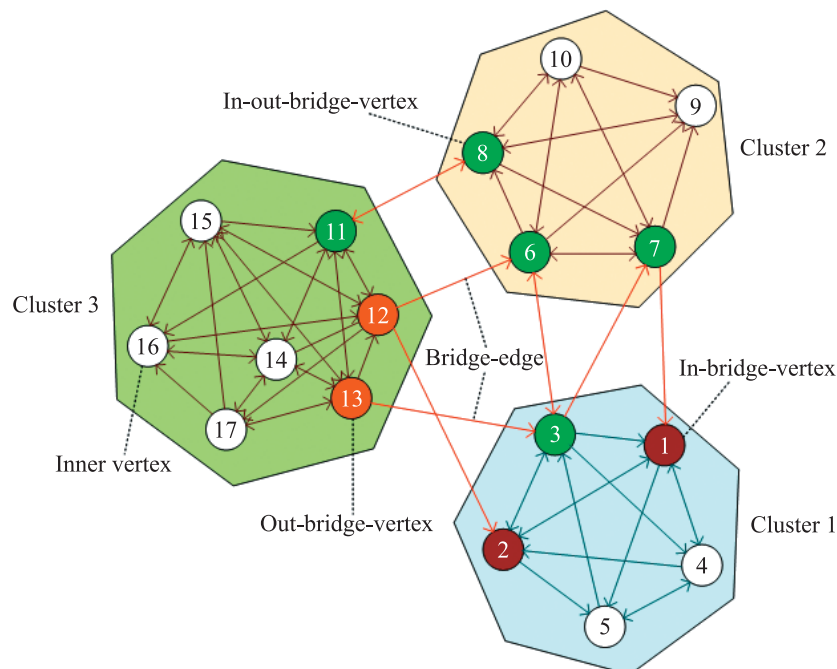


Fig. 1. An example graph consisting of weakly connected clusters

The algorithms we have developed exploit the concept of cluster bridge-vertices. A vertex is a bridge in cluster $c \in C$ if it is incident to an edge, which connects the vertex with a vertex of other cluster $e \in C \setminus \{c\}$. Let $C[c].\text{bridge}$ be the set of bridge-vertices of cluster c such as $C[c].\text{bridge} \subseteq C[c].\text{vert}$. A vertex v is an input bridge in cluster c if it has an incoming incident edge connecting v with other clusters' vertices. Let $C[c].\text{bridge.inall}$ be the set of input bridge-vertices of cluster c such as $C[c].\text{bridge.inall} \subseteq C[c].\text{bridge}$. A vertex v is an output bridge in cluster c if it has an outgoing incident edge connecting v with other clusters' vertices. Let

$C[c].bridge.outall$ be the set of output bridge-vertices of cluster c such as $C[c].bridge.outall \subseteq C[c].bridge$. The set $C[c].bridge.inout$ includes the vertices of cluster c , which are input and output bridges simultaneously: $C[c].bridge.inout = C[c].bridge.inall \cap C[c].bridge.outall$. The set $C[c].bridge.in$ includes the purely input bridge-vertices of cluster c : $C[c].bridge.in = C[c].bridge.inall \setminus [c].bridge.outall$. The set $C[c].bridge.out$ includes purely output bridge-vertices of c : $C[c].bridge.out = [c].bridge.outall \setminus C[c].bridge.inall$. In fig. 1 cluster 1 has two input bridges (vertices 1 and 2) and one output bridge (vertex 3), vertices 4 and 5 are inner. Cluster 2 has three input and output bridges (vertices 6, 7 and 8), vertices 9 and 10 are inner. Cluster 3 has one input and output bridge (vertex 10) and two output bridges (vertices 11 and 12), vertices 13–16 are inner.

Having a partitioning C of graph G into clusters, we create matrix B of blocks of the shortest path distances between the vertices (fig. 2). A block $B[m, m]$ (below denoted $B[m]$) of dimension $C[m].size \times C[m].size$ lies on the principal diagonal of matrix B and describes the shortest path distances between the vertices of cluster m . A block $B[c, e]$ of dimension $C[c].size \times C[e].size$ lies out of the principal diagonal and describes the shortest path distance between the vertices of cluster c and the vertices of cluster e .

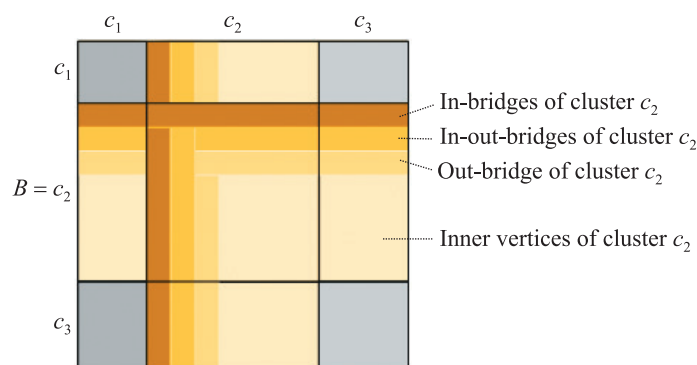


Fig. 2. Layout of distance-adjacency matrix in memory

A block element $B[c, e]_{i,j}$ is identified with indices $i \in \{1, \dots, C[c].size\}$ and $j = \{1, \dots, C[e].size\}$ of vertices in clusters c and e , respectively. Within each block the vertices are placed in the following order: input bridges, input and output bridges, output bridges and other inner vertices of the cluster. This allows us to localise and assign the vertices of the same group in the same memory lines, and to speed up computations with the algorithms we propose.

Heterogeneous blocked APSP algorithm for clustered graphs

In developing the heterogeneous blocked APSP algorithm for clustered graphs upon unequal block sizes and bridge-vertices (algorithm 3 (*HBSPCG*)) we combined the following techniques: handling blocks of unequal sizes, using input and output bridge-vertices of clusters to speed up computation, using a heterogeneous approach to compute four types of blocks and considering all the features of each block type. Its input is a matrix W describing the graph. Its output is matrix B of the shortest path distances between all pairs of vertices. Algorithm 3 describes *HBSPCG* at the level of block computation sub-algorithms. Algorithm 4 (*D0CG*) calculates the shortest path segments between the vertices of one subgraph, algorithm 7 (*C1CG*) and algorithm 8 (*C2CG*) – between the vertices of two subgraphs, and algorithm 9 (*P3CG*) – between the vertices of two subgraphs, provided that the path passes through the vertices of the third subgraph. *HBSPCG* organises the correct recalculation of the shortest path segments, when searching for APSP in the entire graph. At the block level the same control flow scheme is used as in *BFW*. The key difference between the algorithms is that *HBSPCG* uses four separate sub-algorithms for calculating *D0*, *C1*, *C2* and *P3* blocks with different parameter profiles. The structure of matrix B in *HBSPCG* is different from that in *BFW*.

Algorithm 3. *HBSPCG*

```

 $B^0[M \times M] \leftarrow W[N \times N]$ 
for  $m \leftarrow 1, \dots, M$  do
     $B^m[m] \leftarrow D0CG(C, m, B^{m-1}[m])$  // D0 block
    for  $c \in \{1, \dots, M\}$  and  $v \neq m$  do
```

```

 $B^m[c, m] \leftarrow C1CG(B^{m-1}[c, m], B^m[m], C, c, m)$  // C1 block
 $B^m[m, c] \leftarrow C2CG(B^{m-1}[m, c], B^m[m], C, m, c)$  // C2 block
for  $c, e \in \{1, \dots, M\}$  and  $c \neq m$  and  $e \neq m$  do
     $B^m[c, e] \leftarrow P3CG(B^{m-1}[c, e], B^m[c, m], B^m[m, e], C, c, m, e)$  // P3 block
return  $B^M$ .

```

At the control flow level the correctness of *HBSPCG* is ensured in the same way as *BFW*. The computation level of each block, regardless of type, increases at each iteration of the loop along m . The main difference between *HBSPCG* and homogeneous *BFW* is that the former is aimed at saving central processing unit and memory resources, when calculating diagonal, vertical, horizontal and peripheral blocks.

New algorithm for calculating diagonal blocks

All blocks are square on the principal diagonal of B . When recalculating a diagonal block over itself, the bridge-vertices are not considered. *D0CG*, which we propose as a sub-algorithm of *HBSPCG*, uses one cluster m and computes one square block $B[m, m]^0$ (which will also be denoted $B[m]^0$) of dimension $C[m].size \times C[m].size$ from computation level 0 to S . Since the block is computed over itself, the order of computing the elements $B[m]_{i,j}^k$ through elements $B[m]_{i,k}^{k'}$ and $B[m]_{k,j}^{k''}$ along k is crucial. It must satisfy the formula (1). The block describes APSP between the vertices of cluster m , which may pass through the vertices of other clusters. We interpret block $B^0[m]$ as a matrix of edge weights between the vertices of cluster m .

D0CG consists of two nests of loops. The first nest includes three loops along variables k, i and j and three assignments with the min operation. The first two loops along i and j cover $k-1$ vertex of the subgraph of cluster m . The loop along k is repeated over the indices of vertices $C[m].vert$ of cluster m . In *D0CG* three assignments are aimed at updating APSP between vertices i and j , between vertices i and k , and between vertices k and j over new paths of shorter length. The second nest consists of two loops along i and j . Finally, it computes the shortest path between vertices $1, \dots, S-1$ through the row and column labeled by S in the matrix $B[m]$. We developed *D0CG* as a competing alternative to *BCal*.

Algorithm 4. *D0CG* (calculation of the diagonal square block $B[m]$)

```

 $S \leftarrow C[m].size$ 
for  $k \leftarrow 2, \dots, S$  do
    for  $i \leftarrow 1, \dots, k-1$  do
        for  $j \leftarrow 1, \dots, k-1$  do
             $B[m]_{i,j}^{k-1} \leftarrow \min(B[m]_{i,j}^{k-2}, B[m]_{i,k-1}^{k-1} + B[m]_{k-1,j}^{k-1})$  //  $\Omega_{k-1}$ 
             $B[m]_{i,k}^{j+1} \leftarrow \min(B[m]_{i,k}^j, B[m]_{i,j}^{k-1} + B[m]_{j,k}^0)$  //  $\Lambda_k$ 
             $B[m]_{k,j}^{i+1} \leftarrow \min(B[m]_{k,j}^i, B[m]_{k,i}^0 + B[m]_{i,j}^{k-1})$  //  $\Lambda_k$ 
        for  $i \leftarrow 1, \dots, S-1$  do
            for  $j \leftarrow 1, \dots, S-1$  do
                 $B[m]_{i,j}^S \leftarrow \min(B[m]_{i,j}^{S-1}, B[m]_{i,S}^S + B[m]_{S,j}^S)$  //  $\Omega_S$ 
    return  $B[m]^S$ .

```

Theorem 1. Upon termination *D0CG* correctly computes the diagonal block $B[m]^S$ over $B[m]^0$, which represents the shortest path lengths between all vertices of cluster m , possibly passing through vertices of other clusters of graph G .

Proof. *D0CG* does not consider the bridge-vertices of cluster m because it computes the block $B[m]$ over itself. The competitive algorithm *BCal* recomputes each element of the block $B[m]$ at each iteration of the loop along k . Unlike *BCal*, *D0CG* starts with a one-vertex graph and a block $B[m]^1$ of dimension 1×1 . It then iteratively adds one row k and one column k to block $B[m]^{k-1}$ and obtains block $B[m]^k$. The procedure is

illustrated in fig. 3, *a*. In this figure $B[m]^0$ denotes input block $B[m]$ of dimension $S \times S$ before executing *D0CG*. Variable b_{ij} denotes an element of the matrix $B[m]$.

Two operations Λ_k and Ω_k are used to accomplish the procedure. The first operation Λ_k computes APSP that are represented by column k and row k of block $B[m]^k$ and are computed over APSP of subblock $B[m]^{k-1}$. Column k is computed by the following equation:

$$B[m]_{ik}^{j+1} = \min\left(B[m]_{ik}^j, B[m]_{ij}^{k-1} + B[m]_{jk}^0\right) \text{ for } i, j = 1, \dots, k-1. \quad (2)$$

Row k is computed according to equation

$$B[m]_{kj}^{i+1} = \min\left(B[m]_{kj}^i, B[m]_{ki}^0 + B[m]_{ij}^{k-1}\right) \text{ for } i, j = 1, \dots, k-1. \quad (3)$$

It should be noted that claim 1 does not apply to items (2) and (3). The second operation Ω_k calculates all elements of subblock $B[m]^{k-1}$ over row k and column k of computation level k , obtaining a block $B[m]^k$ of APSP in the subgraph on k vertices of cluster m . It uses the following formula to perform the calculation:

$$B[m]_{ij}^k = \min\left(B[m]_{ij}^{k-1}, B[m]_{ik}^k + B[m]_{kj}^k\right) \text{ for } i, j = 1, \dots, k-1.$$

We can describe the behaviour of *D0CG* as the sequence of pairs (Λ_k, Ω_k) of operations:

$$(\Lambda_1, \Omega_1), (\Lambda_2, \Omega_2), \dots, (\Lambda_k, \Omega_k), \dots, (\Lambda_S, \Omega_S). \quad (4)$$

Algorithm 5 displays the corresponding pseudocode. The loop along k represents sequence (4), in its body the first nest of loops along i and j is the operation Λ_k , and the second nest of loops over i and j is the operation Ω_k . The operations Λ_1 and Ω_1 do not change the block $B[m]^1$ compared to $B[m]^0$, so they are omitted, and we start with $k = 2$. The calculation levels of elements $B[m]_{i,j}$, $B[m]_{i,k}$ and $B[m]_{k,j}$ in the operation Ω_k of algorithm 5 satisfy claim 2, so the elements $B[m]_{i,j}$ are calculated correctly. The operation Λ_k correctly computes the elements $B[m]_{i,k}$ and $B[m]_{k,j}$ from level 0 to level k . We can conclude that algorithm 5 is correct.

Algorithm 5. Recurrent procedure *D0CG* for calculating diagonal block

$S \leftarrow C[m].\text{size}$

for $k \leftarrow 2$ **to** S **do**

for $i \leftarrow 1, \dots, k-1$ **do**

for $j \leftarrow 1, \dots, k-1$ **do**

$$B[m]_{i,k}^{j+1} \leftarrow \min\left(B[m]_{i,k}^j, B[m]_{i,j}^{k-1} + B[m]_{j,k}^0\right) \quad // \Lambda_k$$

$$B[m]_{k,j}^{i+1} \leftarrow \min\left(B[m]_{k,j}^i, B[m]_{k,i}^0 + B[m]_{i,j}^{k-1}\right) \quad // \Lambda_k$$

for $i \leftarrow 1, \dots, k-1$ **do**

for $j \leftarrow 1, \dots, k-1$ **do**

$$B[m]_{i,j}^k \leftarrow \min\left(B[m]_{i,j}^{k-1}, B[m]_{i,k}^k + B[m]_{k,j}^k\right) \quad // \Omega_k$$

return $B[m]^S$.

Two nests of loops along i and j cannot be combined into a single nest of loops due to data dependencies: element $B[m]_{i,j}$ cannot be modified while it is used to modify all elements $B[m]_{i,k}$ and $B[m]_{k,j}$. To overcome this obstacle, we resynchronise (fig. 3, *b*) sequence (4) with the following sequence of pairs $(\Omega_{k-1}, \Lambda_k)$:

$$\Lambda_1, (\Omega_1, \Lambda_2), (\Omega_2, \Lambda_3), \dots, (\Omega_{k-1}, \Lambda_k), \dots, (\Omega_{S-1}, \Lambda_S), \Omega_S.$$

Now we can rewrite algorithm 5 to algorithm 6. The loop along k includes two nests of loops along i and j , which have the same iteration schemes. The first nest performs the operation Ω_{k-1} , and recalculates all elements of the subblock $B[m]^{k-1}$. The second nest performs the operation Λ_k and calculates column k and row k in the block $B[m]^k$. The two nests of loops can be merged, since $B[m]_{i,j}^{k-1}$ will not change due to the calculation of $B[m]_{i,k}^k$ and $B[m]_{k,j}^k$, and vice versa. As a result, we have obtained *D0CG*. The theorem is proved.

