
ПСИХОЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

PSYCHOLOGICAL RESEARCHES

УДК 159.9

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ЗАКОНОВ ФЕХНЕРА И СТИВЕНСА

В. М. РОМАНЧАК¹⁾

¹⁾Белорусский национальный технический университет, пр. Независимости, 65, 220013, г. Минск, Беларусь

На основании метода субъективного измерения доказывается эквивалентность законов Фехнера и Стивенса. Рассматривается классический вариант метода субъективного измерения, где аксиоматически определена последовательность объектов, величина которых изменяется равномерно. Порядковый номер элемента в такой последовательности называется рейтингом. Определяются два основных способа сравнения значений величины – абсолютный и относительный. С помощью рейтинга находятся значения величины с точностью до способа сравнения. Показано, что различие между названными законами является следствием разных способов сравнения, поэтому при переходе от значений величины к рейтингу оба закона совпадают.

Ключевые слова: экспертные оценки; рейтинг; закон Фехнера; закон Стивенса; функция полезности; принятие решений.

ON THE EQUIVALENCE OF FECHNER'S AND STEVENS' LAWS

V. M. ROMANCHAK^a

^aBelarusian National Technical University, 65 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220013, Belarus

On the basis of the method of subjective measurement, the equivalence of Fechner's and Stevens' laws is proved. We consider the classical version of the method of subjective measurement, which axiomatically determined the sequence of objects, the value of which varies uniformly. The number of an element in this sequence is called a rating. It is believed that as a result of a subjective measurement, only a rating can be found. There are two main ways to compare values – absolute and relative. By defining a rating, you can find values using a comparison method. It is shown that the difference between the both laws is a consequence of different methods of comparison, therefore, when replacing the value with the rating, these laws, coincide.

Keywords: expert assessments; rating; Fechner's law; Stevens' law; utility function; decision making.

Образец цитирования:

Романчук ВМ. Об эквивалентности законов Фехнера и Стивенса. *Журнал Белорусского государственного университета. Философия. Психология.* 2019;3:97–102.

For citation:

Romanchak VM. On the equivalence of Fechner's and Stevens' laws. *Journal of the Belarusian State University. Philosophy and Psychology.* 2019;3:97–102. Russian.

Автор:

Василий Михайлович Романчук – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры инженерной математики инженерно-физического факультета.

Author:

Vasily M. Romanchak, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of engineering mathematics, faculty of engineering and physics. romanchak@bntu.by

Введение

В настоящее время в психологии активно применяются математические методы. В основе их применения лежит измерение. Однако психофизическое измерение методами Г. Фехнера и С. Стивенса [1] приводит к двум различным законам и значениям субъективной величины. Это означает, что, измерив одну и ту же величину разными методами, мы получим различные значения. Следовательно, с позиции классической теории измерения [2] один из основных психофизических законов или оба закона являются ненадежным способом получения измерительной информации. Эту проблему назовем основной проблемой психофизического измерения. Поскольку многочисленные попытки решить ее путем анализа экспериментальных данных не привели к выработке единого мнения [3], то в настоящем исследовании предлагаем провести валидизацию психофизических законов Фехнера и Стивенса, что позволит более обоснованно применять законы психофизики в задачах психометрии.

Прежде чем приступить к изложению теории метода субъективного измерения, уточним ограничения на постановку задачи:

- многие психофизики предлагали свои варианты психофизических законов, однако последние не претендуют на универсальность, поэтому в нашей работе они не рассматриваются;

- в методе субъективного измерения не используется понятие порога ощущений;

- в психофизической теории обнаружения сигнала оцениваются условные вероятности обнаружения правильного или ложного ощущения сигнала. В работе рассматривается случай, когда ощущения сигналов существенно отличаются по степени проявления (условная вероятность обнаружения такого сигнала равна единице или нулю) и когда теория обнаружения сигнала неприменима;

- различие между законами Фехнера и Стивенса Ю. М. Забродин называет парадоксальным противоречием и предлагает свой вариант обобщенного психофизического закона. Считаем, что противоречия на самом деле нет, поэтому варианты обобщенных психофизических законов нами не рассматриваются.

Предлагается метод измерения, который можно применять к субъективному измерению любых величин, не только психофизических.

Законы Стивенса и Фехнера

Основная задача, которую ставили перед собой психофизики, заключалась в определении того, как соотносятся значения физической величины, полученные объективными и субъективными методами измерения.

Пусть для объектов $A_1, A_2, \dots, A_n$ получены объективные значения величины $u_i = u(A_i)$ и субъективные значения величины $q_i = q(A_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Психофизическая функция $q_i = f(u_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, устанавливает связь между значениями двух типов. С одной стороны, это объективные значения физической величины, с другой – субъективные. Всякое измерение сводится к сравнению величины объектов на основании опыта. Сравнение представляет собой метод сопоставления объектов с целью выявить сходство или различие между ними.