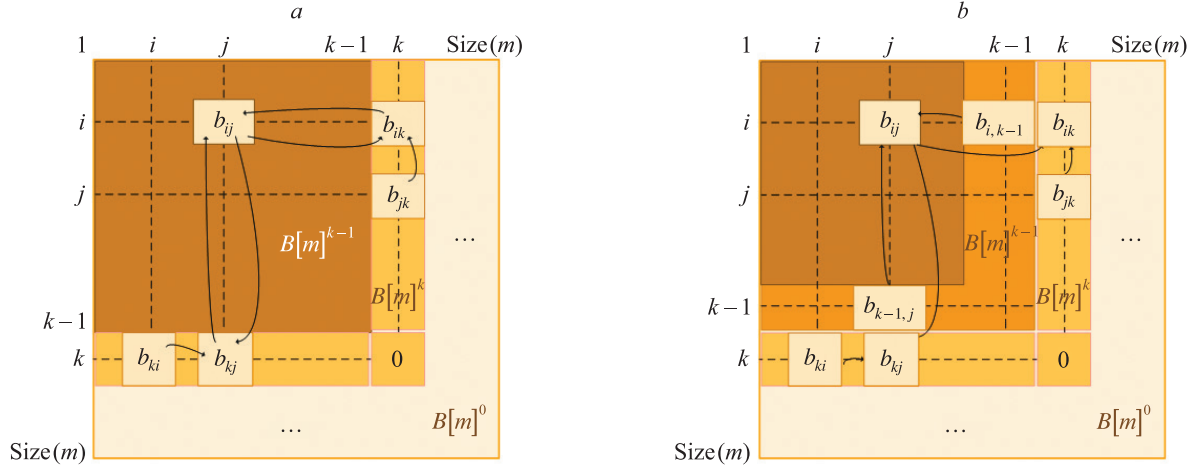


Fig. 3. Iterating the diagonal block $B[m]$ along calculation level k in $D0CG$:
a – adding vertex k to cluster m ; b – resynchronised process of adding vertices

Competitive $BCal$ and $D0CG$ have different iteration schemes. The total number of iterations of the innermost loop of $BCal$ is S^3 . The total number of iterations of the innermost loop of $D0CG$ is $\frac{6}{2 + 3(\text{size}(m))^{-1} + (\text{size}(m)^2)^{-1}}$ times smaller than that of $BCal$. It tends to be 3, when $\text{size}(m) \rightarrow \infty$. $BCal$ has $\text{size}(m)^2$ element accesses at each iteration of the loop along k . $D0CG$ has k^2 accesses for $k = 1, \dots, \text{size}(m)$. Moreover, the element $B[m]_{i,j}$ is common to three assignments. In terms of data reference locality, $D0CG$ outperforms $BCal$ by up to 3 times. We further transform $D0CG$ to incorporate vectorisation and parallelisation mechanisms.

Algorithm 6. Resynchronised $D0CG$

```

 $S \leftarrow C[m].\text{size}$ 
for  $k \leftarrow 2$  to  $S$  do
  for  $i \leftarrow 1, \dots, k-1$  do
    for  $j \leftarrow 1, \dots, k-1$  do
       $B[m]_{i,j}^{k-1} \leftarrow \min(B[m]_{i,j}^{k-2}, B[m]_{i,k-1}^{k-1} + B[m]_{k-1,j}^{k-1})$  //  $\Omega_{k-1}$ 
    for  $i \leftarrow 1, \dots, k-1$  do
      for  $j \leftarrow 1, \dots, k-1$  do
         $B[m]_{i,k}^{j+1} \leftarrow \min(B[m]_{i,k}^j, B[m]_{i,j}^{k-1} + B[m]_{j,k}^0)$  //  $\Lambda_k$ 
         $B[m]_{k,j}^{i+1} \leftarrow \min(B[m]_{k,j}^i, B[m]_{k,i}^0 + B[m]_{i,j}^{k-1})$  //  $\Lambda_k$ 
  for  $i \leftarrow 1, \dots, S-1$  do
    for  $j \leftarrow 1, \dots, S-1$  do
       $B[m]_{i,j}^S \leftarrow \min(B[m]_{i,j}^{S-1}, B[m]_{i,S}^S + B[m]_{S,j}^S)$  //  $\Omega_S$ 
return  $B[m]$ .

```

New algorithm for calculating vertical cross-blocks

$C1CG$ computes APSP from the nodes of cluster c to the nodes of cluster m and changes the vertical cross-block $B1 = B[c, m]$ of dimension $\text{size}(c) \times \text{size}(m)$ through diagonal block $B3 = B[m]$ of dimension $\text{size}(m) \times \text{size}(m)$. In this paper we assume that the block sizes are not equal and use the bridge-vertices of cluster m to speed up the computation of APSP. $C1CG$ is a generalisation of $BCal$ for vertical cross-blocks describing APSP in clustered directed graphs. It considers two clusters c and m and has two entries: a vertical crossing block $B[c, m]$ and a diagonal block $B[m]$. It returns the modified block $B[c, m]$.

Theorem 2. Upon termination *C1CG* correctly computes the vertical cross-block $B[c, m]$ over the diagonal block $B[m]$, which describes APSP distances from the vertices of cluster c to the vertices of cluster m that pass through the input bridge-vertices of m .

Proof. The blocks $B[c, m]$ and $B[m]$ have different dimensions: $\text{size}(c) \times \text{size}(m)$ and $\text{size}(m) \times \text{size}(m)$, respectively. The differences do not affect the fundamentals [12] of the shortest path calculation method (*BCal*) and the execution of min-plus operations on matrices. Therefore, *C1CG* is valid with respect to unequal block sizes.

The algorithm recalculates only one of the two blocks, i. e. $B[c, m]$ and thus relaxes the requirements of claim 1 to the ordering of the calculation levels of its elements. Therefore, it satisfies claim 1 in advance and is correct from this point of view. As a result, three loops along k, i and j can be reordered arbitrarily.

Algorithm 7. *C1CG* (calculation of vertical cross-block upon bridges and unequal block sizes)

for $i \leftarrow 1$ **to** $C[c].\text{size}$ **do**

for $v \in C[m].\text{bridge.inall}$ **and** $k = C[m].\text{vert}[v].\text{index}$ **do**

for $j \leftarrow 1$ **to** $C[m].\text{size}$ **do**

$B[c, m]_{i,j} \leftarrow \min(B[c, m]_{i,j}, B[c, m]_{i,k} + B[m]_{k,j})$

return $B[c, m]$.

Now we prove that any shortest path from vertex i of cluster c to vertex j of cluster m passes through an input bridge-vertex k of cluster m . We assume that APSP between the inner vertices of cluster m have been already calculated. For the shortest path between i and j 2 cases are possible (fig. 4).

1. The path $p = (i, \dots, k, \dots, j)$ passes through vertices of the cluster c , then passes through the input bridge-vertex k and other vertices of cluster m , and finally reaches vertex j .

2. The path $p = (i, \dots, w, \dots, k, \dots, j)$ passes through vertices of cluster c , then passes through vertices w of cluster x and possibly through other vertices of other clusters, then through an input bridge-vertex k of cluster m , and finally reaches the vertex j .

In both cases any shortest path between i and j passes through one of the input bridge-vertices of cluster m . That is why for loop along k in *C1CG* it is sufficient to traverse only the input bridge-vertices of cluster m . The theorem is proved.

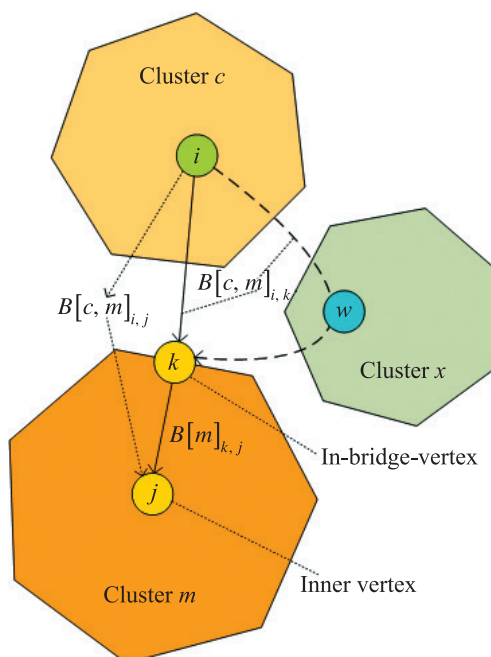


Fig. 4. Calculation of vertical cross-block through diagonal block (illustration of proof of theorem 2)

Corollary 1. *If cluster m has no input bridge-vertices, C1CG does not change the vertical cross-blocks $B[c, m]$ in column m of matrix B and hence is not applied to the column.*

C1CG gives a speedup in the computation of the vertical cross-blocks compared to the homogeneous blocked algorithm [14] depending on the share of the input bridge-vertices in the total number of bridge-vertices in cluster m .

New algorithm for calculating horizontal cross-blocks

C2CG computes APSP connecting vertices of cluster m with vertices of cluster c . It modifies a horizontal rectangular cross-block $B[m, c]$ of dimension $\text{size}(m) \times \text{size}(c)$ through the diagonal square block $B[m]$ of dimension $\text{size}(m) \times \text{size}(m)$. C2CG is a generalisation of BCal for horizontal cross-blocks describing shortest path segments in clustered directed graphs. It uses the output bridge-vertices of cluster m to speed up the shortest path computation.

Algorithm 8. C2CG (calculation of horizontal cross-block upon bridges and unequal block sizes)

```

for  $i \leftarrow 1$  to  $C[m].\text{size}$  do
  for  $v \in C[m].\text{bridge.outall}$  and  $k = C[m].\text{vert}[v].\text{index}$  do
    for  $j \leftarrow 1$  to  $C[c].\text{size}$  do
       $B[m, c]_{i, j} \leftarrow \min(B[m, c]_{i, j}, B[m]_{i, k} + B[m, c]_{k, j})$ 
return  $B[m, c]$ .
  
```

Theorem 3. *Upon termination C2CG correctly computes horizontal cross-block $B[m, c]$ through diagonal block $B[m]$, which describes APSP distances from vertices of cluster m to vertices of cluster c that pass through the output bridge-vertices of m .*

Proof. Although the blocks $B[m, c]$ and $B[m]$ have different sizes [12], these differences do not affect the correctness of the shortest path calculation method and min-plus operations on matrices as it is done for BCal. Therefore, C2CG is correct from this point of view.

The algorithm relaxes the requirements of claim 1 for the order of the matrix element calculation levels, since it recalculates only one block $B[c, m]$ and does not change other block $B[m]$ at the same time. Therefore, it correctly computes $B[c, m]$ for any order of three loops along variables i, k and j .

Now we suppose that APSP between the inner vertices of cluster c and between the inner vertices of cluster m have been already calculated. At this assumption, we prove that any shortest path from vertex i of cluster m to vertex j of cluster c passes through an output bridge-vertex k of cluster m . For the shortest path between i and j 2 cases are possible (fig. 5).

1. The path $p = (i, \dots, k, \dots, j)$ passes through vertices of cluster m including an output bridge-vertex k , then passes through vertices of cluster c , and finally reaches vertex j of the cluster.
2. The path $p = (i, \dots, k, \dots, w, \dots, j)$ passes through vertices of cluster m including the output bridge-vertex k , then passes through one or more vertices w of cluster x and may be other vertices of other clusters, then passes through vertices of cluster c , and finally reaches vertex j of the cluster.

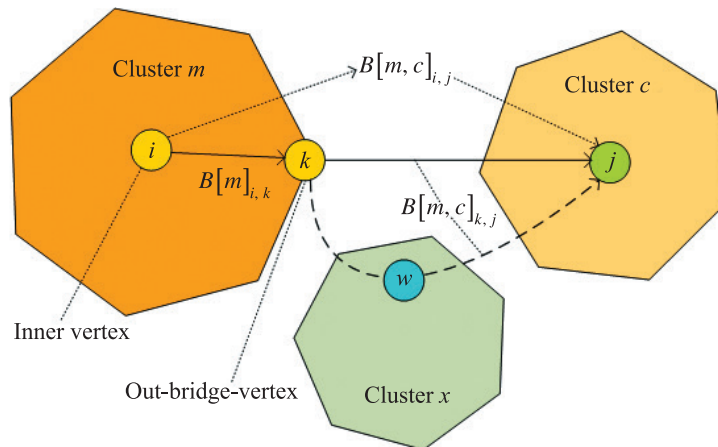


Fig. 5. Calculation of horizontal cross-block through diagonal block (illustration of proof of theorem 3)

In both cases any shortest path between i and j passes through one of the output bridge-vertices of cluster m . This is why for the iteration scheme of the loop along k in *C2CG* it is sufficient to traverse only the output bridge-vertices of cluster m . The theorem is proved.

Corollary 2. *If a cluster m has no output bridge-vertices, C2CG does not change the horizontal cross-blocks $B[m, c]$ in row m of matrix B and hence is not applied to the row.*

C2CG provides the speedup in computation of the horizontal cross-blocks in comparison to the homogeneous blocked algorithm [14] depending on the share of the output bridge-vertices in the total number of bridge-vertices in cluster m .

New algorithm for calculating peripheral blocks

P3CG computes shortest-path segments. The segments connect vertices of cluster c with vertices of cluster e , passing through vertices of cluster m . The algorithm modifies a rectangular block $B[c, e]$ of dimension $\text{size}(c) \times \text{size}(e)$ using two rectangular blocks $B[c, m]$ and $B[m, e]$ of the dimension $C[c].\text{size} \times C[m].\text{size}$ and $C[m].\text{size} \times C[e].\text{size}$, respectively. *P3CG* is a generalisation of *FW* for clustered directed graphs. It uses the input or output bridge-vertices of cluster m to speed up the computations.

The algorithm consists of three nested loops along variables i , k and j and includes one assignment statement. The loops along i and j traverse all vertices of clusters c and e , respectively. The loop along k traverses the vertices of cluster m that belong to the subset $C[m].\text{bridge.best}$. The subset is one of two vertex subsets that has the minimum size: $C[m].\text{bridge.best} = C[m].\text{bridge.inall}$ if $|C[m].\text{bridge.inall}| = |C[m].\text{bridge.outall}|$, and $C[m].\text{bridge.best} = C[m].\text{bridge.outall}$, otherwise.

Algorithm 9. *P3CG* (calculation of peripheral rectangular block upon bridges and unequal block sizes)

```

for  $i \leftarrow 1$  to  $C[c].\text{size}$  do
    for  $v \in C[m].\text{bridge.best}$  and  $k \leftarrow C[m].\text{vert}[v].\text{index}$  do
        for  $j \leftarrow 1$  to  $C[e].\text{size}$  do
             $B[c, e]_{i,j} \leftarrow \min(B[c, e]_{i,j}, B[c, m]_{i,k} + B[m, e]_{k,j})$ 
return  $B[c, e]$ .
```

Theorem 4. *Upon termination P3CG correctly computes block $B[c, e]$ over blocks $B[c, m]$ and $B[m, e]$, which describe the shortest path segments from the vertices of cluster c to the vertices of cluster e that pass through the best bridge-vertices of cluster m .*

Proof. Although, unlike *BCal*, the input blocks $B[c, e]$, $B[c, m]$ and $B[m, e]$ have different sizes in *P3CG*, the differences do not affect the shortest path calculation technique [12] and min-plus operations on matrices as is done in *BCal*. Therefore, *P3CG* is correct regarding different block sizes, since *BCal* is proven to be correct.

The algorithm relaxes the requirements of claim 1 for the order of the calculation levels of the distance matrix elements, since it recalculates only the elements of one block $B[c, e]$ and does not simultaneously change the elements of the other two blocks $B[c, m]$ and $B[m, e]$. Therefore, it correctly computes the block $B[c, e]$ with respect to the calculation levels for any reordering of three loops along variables i , k and j .

Now we prove that any shortest path $p = (i, \dots, k, \dots, j)$, where $i \in C[c].\text{vert}$, $k \in C[m].\text{vert}$ and $j \in C[e].\text{vert}$, includes the input bridge-vertex of cluster m . As shown in fig. 6, there are 4 cases of the shortest path passing through three clusters.

1. The straight path through clusters c , m and e is $p = (i, \dots, k, \dots, j)$. This means that the path starting from i passes through the vertices of cluster c , enters cluster m through the input bridge-vertex k , exits cluster m through one of the output bridge-vertices, and finally goes to vertex j of cluster e .

2. The path is $p = (i, \dots, w, \dots, k, \dots, j)$, where $w \in C[x].\text{vert}$, and x is a cluster other than c , m and e . The path goes from i through vertices of cluster c , goes through vertices w of cluster x (might be several clusters), enters cluster m through vertex k , exits it through an output bridge-vertex, and finally passes through vertices of cluster e to vertex j .

3. The path is $p = (i, \dots, k, \dots, z, \dots, j)$, where $z \in C[y].\text{vert}$, and y is a cluster other than c , m and e . The path goes from i through vertices of cluster c , enters cluster m through vertex k , exits it through an output bridge-vertex, passes through vertices z of cluster y (there may be several clusters), and finally goes through vertices of cluster e to vertex j .

4. The path is $p = (i, \dots, w, \dots, k, \dots, z, \dots, j)$, where w and z are vertices of clusters other than c , m and e . The path goes from i through vertices of cluster c , passes through vertices w of cluster x (there may be several

clusters), enters cluster m through vertex k , exits it through an output bridge-vertex, passes through vertices z of cluster y (there may be several clusters), and finally passes through vertices of cluster e to vertex j .

Having considered these 4 cases, we can conclude that no path from i to j that does not pass through an input bridge-vertex of cluster m . Therefore, all iterations of loop along k in $P3CG$ may correspond to the input bridge-vertices of cluster m .

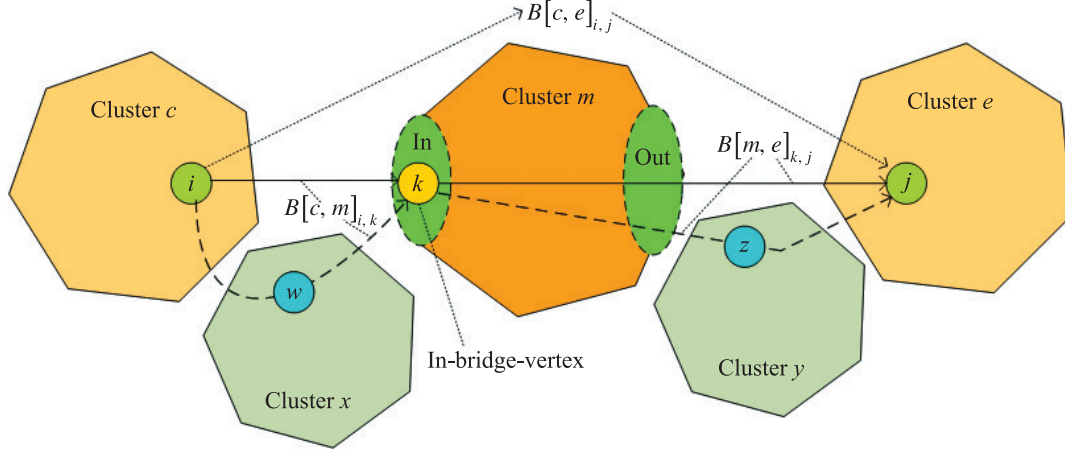


Fig. 6. Calculation of peripheral block over two cross-blocks through input bridge-vertices of cluster m (illustration of proof of theorem 4)

Similarly (fig. 7), it can be proved that any shortest path $p = (i, \dots, k, \dots, j)$, where $i \in C[c].\text{vert}$, $k \in C[m].\text{vert}$ and $j \in C[e].\text{vert}$, includes an output bridge-vertex of cluster m . This means that the iterations of loop along k in $P3CG$ can correspond to the output bridge-vertices of cluster m . We have two alternatives for the loop iteration scheme. To speed up the computations, we choose the subset $C[m].\text{bridge.best}$ that has the smallest size. The theorem is proven.

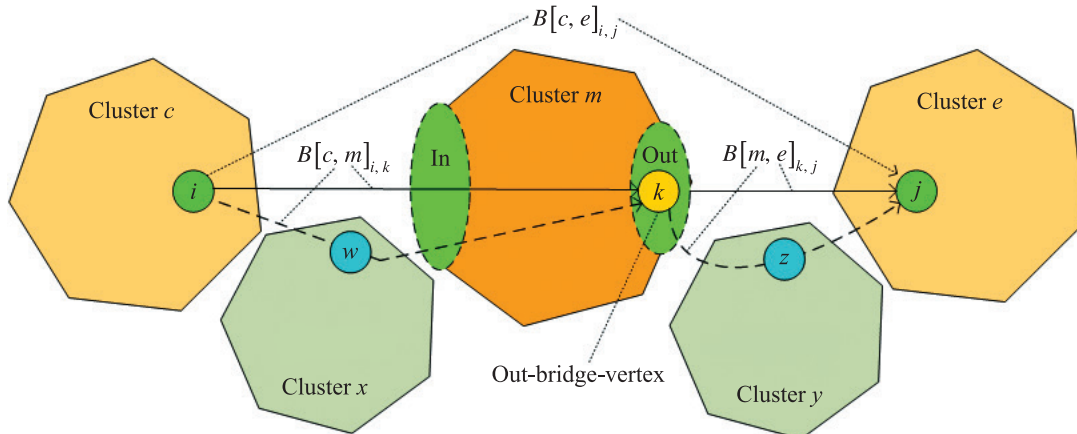


Fig. 7. Calculation of peripheral block over two cross-blocks through output bridge-vertices of cluster m (illustration of proof of theorem 4)

Corollary 3. *If cluster m has no input or output bridge-vertices, $P3CG$ does not change the peripheral blocks $B[c, e]$, $c, e \in \{1, \dots, M\}$, $c \neq m$ and $e \neq m$, of matrix B and therefore is not applied to all the peripheral blocks.*

The smaller the number of bridge-vertices in $C[m].\text{bridge.best}$ than the less central processing unit time the $P3CG$ consumes.

Experimental results and comparison of algorithms and their implementations

We developed in C++ language and used two versions (single-threaded and multi-threaded OpenMP (version 4.5)) of implementations of the proposed $HBSPCG$ and, for comparison, implementations of previously known algorithms. The source code was compiled by GNU Compiler Collection (version 14.2.0) with auto-vectorisation

enabled. The paper presents the results of experiments performed on two computers: MacBook M1 Max and server consisting of two Intel Xeon E5-2620v4 processors (each has 8 cores and 16 physical threads).

The article describes experiments conducted on four random directed simple weighted graphs decomposed into dense weakly connected clusters of different sizes (table 1). Judging by the number of edges in the graphs and the number of edges between clusters, all clusters are dense subgraphs. The edge density in all four graphs was in the range of 0.003 55–0.012 51, meaning that all graphs were sparse.

Table 1

A sample of four random sparse graphs consisting of tens of dense clusters

Number of graph	Vertices	Clusters	Edges	Density	Bridge-vertices	Bridge-edges
1	4800	20	288 245	0.012 51	567	621
2	4800	41	153 858	0.006 68	620	687
3	9600	40	644 198	0.006 99	3452	2374
4	9600	80	326 779	0.003 55	3550	2505

Table 2 shows results obtained on MacBook M1 Max. In case of single-threaded implementations the speedup of the proposed heterogeneous blocked algorithm *HBSPCG* (clustered graph, bridge-vertices) compared to the known homogeneous blocked algorithm *BSPCG* [14] (clustered graph, bridge-vertices) is of 1.62–1.94 times. In case multi-threaded OpenMP implementations the speedup is 1.87–1.97 times.

Table 2

Runtimes of algorithms *BSPCG* and *HBSPCG* on MacBook M1 Max

Number of graph	Single-threaded implementations			Multi-threaded OpenMP implementations		
	<i>BSPCG</i> , s	<i>HBSPCG</i> , s	Speedup of <i>HBSPCG</i> over <i>BSPCG</i> , times	<i>BSPCG</i> , s	<i>HBSPCG</i> , s	Speedup of <i>HBSPCG</i> over <i>BSPCG</i> , times
1	3.21	1.65	1.94	0.69	0.35	1.97
2	2.70	1.66	1.62	0.48	0.26	1.88
3	37.30	19.52	1.91	5.54	2.87	1.93
4	34.84	21.15	1.65	5.31	2.84	1.87

The results obtained on the server are shown in the table 3. *HBSPCG* outperformed *BSPCG* by 1.58–1.66 times for single-threaded implementations and by 1.29–1.64 times for multi-threaded OpenMP implementations. Table 3 also provides a comparison of *HBSPCG* with the classical *BFW* with equal block sizes. The speedup of *HBSPCG* over *BFW* was in the range of 4.17–8.18 for single-threaded implementations and 3.91–6.36 for multi-threaded OpenMP implementations.

Table 3

Comparison of *BSPCG*, *HBSPCG* and *BFW* on server with two Intel Xeon E5-2620v4 processors

Number of graph	Single-threaded implementations				Multi-threaded OpenMP implementations			
	<i>BSPCG</i> , s	<i>HBSPCG</i> , s	Speedup of <i>HBSPCG</i> over <i>BSPCG</i> , times	Speedup of <i>HBSPCG</i> over <i>BFW</i> , times	<i>BSPCG</i> , s	<i>HBSPCG</i> , s	Speedup of <i>HBSPCG</i> over <i>BSPCG</i> , times	Speedup of <i>HBSPCG</i> over <i>BFW</i> , times
1	11.07	6.28	1.76	8.18	0.91	0.57	1.59	6.36
2	11.18	6.82	1.64	7.24	1.05	0.82	1.29	4.13
3	148.08	89.06	1.66	4.59	9.62	5.86	1.64	4.52
4	149.95	94.90	1.58	4.17	10.50	6.48	1.62	3.91

Conclusions

The *FW* family of algorithms, which solve the problem of APSP has cubic time complexity and quadratic memory complexity regardless of the number of edges in the graph that creates obstacles for processing real large graphs on multi-processor systems. The goal of the *BFW* is to provide parallelism and efficient use of

the hierarchical processor memory. It is most efficient on dense graphs and has losses on sparse graphs. Many works and publications are devoted to achievements in the field of reducing the computational resources consumed by the blocked algorithm. In the paper we propose a heterogeneous version of such an algorithm that considers the features of large clustered directed weighted graphs, which are divided into dense clusters of different sizes, weakly connected by bridge-vertices and bridge-edges. The algorithm distinguishes four types of blocks and exploits their unique features in a separate procedure for each block to speed up the computation of APSP and improve the locality of references to data. This allowed us to reduce the runtime by approximately twice on the MacBook M1 Max computer compared to the well-known homogeneous *BFW* on the clustered graphs and to reduce the runtime up to eight times on the server compared to the classical *BFW* with equal block sizes.

References

1. Madkour A, Aref WG, Rehman F, Rahman MA, Basalamah SM. Survey of shortest-path algorithms. arXiv:1705.02044v1 [Preprint]. 2017 [cited 2025 May 2]: [26 p.]. Available from: <https://arxiv.org/abs/1705.02044>.
2. Prihozhy AA. Synthesis of quantum circuits based on incompletely specified functions and *if*-decision diagrams. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2021;3:84–97. DOI: 10.33581/2520-6508-2021-3-84-97.
3. Floyd RW. Algorithm 97: shortest path. *Communications of the ACM*. 1962;5(6):345. DOI: 10.1145/367766.368168.
4. Warshall S. A theorem on boolean matrices. *Journal of the ACM*. 1962;9(1):11–12. DOI: 10.1145/321105.321107.
5. Venkataraman GA, Sahni S, Mukhopadhyaya S. A blocked all-pairs shortest-paths algorithm. *Journal of Experimental Algorithms*. 2003;8:857–874. DOI: 10.1145/996546.996553.
6. Park J-S, Penner M, Prasanna VK. Optimizing graph algorithms for improved cache performance. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*. 2004;15(9):769–782. DOI: 10.1109/TPDS.2004.44.
7. Лиходед НА, Сипейко ДС. Обобщенный блочный алгоритм Флойда – Уоршелла. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2019;3:84–92. DOI: 10.33581/2520-6508-2019-3-84-92.
8. Djidjev H, Chapuis G, Andonov R, Thulasidasan S, Lavenier D. All-pairs shortest path algorithms for planar graph for GPU-accelerated clusters. *Journal of Parallel and Distributed Computing*. 2015;85:91–103. DOI: 10.1016/j.jpdc.2015.06.008ff.
9. Yang S, Liu X, Wang Y, He X, Tan G. Fast all-pairs shortest paths algorithm in large sparse graph. In: Association for Computing Machinery. *ICS'23. Proceedings of the 37th International conference on supercomputing; 2023 June 21–23; Orlando, USA*. New York: Association for Computing Machinery; 2023. p. 277–288. DOI: 10.1145/3577193.3593728.
10. Прихожий АА, Карасик ОН. Разнородный блочный алгоритм поиска кратчайших путей между всеми парами вершин графа. *Системный анализ и прикладная информатика*. 2017;3:68–75. EDN: ZWMSYN.
11. Prihozhy AA, Karasik ON. Advanced heterogeneous block-parallel all-pairs shortest path algorithm. *Proceedings of BSTU. Issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*. 2023;1:77–83. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-266-1-13.
12. Prihozhy AA, Karasik ON. New blocked all-pairs shortest paths algorithms operating on blocks of unequal sizes. *System Analysis and Applied Information Science*. 2023;(4):4–13. DOI: 10.21122/2309-4923-2023-4-4-13.
13. Prihozhy AA, Karasik ON. Blocked algorithm of shortest paths search in sparse graphs partitioned into unequally sized clusters. In: Bogush VA, Dik SK, Likhachevskii DV, Kazak TV, Piskun GA, editors. *Big data and high-level analysis. Collection of scientific articles of the 10th International scientific and practical conference; 2024 March 13; Minsk, Belarus*. Minsk: Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics; 2024. p. 262–271. EDN: FSMHWS.
14. Karasik ON, Prihozhy AA. Blocked algorithm of finding all-pairs shortest paths in graphs divided into weakly connected clusters. *System Analysis and Applied Information Science*. 2024;2:4–10. DOI: 10.21122/2309-4923-2024-2-4-10.
15. Carlson T, Wong G. Optimization of the Floyd – Warshall shortest path algorithm. In: Arabnia HR, Deligiannidis L, Amirian S, Ghareh Mohammadi F, Shenavarmasouleh F, editors. *Foundations of computer science and frontiers in education: computer science and computer engineering. Proceedings of the 20th International conference on foundations of computer science and 20th International conference on frontiers in education; 2024 July 22–25; Las Vegas, USA*. Las Vegas: Springer; 2025. p. 84–90 (Communications in computer and information science; volume 2261).
16. Sangeetha DP, Sekar S, Parvathy PR, GaneshBabu SRTR, Muthulekshmi M. Optimizing shortest paths in big data using the Floyd – Warshall algorithm. In: GL BAJAJ Group of Institutions. *Proceedings of the International conference on intelligent control, computing and communications; 2025 February 13–14; Mathura, India*. [S. l.]: IEEE; 2025. p. 382–387. DOI: 10.1109/IC363308.2025.10957179.
17. Liu G. Solving the all pairs shortest path problem after minor update of a large dense graph. arXiv:2412.15122v6 [Preprint]. 2025 [cited 2025 November 16]: [10 p.]. Available from: <https://arxiv.org/pdf/2412.15122>.
18. Kumar S, Karthik S, Srilakshmi S, Dharun Vignesh P. Performance analysis of Floyd – Warshall algorithm: sequential and parallel execution using intel oneAPI. In: RVS Technical Campus. *Proceedings of the 8th International conference on electronics, communication and aerospace technology; 2024 August 6; Coimbatore, India*. [S. l.]: IEEE; 2024. p. 205–211. DOI: 10.1109/ICECA63461.2024.10800787.
19. Карасик ОН, Прихожий АА. Поточковый блочно-параллельный алгоритм поиска кратчайших путей на графе. *Доклады Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники*. 2018;2:77–84. EDN: YVOTCR.
20. Prihozhy AA. Generation of shortest path search dataflow networks of actors for parallel multi-core implementation. *Informatics*. 2023;20(2):65–84. DOI: 10.37661/1816-0301-2023-20-2-65-84.
21. Karasik ON, Prihozhy AA. Tuning block-parallel all-pairs shortest path algorithm for efficient multi-core implementation. *System Analysis and Applied Information Science*. 2022;3:57–65. DOI: 10.21122/2309-4923-2022-3-57-65.
22. Prihozhy AA, Karasik ON. Influence of shortest path algorithms on energy consumption of multi-core processors. *System Analysis and Applied Information Science*. 2023;2:4–12. DOI: 10.21122/2309-4923-2023-2-4-12.