В метрологии выделяют два способа парных сравнений значений величины: сравнивают разности значений и отношения значений [2]. Для построения психофизической функции в качестве единицы измерения ощущений Г. Фехнер рассматривал ЕЗР – величину ощущения «едва заметного различия» [1], которое можно оценить в ходе опыта. Каждому объекту соответствует свое количество ЕЗР. Таким образом, если нам нужно определить субъективное расстояние между значениями субъективных величин q_i и q_j , которые вызваны объектами A_i и A_j , то мы измеряем раз-

ность в количестве ЕЗР между первым и вторым уровнями. На основании эмпирических наблюдений Г. Фехнер сформулировал в 1860 г. «основной психофизический закон» [1], по которому значение субъективно измеренной величины q пропорционально логарифму значения физической величины u :

$$q = v \ln(u/u_0), u > u_0,$$

где u_0 – граничное значение интенсивности субъективной величины (если $u < u_0$, величина совсем не ощущается); v – постоянная, $v > 0$.

Запись закона в форме не учитывает, что при выводе закона сравнивались разности значений количества ЕЗР двух субъективных величин. Закон Фехнера для объектов $A_1, A_2, \dots, A_n$ с учетом способа сравнения можно записать как

$$q_i - q_j = v \ln(u_i/u_j), \quad (1)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$; v – постоянная, $v > 0$; u_i – объективные значения величины, $u_i = u(A_i)$; q_i – субъективные значения величины, $q_i = q(A_i)$.

В отличие от Г. Фехнера С. Стивенс считал, что можно просить эксперта прямо оценить значение величины ощущения. Известны две модификации метода С. Стивенса: деление и умножение [1]. В методе деления один объект задается, другой подбирается таким образом, чтобы отношение значений

субъективных величин объектов было равно заданному числу, например $1/2$. Метод умножения отличается от метода деления тем, что эксперт должен подбирать к заданному объекту такой объект, значение которого превышает заданный объект в определенное число раз (например, в два раза). В итоге С. Стивенс получил в 1957 г. степенной, а не логарифмический характер зависимости между значениями субъективно и объективно измеренной величины [1]:

$$q = k(u/u_0)^\alpha, k > 0, \alpha > 0, \quad (2)$$

где q – субъективное значение величины; u – объективное значение величины; k, α – постоянные; u_0 – величина абсолютного порога ощущения; $u \geq u_0 > 0$. Запись закона в форме (2) не учитывает, что при выводе закона С. Стивенс просил сравнить отно-

шение значений величины, поэтому запишем этот закон с учетом способа сравнения в виде

$$\ln(q_i/q_j) = v \ln(u_i/u_j), v > 0, \quad (3)$$

где $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n; v$ – постоянная; u_i – объективные значения, $u_i = u(A_i)$; q_i – субъективные значения величины, $q_i = q(A_i)$; $A_1, A_2, \dots, A_n$ – объекты измерения; $q_i, q_j \in R^+(R^+ - \text{множество положительных чисел})$.

Замечание. С помощью закона Фехнера в форме (1) удобно сравнивать абсолютные значения субъективной величины, а с помощью закона Стивенса (2) – относительные значения.

Поскольку попытки выразить психофизический закон привели к двум вариантам основного психофизического закона, сформулируем основную проблему психофизического измерения.

Формулировка проблемы

Психофизик С. Стивенс предложил определение неаддитивного измерения и ввел в рассмотрение различные типы шкал измерений. С одной стороны, его подход оказался полезным не только в психофизике, но и в экономике и теории принятия решений для измерения полезности и субъективных предпочтений. Кроме того, идеи С. Стивенса можно легко проинтерпретировать в терминах бинарных отношений и получить математическую модель неаддитивного измерения. Подчеркнем, что идеи С. Стивенса лежат в основании теории репрезентативных измерений. С другой стороны, методика экспериментов, на которых базируются законы Фехнера и Стивенса, не находит понимания среди современных специалистов по теории измерений. Существует мнение, что «природа не делила человека способностью сравнивать между собой разные свойства или их проявления в чис-

ловом формате» [4]. Считают, что предположение С. Стивенса о возможности прямого субъективного оценивания не является обоснованным: «Мы не можем сказать, *на сколько* или *во сколько* раз одно проявление нефизической величины больше или меньше другого» [4]. Кроме того, поскольку значения субъективной величины в законах Фехнера и Стивенса не совпадают, то затруднена интерпретация результатов эксперимента и возникают сомнения в достоверности метода экспертных оценок в целом.