Received 10.05.2025 / revised 25.08.2025 / accepted 19.11.2025.

МЕТОДОЛОГИЯ АНАЛИЗА УГРОЗ ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЦИФРОВЫХ ДВОЙНИКОВ

И. В. КОТЕНКО¹⁾, И. Б. САЕНКО¹⁾, Е. С. МИТЯКОВ²⁾ В. П. КОЧИН³⁾

¹⁾Санкт-Петербургский федеральный исследовательский центр РАН,

14-я линия Васильевского острова, 39, 199178, г. Санкт-Петербург, Россия

²⁾МИРЭА – Российский технологический университет, пр. Вернадского, 78, 119454, г. Москва, Россия

³⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Аннотация. Приводится методология анализа угроз информационной безопасности киберфизических систем на основе цифровых двойников. Предлагаемый подход предусматривает формализацию системы и пространства угроз через многосрезовую структуру, включающую технический, процессный, функциональный, организационный и отраслевой срезы. Далее осуществляется динамическое моделирование угроз в безопасной виртуальной среде цифрового двойника, что позволяет воспроизводить сценарии атак и получать синтетические данные для обучения алгоритмов обнаружения индикаторов угроз. Для выявления аномалий применяются методы частотного анализа, машинного обучения и кластеризации, обеспечивающие адаптивное и точное обнаружение как известных, так и ранее неизвестных атак. Верификация методологии проводится на примере умной энергосети, где показывается эффективность обучения и тестирования алгоритмов на синтетических данных, отражающих реальные и аварийные режимы. Результаты демонстрируют возможность создания самонастраивающихся систем информационной безопасности с высокой степенью адаптивности и точности обнаружения угроз. Представленная методология обеспечивает итеративную обратную связь между этапами, что повышает качество моделирования и обнаружения угроз.

Ключевые слова: киберфизическая система; цифровой двойник; информационная безопасность; моделирование угроз; обнаружение аномалий; машинное обучение; синтетические данные; адаптивная система; умная энергосеть; анализ угроз.

Благодарность. Исследование выполнено при финансовой поддержке Санкт-Петербургского научного фонда (грант № 23-РБ-01-09).

Образец цитирования:

Котенко ИВ, Саенко ИБ, Митяков ЕС, Кочин ВП. Методология анализа угроз информационной безопасности с использованием цифровых двойников. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2025;3:76–91.
EDN: RLHKJY

For citation:

Kotenko IV, Saenko IB, Mityakov ES, Kochyn VP. Methodology for information security threat analysis using digital twins. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2025;3:76–91. Russian.
EDN: RLHKJY

Авторы:

Игорь Витальевич Котенко – доктор технических наук, заслуженный деятель науки Российской Федерации, профессор; главный научный сотрудник лаборатории проблем компьютерной безопасности Санкт-Петербургского института информатики и автоматизации Российской академии наук.
Игорь Борисович Саенко – доктор технических наук, профессор; главный научный сотрудник лаборатории проблем компьютерной безопасности Санкт-Петербургского института информатики и автоматизации Российской академии наук.

Евгений Сергеевич Митяков – доктор экономических наук, академик Российской академии естественных наук и Академии инженерных наук имени А. М. Прохорова, профессор; заведующий кафедрой КБ-9 «Предметно-ориентированные информационные системы» Института кибербезопасности и цифровых технологий.

Виктор Павлович Кочин – кандидат технических наук, доцент; проректор по учебной работе и интернационализации образования.

Authors:

Igor V. Kotenko, doctor of science (engineering), honoured scientist of the Russian Federation, full professor; chief researcher at the laboratory of computer security problems, Saint Petersburg Institute for Informatics and Automation, Russian Academy of Sciences.

ivkote@comsec.spb.ru

Igor B. Saenko, doctor of science (engineering), full professor; chief researcher at the laboratory of computer security problems, Saint Petersburg Institute for Informatics and Automation, Russian Academy of Sciences.

ibsaen@comsec.spb.ru

Evgenii S. Mityakov, doctor of science (economics), academician of the Russian Academy of Natural Sciences and the A. M. Prokhorov Academy of Engineering Sciences, full professor; head of the department of KB-9 «Domain-oriented information systems», Institute of Cybersecurity and Digital Technologies.

iyao@mail.ru

Victor P. Kochyn, PhD (engineering), docent; vice-rector for academic affairs and internationalisation of education.

kochyn@bsu.by

METHODOLOGY FOR INFORMATION SECURITY THREAT ANALYSIS USING DIGITAL TWINS

I. V. KOTENKO^a, I. B. SAENKO^a, E. S. MITYAKOV^b, V. P. KOCHYN^c

^aSaint Petersburg Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences,
39, 14th Line V. O., Saint Petersburg 199178, Russia

^bMIREA – Russian Technological University, 78 Vernadskogo Avenue, Moscow 119454, Russia

^cBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: V. P. Kochyn (kochyn@bsu.by)

Abstract. This paper presents a methodology for analysing information security threats in cyber-physical systems based on digital twins. The proposed approach involves formalising the system and threat space through a multi-layered structure, including technical, process, functional, organisational and sectoral layers. Next, dynamic threat modelling is conducted in a secure virtual environment of the digital twin, enabling the reproduction of attack scenarios and generation of synthetic data to train threat indicator detection algorithms. To identify anomalies, frequency analysis, machine learning and clustering methods are applied, ensuring adaptive and accurate detection of both known and previously unknown attacks. The methodology is verified using a smart grid example, demonstrating the effectiveness of training and testing algorithms on synthetic data that reflect normal and emergency operating modes. The results show the potential for creating self-adjusting information security systems with a high degree of adaptability and threat detection accuracy. The presented methodology provides iterative feedback between stages, enhancing the quality of threat modelling and detection.

Keywords: cyber-physical system; digital twin; information security; threat modelling; anomaly detection; machine learning; synthetic data; adaptive system; smart grid; threat analysis.

Acknowledgements. The study was carried out with the financial support of the Saint Petersburg Science Foundation (grant No. 23-RB-01-09).

Введение

Современные информационные системы (ИС) представляют собой высокосложные распределенные киберфизические комплексы со множеством взаимосвязанных компонентов, функционирующих в условиях высокой неопределенности. Эта неопределенность обусловлена не только возрастанием внутренней архитектурной и поведенческой сложности систем, но и постоянной эволюцией угроз информационной безопасности (ИБ), включая появление ранее не наблюдаемых (*zero-day*) и трудноидентифицируемых атак. В таких условиях особую значимость приобретает задача своевременного выявления индикаторов угроз (косвенных признаков наступления нежелательных событий) до их реализации в виде полномасштабных инцидентов. Эффективное решение данной задачи при ограниченном объеме достоверных эмпирических данных требует построения воспроизводимых моделей поведения защищаемых систем и потенциальных сценариев деструктивного воздействия. Одним из наиболее перспективных инструментов в этом контексте выступает технология цифровых двойников (ЦД) – цифровых репрезентаций объектов и процессов, позволяющих моделировать как нормальное функционирование системы, так и ее реакцию на внешние воздействия, включая реализацию сценариев атак.

Технология ЦД в настоящее время формализована в ряде отечественных и международных стандартов, таких как ГОСТ Р 57700.37-2021, ISO/IEC 30173:2023 и ISO/IEC 20924:2024. Однако следует отметить, что в указанных нормативных документах объектом цифрового моделирования преимущественно выступают физические изделия или технические устройства, в то время как вопросы применения ЦД для решения задач ИБ, в особенности динамического моделирования угроз и генерации данных для построения систем обнаружения аномалий, остаются практически неисследованными.

Кроме того, в современной научной и прикладной деятельности отсутствует единая методология, обеспечивающая логически непрерывный переход от формализованного описания архитектуры и поведения защищаемой системы через моделирование сценариев атак к обучению и верификации средств обнаружения индикаторов нарушений. Данный разрыв между моделированием угроз и последующим построением механизмов их выявления в реальных системах существенно ограничивает воспроизводимость, обоснованность и прикладную значимость разрабатываемых решений в области обеспечения ИБ.

Настоящее исследование направлено на преодоление обозначенного методологического дефицита. Его целью является разработка и экспериментальная верификация методологии анализа угроз ИБ на

основе ЦД, обеспечивающей замкнутый контур перехода от формализации структуры и поведения защищаемой системы и пространства угроз к синтезу ЦД, воспроизведению сценариев атак, генерации синтетических данных и обучению алгоритмов обнаружения аномалий.

Ключевая гипотеза исследования заключается в следующем: алгоритмы детектирования аномалий, обученные исключительно на синтетических данных, полученных в результате моделирования типовых сценариев атак в ЦД, способны эффективно выявлять ранее неизвестные угрозы за счет выделения устойчивых поведенческих паттернов, характерных для соответствующего класса воздействий. Для проверки этой гипотезы реализована экспериментальная установка на основе модели умной энергосети (*smart grid*), подверженной различным типам атак. Экспериментальные результаты демонстрируют применимость и эффективность предложенного подхода, подтверждая его научную новизну и практическую значимость.

Состояние исследований

В настоящем разделе дан аналитический обзор современных научных исследований, посвященных применению ЦД в контексте обеспечения ИБ киберфизических систем (КФС). Основное внимание уделено работам, касающимся моделирования угроз, генерации синтетических данных и обнаружения аномалий.

ЦД представляют собой виртуальные аналоги физических систем, применяемые для мониторинга, прогнозирования и оптимизации процессов в самых разных отраслях – от интеллектуального производства и КФС до строительной сферы и аэрокосмической промышленности [1; 2]. Вместе с тем расширение использования ЦД в распределенных информационно-технических и производственных системах выявляет значительные вызовы в области ИБ [3; 4]. Одним из центральных рисков становится высокая степень интеграции ЦД с информационными и операционными системами, что открывает новые векторы атак, такие как атаки типа «человек посередине», отказ в обслуживании, компрометация данных и несанкционированный доступ, комплексные распределенные атаки [5; 6]. В литературе выделены следующие ключевые направления анализа и защиты ЦД [4–7]: анализ угроз в распределенных промышленных ЦД, разработка защищенных платформ и протоколов, а также превентивное моделирование поведения злоумышленников (*human digital twins*, HDT).

По мнению исследователей [8], для эффективного обеспечения безопасности ЦД должны обладать аналитической предсказуемостью, интегрироваться с физическим объектом и обеспечивать динамическую синхронизацию. Ряд авторов [9] отмечают переход ЦД от оптимизационных функций к роли инструмента проактивной ИБ, что связано с возможностями безопасного моделирования атак, тестирования защиты, прогнозирования последствий инцидентов и автоматизации обнаружения аномалий, визуализации информации [10].

В литературе выделяются два основных режима функционирования ЦД в процессе моделирования кибератак [11]: режим репликации, при котором модель синхронизируется с физической системой в реальном времени, и режим изолированного моделирования, позволяющий безопасно выполнять сценарии атак. Количественная оценка рисков и моделирование влияния атак, основанные на динамических байесовских сетях и марковских процессах, подробно рассмотрены в ряде работ (см., например, [12]). Параллельно развиваются игровые среды для обучения ИБ-специалистов реализации сценариев атак и защиты [11].

Отдельное место в исследованиях занимают задачи обнаружения аномалий с использованием ЦД: сравнение прогнозируемого и фактического поведения системы позволяет выявлять вторжения и сбои [13]. HDT-технологии расширяют аналитику, добавляя в моделирование поведенческие паттерны человека [14].

Тем не менее использование синтетических данных, полученных из ЦД, для обучения алгоритмов обнаружения аномалий сопряжено с рядом проблем. Во-первых, ограниченная обобщающая способность упрощенных моделей ЦД снижает реализм выборок [1]. Во-вторых, доменный разрыв между синтетическими и реальными данными, включая распределительные смещения, шум и неопределенность, существенно снижает переносимость моделей [15]. Кроме того, отмечаются структурные и нормативные уязвимости ЦД, отсутствие единых архитектур и дополнительные векторы атак, компрометирующие надежность синтетических данных [16; 17]. В статье [18] предложено структурированное моделирование угроз на основе графовых и таксономических моделей, интегрирующих кибернетические и физические аспекты атак. В настоящей работе представлено развитие данного подхода путем его адаптации к мультисрезовому моделированию в ЦД, что позволяет охватить не только технические, но и организационные, процессные и отраслевые аспекты системы.

Онтологические и агентно-ориентированные модели, такие как концептуальная структура «Cybonto» (*Cybonto conceptual framework*) [14], дополняют этот подход когнитивным компонентом, позволяя модели-

ровать поведение потенциальных нарушителей. Технические обзоры (см., например, [19]) подчеркивают важность формализации сценариев атак в мультисистемных ЦД-архитектурах и адаптивных системах реагирования, способных обобщать результаты с учетом междисциплинарных связей [18].

Еще один значимый вызов – это обеспечение интероперабельности и стандартизации платформ ЦД, особенно в контексте ИБ. Разнородность форматов, протоколов и семантических моделей мешает унификации взаимодействия. Усложнение возникает из-за потребности в семантическом согласовании, защите и контроле конфиденциальности, а также в управлении жизненным циклом ЦД с учетом отраслевых особенностей [20–22]. Среди стратегий решения обозначенной проблемы можно выделить стандарты ISO/IEC JTC 1/SC 41, ISO 23247, документ NIST IR 8356, а также рекомендации Консорциума цифровых двойников (*Digital Twin Consortium*).

Несмотря на значительный прогресс в указанных направлениях, в научной литературе отсутствует единая методология, обеспечивающая сквозной цикл от формализации системы и пространства угроз до генерации синтетических данных в ЦД, обучения алгоритмов обнаружения аномалий и их верификации. В настоящей работе авторы предлагают такую методологию, она представлена в следующих разделах.

Концептуальная схема методологии

Предлагаемый подход базируется на логически выстроенной последовательности этапов, объединенных одной целью – обеспечить переход от формализации КФС и пространства угроз к выявлению индикаторов реализации этих угроз на основе данных, полученных в ходе безопасного динамического моделирования угроз в ЦД. Рассматриваемая методология носит сквозной и итеративный характер, обеспечивая замкнутый контур анализа, в котором каждая последующая фаза уточняется на основе результатов предыдущей фазы.

В структурном виде методология включает четыре взаимосвязанных этапа.

Этап 1: формализация системы и пространства угроз. Создается формализованная многосрезовая модель ключевых аспектов КФС, отражающая ее архитектуру, функции, процессы и отраслевую специфику. Угрозы соотносятся с компонентами модели с учетом требований к конфиденциальности, целостности и доступности. Полученная модель служит основой для построения ЦД.

Этап 2: моделирование угроз в ЦД. На основе формализованной модели в виртуальной среде реализуются сценарии атак с учетом их динамики и последствий. ЦД синхронизируется с параметрами реальной системы. Результатом этапа является набор синтетических данных, отражающих как нормальное поведение системы, так и ее реакции на реализованные угрозы.

Этап 3: выделение индикаторов угроз. Данные, полученные при моделировании угроз в ЦД, используются для обучения алгоритмов обнаружения индикаторов угроз. Применяются методы частотного анализа и машинного обучения. Извлекаются устойчивые поведенческие паттерны, которые служат основой для построения адаптивных систем ИБ.

Этап 4: верификация подхода. Обученные алгоритмы проходят тестирование на новых сценариях атак и прототипе системы. Оценивается их способность выявлять как известные, так и ранее неизвестные угрозы. Полученные результаты используются для уточнения модели, сценариев и параметров моделирования угроз.

Методология предусматривает обратные связи, обеспечивающие адаптивность и настройку всех компонентов системы. Результаты этапа 3 (выделение индикаторов угроз) и этапа 4 (верификация подхода) используются:

- для пересмотра и уточнения формализованной модели системы и пространства угроз (этап 1);
- актуализации сценариев и параметров моделирования угроз (этап 2);
- совершенствования архитектуры ЦД за счет повышения качества моделирования и генерации данных.

Схематично рассматриваемая методология представлена на рис. 1.

ЦД выступает ядром методологии, обеспечивая интеграцию всех этапов в единый итеративный процесс. Он представляет собой безопасную виртуальную среду для динамического моделирования сценариев атак, генерации синтетических данных и тестирования алгоритмов обнаружения аномалий. Благодаря двунаправленной синхронизации с реальной системой ЦД поддерживает актуальность модели и позволяет адаптировать сценарии атак с учетом результатов анализа.

Результатом применения методологии является комплекс моделей и инструментов: формализованная многосрезовая модель системы и пространства угроз, синтетические данные, обученные алгоритмы обнаружения аномалий и выделенные индикаторы угроз. Методологический каркас объединяет направления моделирования угроз, анализа данных, обеспечивает основу для построения самообучающихся адаптивных систем ИБ.



Рис. 1. Схема методологии

Fig. 1. Methodology scheme

Формализация системы и пространства угроз

Формализация КФС и пространства угроз является ключевым этапом методологии анализа угроз ИБ с использованием ЦД. На этом этапе формируется воспроизводимая модель, объединяющая архитектуру системы, ее поведенческие особенности и потенциальные векторы атак, что закладывает основу для цифрового моделирования и генерации синтетических данных.

Полученная модель описывает защищаемую систему через пять взаимосвязанных срезов:

- технический срез (S_T), включающий аппаратные средства, встроенные устройства, сети передачи данных, программное обеспечение и средства защиты;
- процессный срез (S_P), охватывающий эксплуатационные процедуры, сценарии функционирования, мониторинг и реагирование на инциденты;
- функциональный срез (S_F), отражающий назначение компонентов, их взаимодействие и участие в реализации функций управления и безопасности;
- организационный срез (S_O), включающий роли, ответственность, внутренние регламенты и механизмы управленческого контроля;
- отраслевой срез (S_I), учитывающий особенности применения системы в конкретной предметной области, включая нормативные требования и характерные угрозы.

Каждому компоненту системы $c_i \in S_k$, $k \in \{T, P, F, O, I\}$, сопоставляется множество угроз $U(c_i) \subseteq U$, где U – общее множество рассматриваемых угроз, сформированное на основе авторитетных классификаций (например, Банка данных угроз безопасности информации Федеральной службы по техническому и экспортному контролю (далее – БДУ ФСТЭК России)). Для удобства и формального анализа вводится бинарная матрица соответствия $M \in \{0, 1\}^{n \times m}$, где $n = \sum_k |S_k|$ – общее количество компонентов во всех срезах, а m – количество учитываемых угроз. Значение $M_{ij} = 1$ указывает на наличие связи между компонентом c_i и угрозой u_j , а значение $M_{ij} = 0$ – на ее отсутствие.

В описанной модели каждый срез S_k представляет собой формализованное представление защищаемой КФС в пределах одного из структурных срезов – технического, процессного, функционального, организационного или отраслевого. Однако реальные угрозы ИБ часто затрагивают несколько срезов одновременно. Например, реализация уязвимости в программном обеспечении может не только нарушить техническую целостность системы, но и повлиять на процессы эксплуатации и реагирования.

Для формализации взаимосвязей между срезами вводится матрица влияний $V \in [0, 1]^{5 \times 5}$, где каждый элемент V_{ab} отражает долю угроз, которые одновременно затрагивают срезы S_a и S_b . Она вычисляется следующим образом:

$$V_{ab} = \frac{\left| \left\{ u \in U \mid \exists c_a \in S_a, c_b \in S_b : M_{c_a, u} = 1 \wedge M_{c_b, u} = 1 \right\} \right|}{\left| \left\{ u \in U \mid \exists c_a \in S_a : M_{c_a, u} = 1 \right\} \right|}.$$

В числителе находится количество угроз u , которые одновременно воздействуют хотя бы на один компонент из среза S_a и хотя бы на один компонент из среза S_b , а в знаменателе – количество угроз, воздействующих хотя бы на один компонент из среза S_a .

Матрица влияний $V = [V_{ab}]$ позволяет оценить, насколько реализация угрозы в одном аспекте системы (например, техническом) может повлиять на другой аспект системы (например, процессный). Практическое значение показателя V_{ab} заключается в выявлении каскадных путей распространения угроз, что критически важно для построения многоуровневой защиты. Например, если значение V_{TP} (технический срез $\rightarrow$ процессный срез) равно 0,7, это означает, что 70 % угроз, связанных с техническими компонентами, также воздействуют на эксплуатационные процессы. Данная информация позволяет выявить потенциальные каскадные пути распространения атак и принять упреждающие меры на других уровнях системы. Таким образом, значение V_{ab} отражает условную вероятность того, что угроза, влияющая на срез S_a , затрагивает и срез S_b . При обнаружении аномалии, например, в технической подсистеме это позволяет автоматически активировать мониторинг процессных и организационных процедур, предотвращая каскадный эффект.

Предложенная формализация обеспечивает основу для последующего динамического моделирования угроз в ЦД, где учет межсрезовых зависимостей критически важен для построения реалистичных сценариев атак и анализа поведения системы в различных условиях.

Моделирование угроз в ЦД

Следующим этапом методологии является динамическое моделирование угроз ИБ с использованием ЦД исследуемой КФС. На основе модели, сформированной на этапе формализации системы и пространства угроз, создается структура ЦД, включающая компоненты системы, связи между ними и соответствующие классы угроз.

Архитектура ЦД базируется на принципе двунаправленной синхронизации с реальной системой, что обеспечивает передачу актуальных данных о состоянии компонентов системы и получение результатов симуляций в режиме, максимально приближенном к реальному времени. Такая синхронизация гарантирует актуальность и достоверность моделирования, повышая его практическую значимость.

Моделирование реализуется через формирование и проигрывание сценариев атак, соответствующих выявленным угрозам и отраслевой специфике. Сценарии атак строятся на основе следующих факторов:

- таксономий угроз, сформированных в процессе формализации;
- межсрезовых связей угроз, определенных с использованием матрицы влияний V ;
- информации о компонентах и процессах КФС.

Ключевым элементом предлагаемого подхода является расширенная динамическая модель угроз, формализуемая функцией

$$T_{\text{extended}} = F(T_{\text{base}}, DT_{\text{impact}}),$$

где T_{base} – базовая (статическая) модель угрозы, включающая описание атаки (вектор атаки, цель, эксплуатируемые уязвимости, необходимые условия и технические характеристики); DT_{impact} – динамический компонент, формализующий дополнительную информацию, полученную в результате симуляций и анализа данных в ЦД (динамика развития сценариев атак, реакции системы, поведение защитных механизмов, а также последствия реализации угроз); F – функция интеграции, которая объединяет статическое описание атаки с результатами моделирования угроз в ЦД, формируя расширенную динамическую модель угрозы T_{extended} .

Базовая модель угрозы T_{base} может быть формализована как следующий кортеж:

$$T_{\text{base}} = \langle \text{вектор атаки, цель, уязвимость, условия, технические характеристики} \rangle.$$

Например, для атаки типа «ложные команды управления» в умной энергосети параметры кортежа могут быть следующими:

- вектор атаки – MITM (*man-in-the-middle*);
- цель – контроллер распределенного генератора;
- уязвимость – отсутствие аутентификации команд;
- условия – активность SCADA-сессии;
- технические характеристики – протокол Modbus/TCP.

Динамический компонент DT_{impact} представляет собой временную траекторию развития инцидента, зафиксированную в ЦД, и включает:

- временные метки начала и пика развития атаки;
- реакцию защитных механизмов (например, срабатывание IDS);
- каскадные эффекты (например, отключение смежных узлов);
- изменение ключевых параметров системы (напряжение, частота, задержки).

Функция интеграции F реализуется как расширение статической модели T_{base} с помощью вектора динамических параметров DT_{impact} :

$$T_{\text{extended}} = T_{\text{base}} \cup \{t_{\text{start}}, t_{\text{peak}}, \Delta V(t), ID_{\text{affected}}\},$$

где t_{start} – временная метка начала атаки; t_{peak} – временная метка пика развития атаки, указывающая на момент максимального воздействия угрозы на систему; $\Delta V(t)$ – функция изменения напряжения во времени (в контексте умной энергосети), отражающая динамику воздействия угрозы на параметры системы; ID_{affected} – идентификаторы затронутых компонентов системы, позволяющие определить, какие элементы инфраструктуры подверглись воздействию.

Практическая ценность такой модели заключается в генерации обогащенных сценариев атак для обучения систем обнаружения индикаторов угроз, а также в количественной оценке эффективности мер защиты (например, время срабатывания защиты, глубина распространения угрозы).

Выделение индикаторов угроз

Следующим этапом методологии является разработка системы обнаружения индикаторов угроз – аномалий, свидетельствующих о реализации атак. Основная задача данного этапа состоит в обучении алгоритмов обнаружения характерных признаков угроз на основе синтетических данных, сгенерированных в ЦД.

В отличие от традиционных подходов, базирующихся преимущественно на реальных данных или экспертных оценках, предложенная методика использует синтетические, но достоверные и контролируемые наборы данных, получаемые в безопасной виртуальной среде. Такой подход обеспечивает широкое разнообразие обучающих примеров, включая редкие и ранее неизвестные сценарии атак, что значительно повышает универсальность и адаптивность алгоритмов обнаружения аномалий.

Для выявления аномалий используются взаимодополняющие методы трех типов:

- 1) анализ спектральных характеристик сигналов, который дает возможность обнаруживать нестандартные изменения в параметрах работы системы;
- 2) обучение моделей распознавать нормальные паттерны поведения и выявлять отклонения, характерные для атак;
- 3) кластеризация, позволяющая сгруппировать данные по типичным режимам функционирования и выделить элементы, не попадающие в эти группы, как потенциальные аномалии.

Архитектура системы обнаружения индикаторов угроз построена по принципу многокомпонентного анализа (рис. 2). Входной поток данных, поступающий как из реальной системы, так и из ЦД, проходит этап предобработки, после чего параллельно анализируется несколькими алгоритмами. Полученные результаты подвергаются агрегации и классификации. При классификации аномалий используется информация о видах угроз, сформированная на этапах формализации системы и пространства угроз и моделирования угроз в ЦД, что обеспечивает точное сопоставление выявленных аномалий с конкретными классами атак.

Обучение на данных, сгенерированных в ЦД, существенно расширяет возможности системы по сравнению с традиционными методами обучения, обеспечивая адаптивность к редким и ранее неизвестным видам атак.

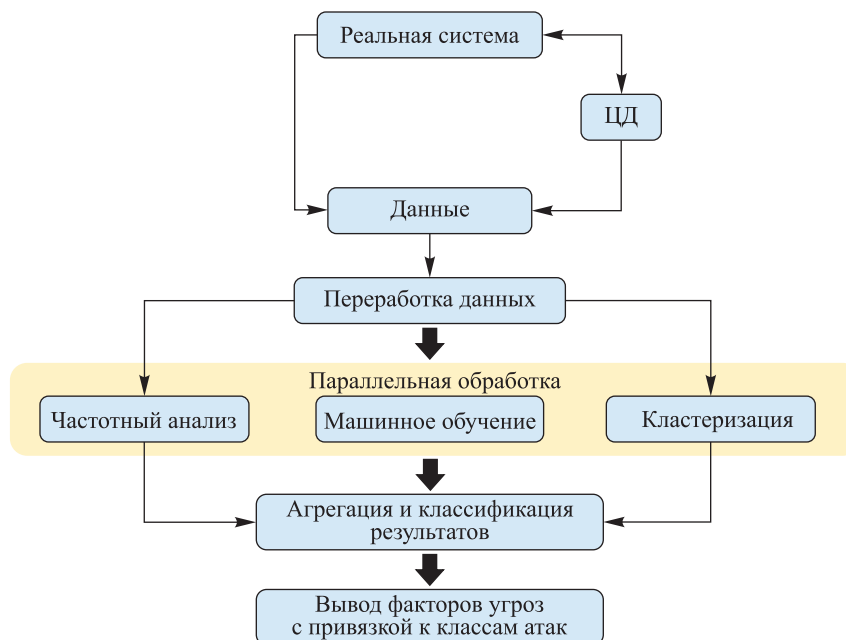


Рис. 2. Архитектура системы обнаружения индикаторов угроз

Fig. 2. Architecture of the threat indicator detection system

Верификация подхода

Экспериментальная апробация предложенной методологии, направленная на ее верификацию, проводилась на примере умной энергосети. Цель этого этапа – подтвердить, что ЦД не только позволяет моделировать сценарии атак, но и генерирует данные, пригодные для обучения алгоритмов обнаружения аномалий, способных эффективно выявлять ранее неизвестные угрозы.

Современные угрозы ИБ, включая вредоносное программное обеспечение, фишинг, DDoS-атаки и целенаправленные операции, представляют серьезную опасность для умной энергосети из-за высокой степени цифровизации и сетевой взаимосвязанности компонентов. Ключевая проблема состоит в том, что кибератаки могут маскироваться под естественные искажения, вызванные, например, нелинейными потребителями, погодными условиями или аппаратными сбоями. Это обстоятельство затрудняет их обнаружение и разграничение с неугрожающими отклонениями, создавая риски для устойчивости и безопасности системы [23].

В соответствии с предложенной методологией на первом этапе апробации подхода была построена формализованная многосрезовая модель умной энергосети, включавшая:

- технический срез (аппаратные и программные компоненты – датчики, контроллеры, SCADA, коммуникационная инфраструктура и средства защиты);
- процессный срез (процессы мониторинга, управления нагрузкой, автовосстановления и реагирования на инциденты);
- функциональный срез (функции регулирования напряжения и частоты, балансировки нагрузки и передачи данных);
- организационный срез (роли персонала, регламенты доступа и политики ИБ);
- отраслевой срез (нормативные требования, включая ГОСТ Р ИСО/МЭК 27019-2021, и характерные угрозы для энергетики).

Далее на основе этой модели была построена бинарная матрица соответствия между компонентами системы и угрозами из БДУ ФСТЭК России. Анализ показал, что 78 % угроз, связанных с подменой команд, искажением данных с датчиков и отказами в обслуживании, затрагивают компоненты, участвующие в измерении и регулировании напряжения (в частности, датчики, контроллеры и каналы передачи данных в SCADA-системе). Исходя из этого, можно заключить, что реализация таких угроз с высокой вероятностью приведет к отклонению напряжения от нормы или к его некорректной регистрации. Следовательно, временной ряд напряжения становится чувствительным индикатором кибератак, поскольку в нем отражаются как прямые, так и косвенные (например, искаженные данные, используемые для управления) последствия атак.