Чтобы объяснить, почему законы Фехнера и Стивенса не совпадают, нам понадобится метод субъективного измерения [5; 6]. Ограничимся частным случаем метода, который по аналогии с теорией вероятности назван классическим. Вначале аксиоматически введем объекты, величина которых изменяется равномерно.

Шкала измерения

Большинство объективных измерений использует единицу измерения и свойство аддитивности физических величин. В тех случаях, когда проводятся субъективные измерения, единица измерения, как правило, отсутствует и измеряемая величина не является аддитивной.

Чтобы пояснить особенность метода субъективного измерения, обратимся к теории вероятностей. В определении классической вероятности понятие симметрии исходов аксиоматично и принимается на основании мнения эксперта. Например, при подбрасывании кубика эксперт может интуитивно считать, что грани кубика достаточно симметричны и будут выпадать с одинаковой вероятностью. Классическое определение вероятности сводит вычисление вероятности к суммированию *равных* по вероятности событий. Таким образом, существенно используется аддитивность как свойство вероятно-

сти. Для того чтобы иметь возможность измерить неаддитивную величину, введем аксиоматически понятие объектов, величина которых *изменяется равномерно*. Приведем примеры таких объектов.

1. Астроном Гиппарх, наблюдая за звездами, разделил их по яркости на шесть величин, где первая величина – самый яркий объект, а шестая – наиболее тусклый [7]. Он распределил промежуточные величины равномерно между оставшимися звездами. С точки зрения наблюдателя, яркость звезд изменяется равномерно.

2. ЕЗР Фехнера [1]. Например, эксперт может сравнивать вес двух объектов. Вес второго объекта увеличивается до тех пор, пока эксперт не говорит, что «он стал больше». Едва заметные различия Г. Фехнер считал равными потому, что эксперт просто отмечает, когда наступает ЕЗР, и субъективно для него все различия одинаковы. Таким образом,

последовательно строятся объекты, которые упорядочены по возрастанию веса и чья величина изменяется равномерно.

З. Л. Терстоун использовал шкалу «равнокажущихся» интервалов для измерения исследуемых субъективных величин [1]. Отличительной особенностью шкалы Терстоуна является то, что интервалы между показателями соседних высказываний субъективно примерно равны. Такое свойство

шкалы достигается за счет метода ее построения. Исследуемая субъективная величина изменяется равномерно вместе с номером интервала.

Приведенные примеры объектов можно использовать в качестве шкалы для измерения величины. Предположим, что можно указать последовательность объектов, величина которых *изменяется равномерно*. Порядковый номер объекта в такой последовательности будем называть рейтингом.

Классическое определение рейтинга

Считаем, что субъективное измерение величины объектов $A_1, A_2, \dots, A_n$ возможно только в шкале порядка. Поэтому субъективное измерение сведем к определению функции $r_i = r(A_i)$, которую будем называть рейтингом (r_i – значение рейтинга, действительное число). Дать классическое определение рейтинга очень просто.

Определение. Пусть величина объектов $A_1, A_2, \dots, A_n$ изменяется равномерно, тогда номер объекта равен значению рейтинга, $r_i = i$.

Рейтинг можно найти в результате субъективного измерения величины. Рассмотрим пример.

Пример. Пусть выбраны объекты $A_1, A_2, \dots, A_6$ так, что величина объектов (площадь) изменяется, с точки зрения эксперта, равномерно (см. таблицу). Тогда $r(A_i) = i, i = 1, 2, \dots, 6$. В определении рейтинга участвуют объекты, величина которых изменяется равномерно, и, чтобы использовать эту дополнительную информацию, необходимо определить понятие значения величины.

Круги, площадь которых изменяется равномерно

Circles whole square is changing equally

r_i	1	2	3	4	5	6
A_i						

Значение величины. Определим, каким образом числовое значение можно обоснованно приписать объекту в случае классического определения рейтинга. Пусть для последовательности объектов $A_1, A_2, \dots, A_n$ величина Q изменяется равномерно и принимает числовые значения $q_i, q_i = q(A_i)$. В таком случае естественно считать, что значения величины меняются равномерно: $q_{i+1} - q_i = \lambda, i = 1, 2, \dots, n-1$; λ – неизвестная постоянная, $\lambda > 0$. Однако это не единственный способ сравнить значения величины. В теории измерений [2] используют два основных способа сравнения – разность и отношение значений. И это не случайно.