На основе этой структуры был построен ЦД, реализованный в виде виртуальной имитационной среды на языке Python с использованием библиотек SimPy, Scapy, Pandas и NumPy. ЦД поддерживает двунаправленную синхронизацию с реальной системой и используется для моделирования сценариев кибератак и аварийных состояний.

Для анализа поведения системы и выявления аномалий был разработан экспериментальный комплекс, интегрированный с ЦД и включающий:

- сбор и предварительную обработку сигналов;
- применение алгоритмов обнаружения аномалий;
- агрегирование результатов и визуализацию;
- автоматическое реагирование на события.

Такая архитектура позволила использовать ЦД в качестве безопасной тестовой платформы, обеспечивающей гибкость и контролируемость эксперимента в условиях, приближенных к реальному времени, но без риска для физической инфраструктуры.

В основу подхода легли три ключевых направления анализа:

- частотный анализ с вейвлет-преобразованием (используется на этапе предобработки для выявления характерных отклонений в сигналах);
- анализ отклонений от штатного поведения (реализуется путем обучения моделей на данных нормального функционирования системы);
- кластеризация режимов работы (заключается в формировании устойчивых кластеров безопасных состояний, где все, что выходит за их пределы, рассматривается как потенциальная аномалия).

Представим поэтапную процедуру апробации предложенной методологии.

Этап 1: генерация в ЦД данных для обучения. На этом этапе эксперимента в ЦД была смоделирована работа энергосистемы в трех режимах:

- нормальном режиме (напряжение сети описывалось синусоидальным сигналом с добавлением случайного шума, что отражало естественные колебания в системе при штатном функционировании);
- режиме реализации угроз (кибератаки) (имитировались резкие скачки напряжения, характерные для кибератак, направленных на дестабилизацию сети; эти сценарии представляли собой сгенерированные паттерны аномалий – индикаторов угроз);
- аварийном режиме (осуществлялось плавное, но устойчивое изменение амплитуды сигнала, что моделировало сбой и технические неисправности, не связанные с вредоносными действиями).

На рис. 3 представлена иллюстрация одного из сгенерированных временных рядов напряжения с маркировкой аномалий, соответствующих различным режимам работы системы.

Каждый режим моделировался многократно (100 раз) с варьированием параметров, что позволило сформировать датасет из нескольких наборов синтетических сигналов.

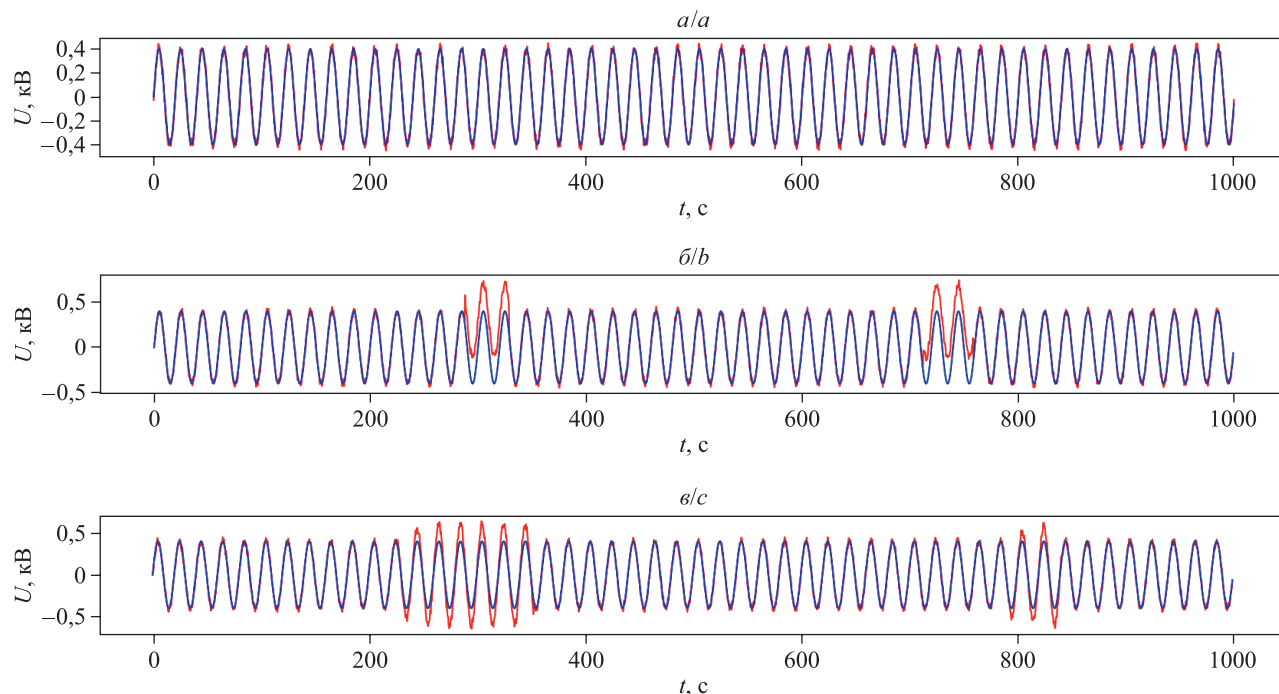


Рис. 3. Сгенерированный временной ряд напряжения с маркировкой аномалий (выделены красным цветом), соответствующих различным режимам работы системы:
а – нормальный режим; б – режим кибератаки; в – аварийный режим

Fig. 3. Generated voltage time series with anomalies (highlighted in red) corresponding to different system operating modes:
а – normal mode; б – cyberattack mode; в – emergency mode

Этап 2: предобработка и фильтрация данных. После генерации исходных данных в ЦД все временные ряды проходили этап предобработки. Для этой цели применялось двухуровневое дискретное вейвлет-преобразование с использованием различных типов вейвлетов, что позволило выбрать оптимальный метод фильтрации для последующего обнаружения аномалий. В ходе экспериментов были протестированы несколько типов вейвлетов, включая вейвлеты Добеши (db), симлеты (sym) и коифлеты (coif). Для иллюстрации результатов в статье выбран вейвлет Добеши 1 (db1), который показал хорошие результаты при обработке сигналов напряжения в энергосистеме. Вейвлет Добеши 1 особенно эффективен для обработки сигналов с резкими переходами и разрывами, что характерно для кибератак на умные энергосети.

Особое внимание уделялось аппроксимирующим коэффициентам второго уровня (A_2), которые представляют собой низкочастотную компоненту сигнала напряжения, содержащую информацию об основной тенденции работы энергосистемы. В отличие от исходного сигнала коэффициенты A_2 представляют собой «сглаженную» версию напряжения, где удалены высокочастотные шумы и кратковременные колебания, что позволяет фокусироваться на устойчивых характеристиках системы. В контексте энергосети коэффициент A_2 отражает базовую форму напряжения при нормальной работе и является чувствительным индикатором системных изменений, так как кибератаки и аварии часто влияют именно на основные характеристики сигнала, а не только на высокочастотные шумы.

На рис. 4 показан результат обработки сигнала напряжения, представленного на рис. 3, методом дискретного вейвлет-преобразования с использованием вейвлета Добеши 1. Визуально форма преобразованного сигнала близка к исходной, поскольку фильтрация сохраняет низкочастотную компоненту (основную волну), но удаляет высокочастотные колебания и случайные возмущения. Эти изменения не всегда заметны невооруженным глазом, однако они влияют на частотную структуру сигнала, что критично для автоматической классификации: сглаженный ряд позволяет алгоритмам надежно выделять аномальные отклонения, характерные для кибератак и аварийных состояний, при минимальном влиянии шумов.

Для последующего анализа и визуализации работы алгоритмов обнаружения аномалий были сформированы признаковые пространства, где по одной оси откладывались значения коэффициента A_2 в нормальном режиме работы системы, а по другой оси – значения коэффициента A_2 в аномальном состоянии (режим кибератаки или аварийный режим). Такой подход позволил четко визуализировать изменения в основных характеристиках сигнала и выявить моменты, когда поведение системы существенно отклонялось от нормы.

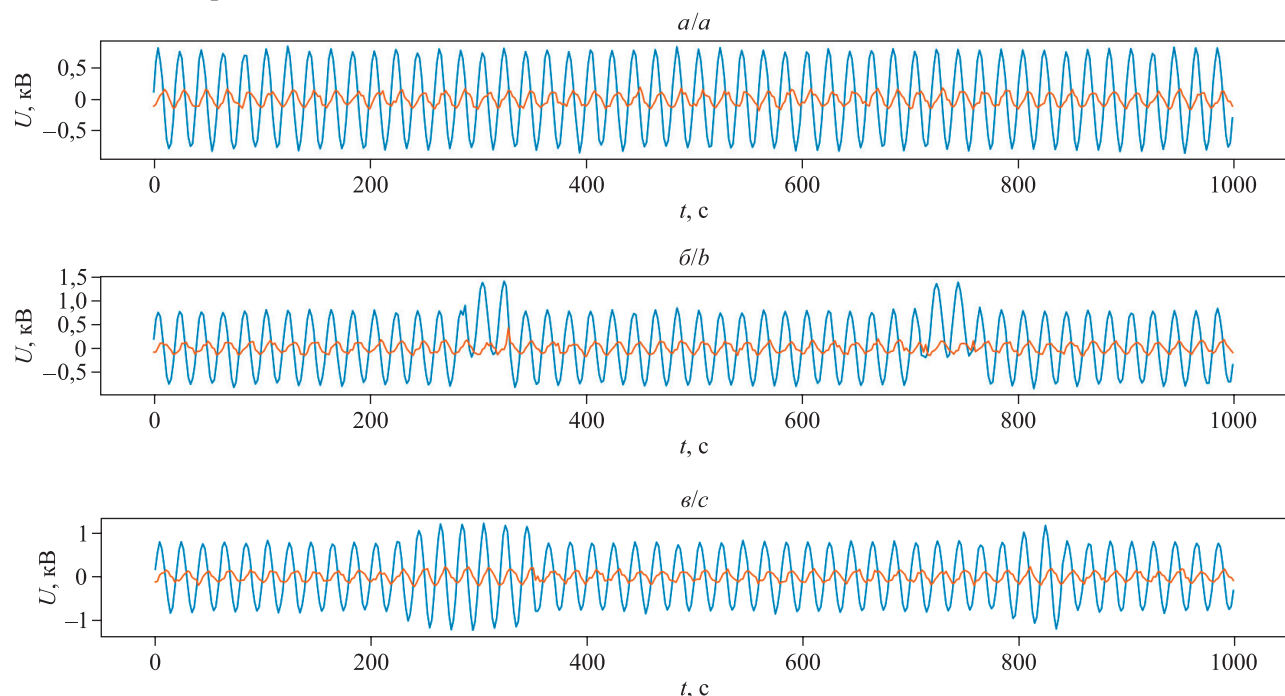


Рис. 4. Вейвлет-преобразование временного ряда напряжения, представленного на рис. 3:
а – нормальный режим; б – режим кибератаки; в – аварийный режим.
Синяя линия отражает исходный сигнал с шумами, оранжевая линия – сглаженное приближение (A_2), полученное из коэффициентов вейвлет-разложения

Fig. 4. Wavelet transform of the voltage time series shown in fig. 3:
а – normal mode; б – cyber attack mode; в – emergency mode.
The blue line represents the original signal with noise, the orange line represents the smoothed approximation (A_2) obtained from the wavelet decomposition coefficients

Этап 3: обучение алгоритмов. На этом этапе апробации методологии были проведены настройка и обучение алгоритмов обнаружения аномалий на объединенном датасете, включающем данные нормального режима и режима реализации угроз, смоделированных в ЦД. Алгоритмы обучались выявлять устойчивые поведенческие паттерны, характерные для системы при штатном функционировании, а также распознавать отклонения, возникающие в момент реализации угроз.

Аварийные режимы, отражающие непреднамеренные сбои и технические неисправности, на этапе обучения не использовались, они были зарезервированы для этапа тестирования, что позволило сформулировать более строгую задачу для алгоритмов: научиться отличать реализации угроз от других видов отклонений, не связанных с враждебным воздействием.

Для апробации методологии были использованы как классические, так и более устойчивые к выбросам алгоритмы обнаружения аномалий и кластеризации. Их выбор объясняется следующими причинами:

- алгоритмы обнаружения аномалий *Isolation forest*, *One-class SVM*, *Local outlier factor (LOF)* хорошо зарекомендовали себя при работе с аномалиями в многомерных временных рядах, они способны фиксировать точечные или локализованные выбросы;
- алгоритмы кластеризации *Density-based spatial clustering of applications with noise (DBSCAN)*, *Ordering points to identify the clustering structure (OPTICS)*, *Spectral clustering* устойчивы к шуму и способны формировать сложные по форме кластеры, их применение оправдано тем, что аномалии в сложных системах могут проявляться не как отдельные выбросы, а как сдвиги между кластерами устойчивых режимов.

В качестве дополнительных методов использовались методы *K-means* и *Gaussian mixture models (GMM)*.

Этап 4: генерация новых реализаций угроз и аварийных состояний. Для проведения тестирования в ЦД были сгенерированы новые данные, включающие:

- новые реализации угроз, которые отличались от сценариев, использованных при обучении алгоритмов (устойчивые искажения формы сигнала, а также долговременные отклонения параметров энергосистемы, моделирующие новые возможные способы реализации потенциальных угроз);
- аварийные состояния, вызванные непреднамеренными факторами, такими как внутренние сбои, технические неисправности и прочие незлонамеренные аномалии, не связанные с вредоносной активностью.

Сформированная тестовая выборка позволила проверить способность обученных алгоритмов не только выявлять аномалии – индикаторы ранее неизвестных угроз, но и эффективно отличать их от незлонамеренных отклонений, связанных с аварийными состояниями.

Этап 5: тестирование. Обученные на данных этапа 1 алгоритмы были применены к тестовой выборке, сформированной на этапе 4. Основными задачами этого этапа являлись:

- обнаружение отклонений от нормального поведения в режиме, близком к реальному времени;
- корректная классификация выявленных аномалий с разделением их на две категории – индикаторы реализации угроз (кибератаки) и неугрожающие аномалии (аварии и технические сбои).

Результаты тестирования оценивались с помощью метрик *F1-score*, *Precision* и *False positive rate (FPR)*.

На рис. 5 и 6 представлены результаты сравнительного анализа работы шести алгоритмов обработки временных рядов, примененных в рамках эксперимента по обнаружению аномалий в умной энергосети. Были рассмотрены три алгоритма обнаружения аномалий (*Isolation forest*, *LOF* и *One-class SVM*) и три алгоритма кластеризации (*DBSCAN*, *OPTICS* и *Spectral clustering*), которые обрабатывали данные после дискретного вейвлет-преобразования сигнала напряжения. На рис. 5 приведены результаты для тестового сценария, имитирующего режим кибератаки, который характеризуется точечными аномалиями, резко отличающимися от нормального поведения системы. На рис. 6 показаны результаты для сценария, соответствующего аварийному режиму, при котором наблюдаются устойчивые отклонения, вызванные техническими сбоями или авариями в сети.

Для каждого алгоритма представлены два графика. Верхний график – визуализация точек в двумерном признаковом пространстве, сформированном на основе коэффициентов вейвлет-преобразования сигнала напряжения. По оси x отложено значение коэффициента A_2 вейвлет-преобразования сигнала напряжения в нормальном режиме, а по оси y – значение того же коэффициента, но в аномальном режиме (кибератака или авария). Таким образом, каждая точка соответствует одному временному окну и отражает изменение поведения сигнала по сравнению с нормой. Точки, расположенные вдоль диагонали, соответствуют участкам сигнала без аномалий, тогда как отклонения от диагонали указывают на моменты, когда основные характеристики сигнала изменились, – это и есть потенциальные аномалии. Цвет и маркеры отражают результат классификации: нормальные точки (фоновая цветовая заливка) и аномалии (красные точки или контуры). Нижний график – тепловая карта уровня аномальности во времени. По горизонтали отложено время, уровень аномальности визуализирован цветом – от синего (низкий уровень отклонения от нормы) до красного (высокий уровень отклонения от нормы).

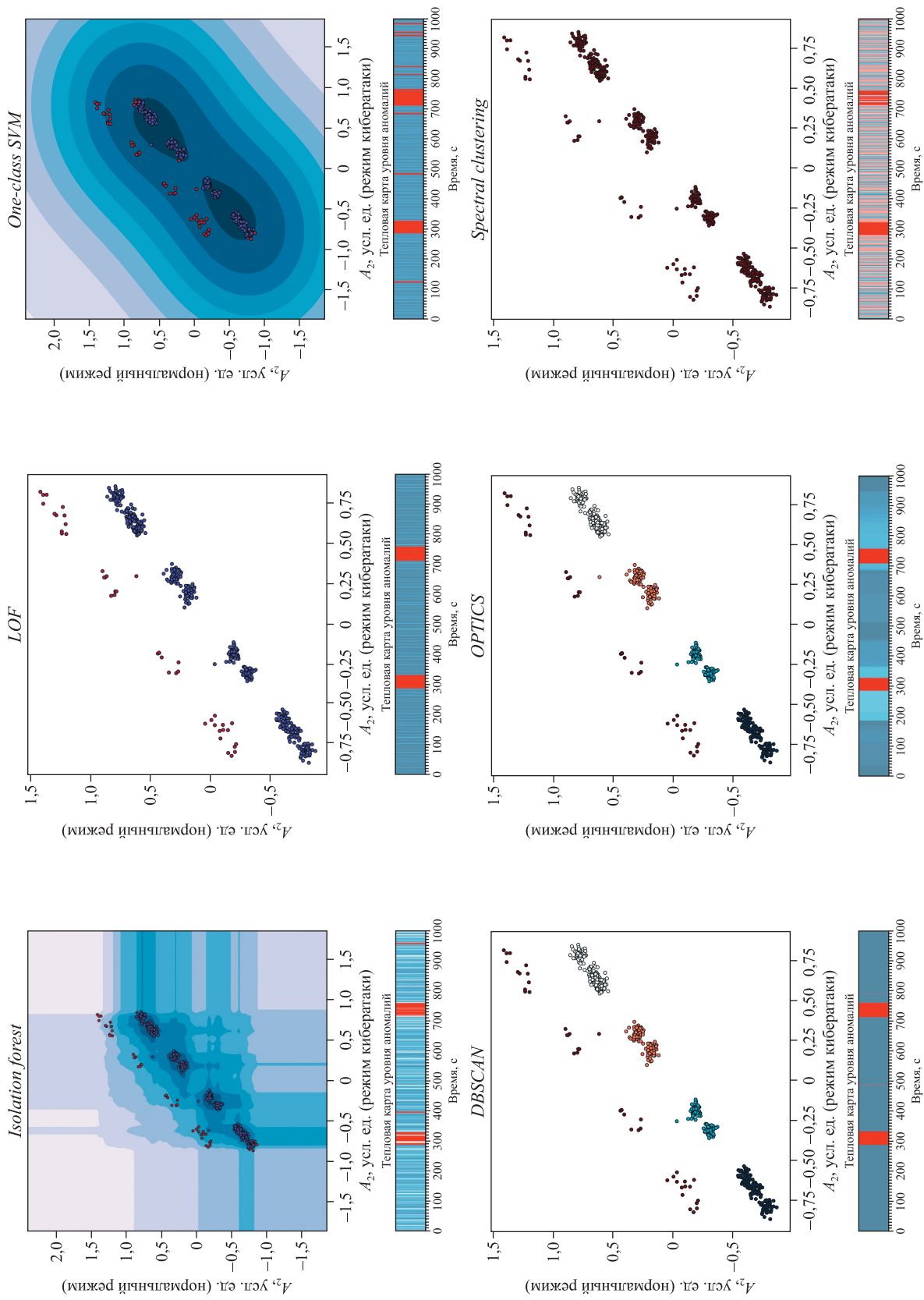


Рис. 5. Графики выделения аномальных данных в режиме кибератаки. Для каждого алгоритма представлены два графика. Верхний график – визуализация точек в двумерном признаковом пространстве, сформированном на основе коэффициентов A_2 вейвлет-преобразования сигнала напряжения. Нижний график – тепловая карта уровня аномальности во времени (синий цвет соответствует низкому уровню аномальности, красный цвет – высокому уровню аномальности)

Fig. 5. Graphs for identifying abnormal data in cyberattack mode. Two graphs are presented for each algorithm. The top graph is a visualisation of points in a two-dimensional feature space formed based on the A_2 coefficients of the wavelet transform of the voltage signal. The bottom graph is a heat map of the anomaly level over time (blue colour corresponds to low anomaly levels, red colour corresponds to high anomaly levels)

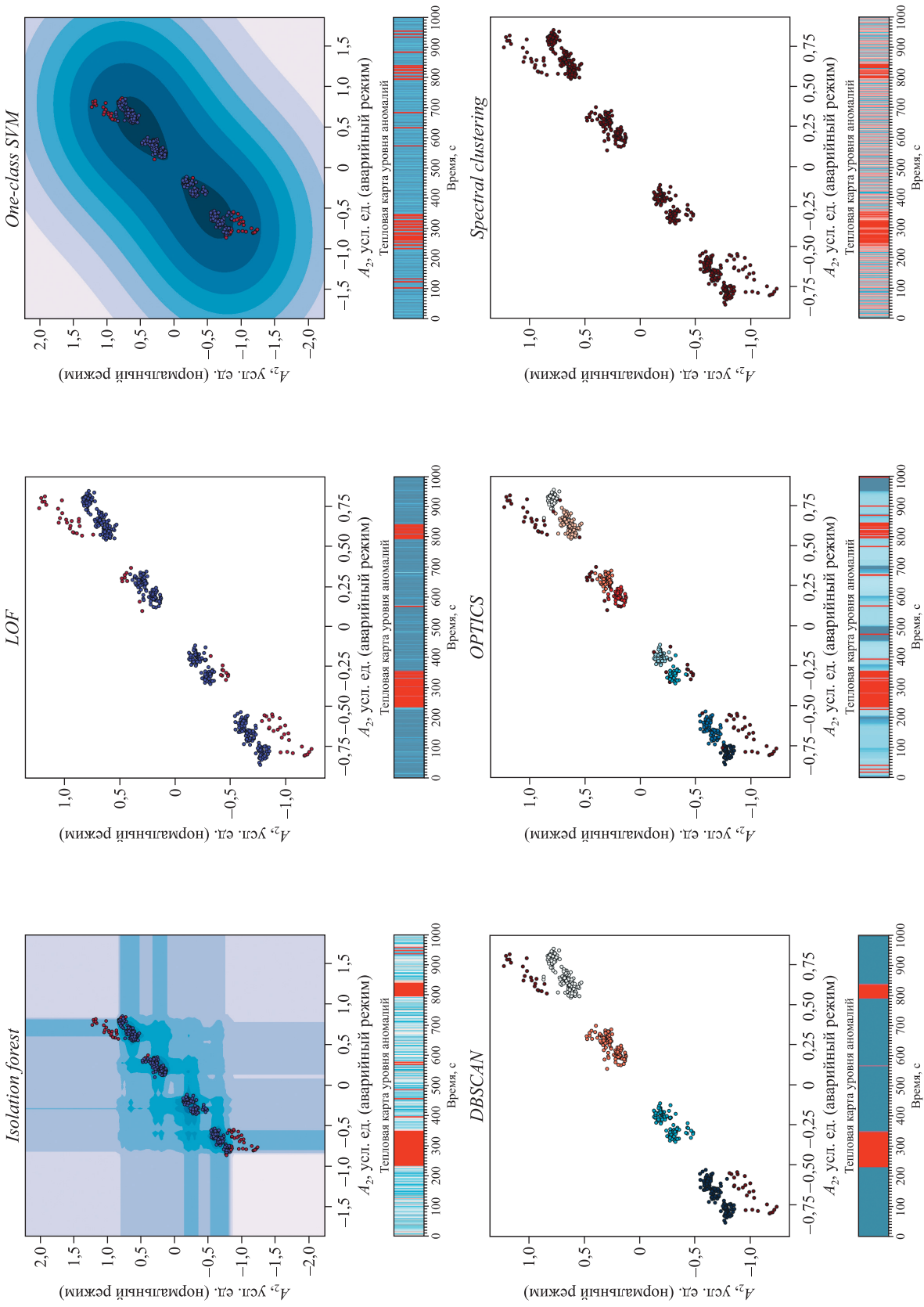


Рис. 6. Графики выделения аномальных данных в аварийном режиме. Для каждого алгоритма представлены два графика. Верхний график – визуализация точек в двумерном признаковом пространстве, сформированном на основе коэффициентов A_2 вейвлет-преобразования сигнала напряжения. Нижний график – тепловая карта уровня аномальности во времени (синий цвет соответствует низкому уровню аномальности, красный цвет – высокому уровню аномальности)

Fig. 6. Graphs for identifying abnormal data in emergency mode. Two graphs are presented for each algorithm. The top graph is a visualisation of points in a two-dimensional feature space formed based on the A_2 coefficients of the wavelet transform of the voltage signal. The bottom graph is a heat map of the anomaly level over time (blue colour corresponds to low anomaly levels, red colour corresponds to high anomaly levels)

Такой подход позволяет не только оценить поведение алгоритмов в признаковом пространстве, но и сопоставить обнаруженные аномалии с их временным расположением, что критически важно для диагностики и классификации режимов работы энергосистемы. Аналогичная обработка и анализ выполнялись для всего тестового датасета.

Оценка эффективности протестированных алгоритмов была проведена на тестовом датасете. В табл. 1 и 2 приведены усредненные метрики качества работы алгоритмов, рассчитанные по всем обработанным данным в рамках эксперимента.

Таблица 1

Метрики оценки эффективности алгоритмов (режим кибератаки)

Table 1

Algorithm evaluation metrics (cyberattack mode)

Алгоритм	<i>Precision</i> , %	<i>F1-score</i>	<i>FPR</i> , %	Время отклика, мс
<i>Isolation forest</i>	98	0,96	2	20
<i>LOF</i>	89	0,82	15	150
<i>One-class SVM</i>	92	0,88	5	80
<i>DBSCAN</i>	98	0,95	3	130
<i>OPTICS</i>	96	0,92	8	160
<i>Spectral clustering</i>	92	0,89	12	180
<i>K-means</i>	85	0,78	10	50
<i>GMM</i>	84	0,82	17	100

Таблица 2

Метрики оценки эффективности алгоритмов (аварийный режим)

Table 2

Algorithm evaluation metrics (emergency mode)

Алгоритм	<i>Precision</i> , %	<i>F1-score</i>	<i>FPR</i> , %	Время отклика, мс
<i>Isolation forest</i>	93	0,88	5	20
<i>LOF</i>	82	0,80	20	150
<i>One-class SVM</i>	83	0,82	10	80
<i>DBSCAN</i>	95	0,86	8	130
<i>OPTICS</i>	90	0,83	11	160
<i>Spectral clustering</i>	86	0,80	18	180
<i>K-means</i>	93	0,88	5	20
<i>GMM</i>	82	0,80	20	150

Проведенная оценка эффективности алгоритмов по всему тестовому датасету выявила значительные различия в способах обнаружения аномалий для двух принципиально различных сценариев – режима кибератаки и аварийного режима. Главное отличие между ними заключается в динамике проявления аномалий: кибератаки сопровождаются резкими кратковременными скачками сигнала, тогда как аварийные состояния характеризуются плавным, но устойчивым изменением параметров системы. Это отличие отражается в показателях эффективности примененных алгоритмов.

В сценарии кибератаки (см. табл. 1) алгоритм *Isolation forest* демонстрирует максимальную точность (98 %) и минимальный уровень ложных срабатываний (2 %), что объясняется его высокой чувствительностью к точечным выбросам. В то же время при анализе аварийных режимов (см. табл. 2) наблюдается общее снижение эффективности большинства алгоритмов, особенно по метрикам *F1-score* и *FPR*, что связано с постепенным и менее выраженным характером изменений сигнала. Алгоритмы кластеризации при этом показывают более стабильные результаты в обоих сценариях, поскольку они ориентированы на выявление пространственно-временных кластеров аномалий, а не на детектирование отдельных выбросов. Следует отметить, что время отклика алгоритмов остается практически неизменным независимо от типа аномалий.

По результатам апробации методологии можно сделать следующие основные выводы:

- получены подтверждающие результаты, свидетельствующие о возможности применения синтетических данных, сгенерированных в ЦД, для обучения алгоритмов обнаружения аномалий, что отражается в стабильных значениях метрики *F1-score* при выявлении ранее неизвестных угроз;
- установлена способность предложенной системы эффективно различать аномалии, связанные с реализацией угроз ИБ, и незлонамеренные отклонения, вызванные аварийными состояниями и техническими неисправностями, что обеспечивается относительно низким уровнем ложных срабатываний;
- зафиксирована тенденция к снижению времени обнаружения аномалий по сравнению с традиционными сигнатурными методами, что потенциально способствует повышению оперативности реагирования в условиях реального времени;
- установлено, что ЦД показал себя как перспективная платформа для моделирования разнообразных сценариев атак и генерации репрезентативных обучающих и тестовых данных, обеспечивая безопасную среду для апробации алгоритмов;
- получены результаты, указывающие на целесообразность применения комбинированного подхода, включающего методы детектирования точечных выбросов и кластерного анализа, для повышения надежности выявления аномалий различной природы в умных энергосетях.

Вместе с тем можно отметить следующие допущения и ограничения методологии и ее апробации:

- результаты основаны на синтетических данных, сгенерированных в ЦД, что накладывает ограничения на прямую экстраполяцию выводов на реальные производственные условия из-за возможных отличий в характере и разнообразии реальных аномалий;
- в ходе обучения алгоритмов не были использованы аварийные режимы, что создает определенное ограничение на обобщающую способность моделей при классификации неугрожающих отклонений;
- тестирование проведено в контролируемой среде с ограниченным набором сценариев, что не исключает необходимости дополнительной валидации в условиях реального времени и на реальных данных;
- используемые методы кластеризации и обнаружения выбросов предполагают определенные статистические свойства данных и могут требовать адаптации под специфику конкретных систем.

Заключение

Таким образом, в статье изложена методология анализа угроз ИБ на основе ЦД, включающая формализацию КФС и пространства угроз ИБ, безопасное моделирование атак, генерацию синтетических данных и обучение систем обнаружения аномалий – индикаторов реализации угроз. Экспериментальная проверка методологии, проведенная на модели умной энергосети, показала, что алгоритмы, обученные исключительно на данных, сгенерированных в ЦД, демонстрируют высокую точность (значение метрики *F1-score* достигает 0,96) в выявлении редких и ранее неизвестных угроз.

Ключевым преимуществом методологии является ее проактивный характер, позволяющий готовиться к угрозам до их фактического проявления в реальных системах за счет моделирования разнообразных сценариев в ЦД. Это обеспечивает безопасность (обучение без риска для инфраструктуры), эффективность (сокращение времени реакции, повышение полноты и точности детектирования) и универсальность (применимость к объектам критической инфраструктуры, интернету вещей, облачным средам).

Перспективы дальнейших исследований включают интеграцию с SIEM/SOAR-платформами для автоматизации реагирования и использование генеративного искусственного интеллекта для создания более репрезентативных сценариев атак в ЦД. Таким образом, предложенная методология открывает путь к созданию адаптивных систем безопасности, способных противостоять эволюционирующим угрозам в сложных КФС.

Библиографические ссылки

1. Sharma A, Kosasih E, Zhang J, Brintrup A, Calinescu A. Digital twins: state of the art theory and practice, challenges, and open research questions. *Journal of Industrial Information Integration*. 2022;30:100383. DOI: 10.1016/j.jii.2022.100383.
2. Mezzour G, Benhadou S, Benhadou M, Haddout A. Unleashing the potential of digital twins: a new era with aeronautics 4.0. *F1000Research*. 2024;13:193. DOI: 10.12688/f1000research.144038.1.
3. Котенко ИБ, Саенко ИБ, Скоробогатов СЮ, Лаута ОС, Кочин ВП. Методика оценки устойчивости программно-конфигурируемых сетей в условиях компьютерных атак. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2024;3:90–102. EDN: WFDUZG.
4. Siddique S, Haque MA, Rifat RH, George R, Shujaee K, Gupta KD. Cyber security issues in the industrial applications of digital twins. In: Institute of Electrical and Electronics Engineers. *2023 IEEE symposium series on computational intelligence (SSCI); 2023 December 5–8; Mexico City, Mexico*. [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 2024. p. 873–878. DOI: 10.1109/SSCI52147.2023.10371850.

5. Abdullahi SM, Zare A, Lazarova-Molnar S. Cybersecurity in distributed industrial digital twins: threats, defenses, and key takeaways. In: Degeler V, Dustegor D, Groefsema H, Lazovik E, editors. *DiDiT-2024. 1st International workshop on distributed digital twins; 2024 June 17; Groningen, the Netherlands*. [S. l.]: CEUR-WS; 2024. Paper 2 (CEUR workshop proceedings; volume 3755). DOI: 10.5445/IR/1000174715.
6. Kotenko I. Active vulnerability assessment of computer networks by simulation of complex remote attacks. In: Institute of Electrical and Electronics Engineers. *2003 International conference on computer networks and mobile computing (ICCNMC-2003); 2003 October 20–23; Shanghai, China*. [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 2003. p. 40–47. DOI: 10.1109/ICCNMC.2003.1243025.
7. Homaei M, Mogollón-Gutiérrez O, Sancho JC, Ávila M, Caro A. A review of digital twins and their application in cybersecurity based on artificial intelligence. *Artificial Intelligence Review*. 2024;57(8):201. DOI: 10.1007/s10462-024-10805-3.
8. Jones D, Snider C, Nassehi A, Yon J, Hicks B. Characterising the digital twin: a systematic literature review. *CIRP Journal of Manufacturing Science and Technology*. 2020;29(part A):36–52. DOI: 10.1016/j.cirpj.2020.02.002.
9. Stavropoulos P, Mourtzis D. Digital twins in industry 4.0. In: Mourtzis D, editor. *Design and operation of production networks for mass personalization in the era of cloud technology*. [S. l.]: Elsevier; 2022. p. 277–316. DOI: 10.1016/B978-0-12-823657-4.00010-5.
10. Novikova E, Kotenko I. Analytical visualization techniques for security information and event management. In: Kilpatrick P, Milligan P, Stotzka R, editors. *Proceedings of the 2013 21st Euromicro International conference on parallel, distributed, and network-based processing (PDP-2013); 2013 February 27 – March 1; Belfast, United Kingdom*. [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 2013. p. 519–525. DOI: 10.1109/PDP.2013.84.
11. Suhail S, Iqbal M, Hussain R, Jurdak R. ENIGMA: an explainable digital twin security solution for cyber-physical systems. *Computers in Industry*. 2023;151:103961. DOI: 10.1016/j.compind.2023.103961.
12. Mustofa R, Rafiqzaman M, Ibne Hossain NU. Analyzing the impact of cyber-attacks on the performance of digital twin-based industrial organizations. *Journal of Industrial Information Integration*. 2024;41:100633. DOI: 10.1016/j.jii.2024.100633.
13. Lucchese M, Salerno G, Pugliese A. A digital twin-based approach for detecting cyber-physical attacks in ICS using knowledge discovery. *Applied Sciences*. 2024;14(19):8665. DOI: 10.3390/app14198665.
14. Nguyen TN. Toward human digital twins for cybersecurity simulations on the metaverse: ontological and network science approach. *JMIRx Med*. 2022;3(2):e33502. DOI: 10.2196/33502.
15. Lopes PV, Silveira L, Guimaraes Aquino RD, Ribeiro CH, Skoogh A, Verri FAN. Synthetic data generation for digital twins: enabling production systems analysis in the absence of data. *International Journal of Computer Integrated Manufacturing*. 2024;37(10–11):1252–1269. DOI: 10.1080/0951192X.2024.2322981.
16. Pärn E, Ghadiminia N, García de Soto B, Oti-Sarpong K. A perfect storm: digital twins, cybersecurity, and general contracting firms. *Developments in the Built Environment*. 2024;18:100466. DOI: 10.1016/j.dibe.2024.100466.
17. Alshammari K, Beach T, Rezgui Y. Cybersecurity for digital twins in the built environment: current research and future directions. *Journal of Information Technology in Construction (ITcon)*. 2021;26:159–173. DOI: 10.36680/j.itcon.2021.010.
18. Rahman MH, Hamedani EY, Son Y-J, Shafae M. Taxonomy-driven graph-theoretic framework for manufacturing cybersecurity risk modeling and assessment. *Journal of Computing and Information Science in Engineering*. 2024;24(7):071003. DOI: 10.1115/1.4063729.
19. Qureshi AR, Asensio A, Imran M, Garcia J, Masip-Bruin X. A survey on security enhancing digital twins: models, applications and tools. *Computer Communications*. 2025;238:108158. DOI: 10.1016/j.comcom.2025.108158.
20. Acharya S, Khan AA, Päivärinta T. Interoperability levels and challenges of digital twins in cyber-physical systems. *Journal of Industrial Information Integration*. 2024;42:100714. DOI: 10.1016/j.jii.2024.100714.
21. David I, Shao G, Gomes C, Tilbury D, Zarkout B. Interoperability of digital twins: challenges, success factors, and future research directions. In: Margaria T, Steffen B, editors. *Leveraging applications of formal methods, verification and validation. Application areas. Proceedings of the 12th International symposium, ISOFA-2024; 2024 October 27–31; Crete, Greece. Part 5*. Cham: Springer; 2025. p. 27–46 (Lecture notes in computer science; volume 15223). DOI: 10.1007/978-3-031-75390-9_3.
22. Voas J, Mell P, Laplante P, Piroumian V. *Security and trust considerations for digital twin technology*. Gaithersburg: National Institute of Standards and Technology; 2025 February. Report No.: NIST IR 8356. DOI: 10.6028/NIST.IR.8356.
23. Кочергин СВ, Артемова СВ, Бакаев АА, Митяков ЕС, Вегера ЖГ, Максимова ЕА. Повышение безопасности смарт-сетей: спектральный и фрактальный анализ как инструменты выявления кибератак. *Russian Technological Journal*. 2025;13(1):7–15. DOI: 10.32362/2500-316X-2025-13-1-7-15.

Получена 07.07.2025 / исправлена 21.08.2025 / принята 11.11.2025.
Received 07.07.2025 / revised 21.08.2025 / accepted 11.11.2025.

АННОТАЦИИ ДЕПОНИРОВАННЫХ В БГУ РАБОТ INDICATIVE ABSTRACTS OF THE PAPERS DEPOSITED IN BSU

УДК 004.42:004.738.5(075.8) + 004.774.6(075.8)

Кремень Е. В. **Веб-конструирование** : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-06 «Математика» / Е. В. Кремень, Ю. А. Кремень ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2025. 224 с. : ил. Библиогр.: с. 223–224. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/335960>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 13.10.2025, № 011313102025. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Веб-конструирование» предназначен для студентов специальности 6-05-0533-06 «Математика». ЭУМК содержит тексты лекций, планы лабораторных занятий, перечень контрольных вопросов, списки рекомендованной литературы.

УДК 004.6(075.8)

Кремень Ю. А. **Базы данных** : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец.: 6-05-0533-06 «Математика», 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки» / Ю. А. Кремень, Е. В. Кремень, А. А. Дерюшев ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2025. 469 с. : ил. Библиогр.: с. 467–468. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/335972>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 13.10.2025, № 011413102025. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Базы данных» предназначен для студентов специальностей 6-05-0533-06 «Математика», 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки» (профилизации «Математика», «Искусственный интеллект и математическая экономика»). ЭУМК содержит тексты лекций, планы лабораторных занятий, перечень контрольных вопросов, списки рекомендованной литературы.

УДК 517.9(075.8)

Филиппова Н. К. **Дифференциальные и интегральные уравнения** : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-04 «Компьютерная физика» / Н. К. Филиппова, А. Н. Деревяго, А. П. Шилин ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2025. 207 с. Библиогр.: с. 202–204. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/336221>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 20.10.2025, № 011620102025. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Дифференциальные и интегральные уравнения» предназначен для студентов специальности 6-05-0533-04 «Компьютерная физика». В ЭУМК приведен краткий теоретический материал, необходимый для интегрирования и анализа основных типов дифференциальных уравнений; даны основы теории устойчивости, интегральных уравнений и вариационного исчисления; разобрано решение большого количества типовых задач; предложены задачи для самостоятельного решения.

УДК 517.958(075.8)

Козловская И. С. **Уравнения математической физики** : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец. 6-05-0533-09 «Прикладная математика» / И. С. Козловская ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2025. 153 с. Библиогр.: с. 152–153. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/337485>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 21.11.2025, № 014421112025. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Уравнения математической физики» разработан в соответствии с образовательным стандартом 1-й степени высшего образования для специальности 6-05-0533-09 «Прикладная математика» и предназначен для информа-

ционно-методического обеспечения преподавания дисциплины «Уравнения математической физики» для студентов данной специальности. В ЭУМК содержится конспект лекций, перечень лабораторных занятий с материалами для работы, задания по управляемой самостоятельной работе.

УДК 004.42:004.738.5(075.8)

Барвенков С. А. **Веб-программирование** : электрон. учеб.-метод. комплекс для спец.: 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки», 6-05-0533-08 «Компьютерная математика и системный анализ» / С. А. Барвенков ; БГУ. Электрон. текстовые дан. Минск : БГУ, 2025. 267 с. : ил., табл. Библиогр.: с. 264–265. Режим доступа: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/337482>. Загл. с экрана. Деп. в БГУ 21.11.2025, № 014221112025. Текст : электронный.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Веб-программирование» предназначен для студентов специальностей 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки» (профилизация «Математика») и 6-05-0533-08 «Компьютерная математика и системный анализ». ЭУМК содержит тексты лекций, материалы для лабораторных занятий, перечень контрольных вопросов, списки рекомендованной литературы.

СОДЕРЖАНИЕ

ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

<i>Таныгина А. Н.</i> Обобщенный метод Ньютона – Канторовича при модифицированном условии регулярной гладкости	6
--	---

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

<i>Корзюк В. И., Рудько Я. В.</i> Слабое решение смешанной задачи для полулинейного гиперболического уравнения третьего порядка с волновым оператором	15
---	----

ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ

<i>Гнедко М. Е., Хромова О. П.</i> Конформное уравнение Киллинга на 2-симметрическом шестимерном неразложимом лоренцевом многообразии с тривиальным тензором Вейля	29
--	----

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

<i>Ту Т. Т.</i> Полная сходимость частичных взвешенных сумм отрицательно ортантно зависимых случайных величин	38
---	----

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

<i>Расолько Г. А., Волков В. М., Игнатенко М. В.</i> Спектральный метод Чебышева для решения полного обобщенного уравнения Прандтля	51
---	----

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

<i>Прихожий А. А., Карасик О. Н.</i> Разнородный блочный алгоритм поиска кратчайших путей между всеми парами вершин кластеризованного взвешенного графа	62
<i>Котенко И. В., Саенко И. Б., Митяков Е. С., Кочин В. П.</i> Методология анализа угроз информационной безопасности с использованием цифровых двойников	76
Аннотации депонированных в БГУ работ	92

CONTENTS

REAL, COMPLEX AND FUNCTIONAL ANALYSIS

<i>Tanyhina A. N.</i> Generalised Newton – Kantorovich method under the modified regular smoothness condition	6
---	---

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND OPTIMAL CONTROL

<i>Korzyuk V. I., Rudzko J. V.</i> Mild solution of a mixed problem for a third-order semilinear hyperbolic equation with the wave operator	15
---	----

GEOMETRY AND TOPOLOGY

<i>Gnedko M. E., Khromova O. P.</i> Conformal Killing equation on a 2-symmetric six-dimensional indecomposable Lorentzian manifold with trivial Weyl tensor	29
---	----

PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS

<i>Tu T. T.</i> Complete convergence for partial weighted sums of negatively orthant dependent random variables	38
---	----

COMPUTATIONAL MATHEMATICS

<i>Rasolko G. A., Volkov V. M., Ignatenko M. V.</i> Chebyshev spectral method for solving complete generalised Prandtl equation	51
---	----

THEORETICAL FOUNDATIONS OF COMPUTER SCIENCE

<i>Prihozhy A. A., Karasik O. N.</i> Heterogeneous blocked all-pairs shortest paths algorithm for clustered weighted graphs	62
<i>Kotenko I. V., Saenko I. B., Mityakov E. S., Kochyn V. P.</i> Methodology for information security threat analysis using digital twins	76
Indicative abstracts of the papers deposited in BSU	92

Журнал включен Высшей аттестационной комиссией Республики Беларусь в Перечень научных изданий для опубликования результатов диссертационных исследований по физико-математическим наукам (в области математики и информатики), техническим наукам (в области информатики).

Журнал включен в наукометрические базы данных Scopus, Mathematical Reviews, Ulrichsweb, Google Scholar, zbMath, Russian Science Citation Index, PIIHL, China National Knowledge Infrastructure.

**Журнал Белорусского
государственного университета.
Математика. Информатика.
№ 3. 2025**

Учредитель:
Белорусский государственный университет

Юридический адрес: пр. Независимости, 4,
220030, г. Минск, Республика Беларусь.
Почтовый адрес: пр. Независимости, 4,
220030, г. Минск, Республика Беларусь.
Тел. (017) 259-70-74, (017) 259-70-75.

E-mail: jmathinf@bsu.by
URL: <https://journals.bsu.by/index.php/mathematics>

«Журнал Белорусского государственного
университета. Математика. Информатика»
издается с января 1969 г.
До 2017 г. выходил под названием «Вестник БГУ.
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»
(ISSN 1561-834X).

Редакторы *М. Д. Баранова, О. А. Семенец*
Технический редактор *В. В. Пишкова*
Корректор *Л. А. Меркуль*

Подписано в печать 28.11.2025.
Тираж 25 экз. Заказ 0000.

Республиканское унитарное предприятие
«СтройМедиаПроект».
ЛП № 02330/71 от 23.01.2014.
Ул. В. Хоружей, 13/61, 220123,
г. Минск, Республика Беларусь.

© БГУ, 2025

**Journal
of the Belarusian State University.
Mathematics and Informatics.
No. 3. 2025**

Founder:
Belarusian State University

Registered address: 4 Niezaliezhnasci Ave.,
Minsk 220030, Republic of Belarus.
Correspondence address: 4 Niezaliezhnasci Ave.,
Minsk 220030, Republic of Belarus.
Tel. (017) 259-70-74, (017) 259-70-75.
E-mail: jmathinf@bsu.by
URL: <https://journals.bsu.by/index.php/mathematics>

«Journal of the Belarusian State University.
Mathematics and Informatics»
published since January, 1969.
Until 2017 named «Vestnik BGU.
Seriya 1, Fizika. Matematika. Informatika»
(ISSN 1561-834X).

Editors *M. D. Baranova, O. A. Semenets*
Technical editor *V. V. Pishkova*
Proofreader *L. A. Merkul'*

Signed print 28.11.2025.
Edition 25 copies. Order number 0000.

Republic Unitary Enterprise
«StroiMediaProekt».
License for publishing No. 02330/71, 23 January, 2014.
13/61 V. Haruzhaj Str.,
Minsk 220123, Republic of Belarus.

© BSU, 2025