Рассмотрим тождество

$$\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b), a, b \in R^+,$$

которое является следствием того, что группа положительных чисел R^+ по умножению изоморфна группе действительных чисел R по сложению, поэтому деление происходит аналогично вычитанию. Другими словами, мы можем заменить деление чисел a и b на вычитание чисел u и v с помощью замены переменных $u = \ln(a), v = \ln(b)$. Если в теории групп изоморфные группы можно не различать, то в методе субъективного измере-

ния различить изоморфные группы невозможно. Поэтому будем считать, что если величина объектов изменяется равномерно, то разность или отношение последовательных значений постоянны. Для определенности можно предположить, что объекты расположены в порядке возрастания величины. Это означает, что для первого способа сравнения

$$q_{i+1} - q_i = \lambda, q_i, q_{i+1} \in R,$$

для второго способа сравнения

$$\ln(q_i/q_j) = \lambda, q_i, q_{i+1} \in R^+,$$

где $i = 1, 2, \dots, n-1$; λ – неизвестная постоянная, $\lambda > 0$; R – множество всех действительных чисел; R^+ – множество всех положительных чисел.

Следовательно, для первого способа сравнения выполняется

$$q_i - q_j = \lambda(r_i - r_j), q_i, q_j \in R; \quad (4)$$

для второго способа сравнения выполняется

$$\ln(q_i/q_j) = \lambda(r_i - r_j), q_i, q_j \in R^+, \quad (5)$$

где λ – неизвестная постоянная, $\lambda > 0$; $r_i = i$; $r_j = j$; $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$.

Функция $r_i = r(A_i)$ – рейтинг; r_i – значение рейтинга r . В случае классического определения рейтинга $r_i = i$. Можно сформулировать обратную задачу, найти значения величины Q , если на основании эксперимента известен рейтинг и не определен способ сравнения – (4) или (5).

Определение. Пусть величина объектов $A_1, A_2, \dots, A_n$ изменяется равномерно. Тогда выполняется равенство (4) или (5), где $r_i = i$; $r_j = j$; λ – неизвестная

постоянная, $\lambda > 0$; $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$; $q_i = q(A_i)$ – значения величины Q .

Другими словами, если известен рейтинг величины и неизвестен способ сравнения, то значения величины определены с точностью до изоморфизма.

Замечание. Последовательность значений q_i , $i = 1, 2, \dots, n$, в первом случае (4) является арифметической, а во втором случае (5) – геометрической.

Метод субъективного измерения

Сформулируем алгоритм метода субъективного измерения, который не связан с тем или иным психофизическим законом:

- 1) определяют рейтинг объектов;
- 2) априори выбирают способ сравнения значений величины;
- 3) на основании рейтинга и способа сравнения находят значения величины объектов.

В соответствии с алгоритмом значения величины, полученные на основании первого и второго способов сравнения, не совпадают. Этот результат соответствует логике метода субъективного измерения.

Проиллюстрируем метод субъективного измерения примером.

Пример. Требуется субъективно оценить, в какой мере площадь третьего круга больше первого (см. таблицу).

Эксперта просят ответить на вопрос: «Насколько второй круг больше первого по площади?» Эксперт отвечает: «На условную единицу». (Здесь может быть названо любое другое число.) Аналогично сравним третий круг со вторым. Поскольку величина кругов изменяется равномерно, эксперт отве-

тит, что третий круг на условную единицу больше второго; будет выполняться $q_2 - q_1 = 1$, $q_3 - q_2 = 1$. Следовательно, $q_3 - q_1 = 2$. Это означает, что площадь третьего круга на 2 единицы больше площади первого.

Допустим теперь, что исследователь спрашивает эксперта: «Во сколько раз второй круг больше первого?» И эксперт отвечает: «В два раза». (Здесь эксперт может назвать любое другое число.) Это означает, что для выбранного исследователем способа сравнения выполняется $q_2/q_1 = 2$. Если исследователь попросит сравнить второй и третий объекты, то окажется, что $q_3/q_2 = 2$, поскольку величина объектов A_1, A_2, A_3 изменяется равномерно. В итоге получим $q_3/q_1 = 2^2$. Следовательно, площадь третьего круга на 2 порядка больше площади первого. При этом рейтинг объекта не зависит от вопроса, который задавал исследователь. Таким образом, в результате измерения находят рейтинг величины и на его основании определяют значения величины (в полном соответствии с методом субъективного измерения). Аналогично для любого круга получим результат: на сколько единиц больше или на сколько порядков больше.

Эквивалентность законов Стивенса и Фехнера

Используя закон Фехнера (1) и способ сравнения (4), получим равенство $\lambda(r_i - r_j) = v \ln(u_i/u_j)$, $\lambda > 0$, где $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$; v – постоянная; λ – неизвестная постоянная, которое эквивалентно равенству

$$\lambda(r_i - r_j) = \ln(u_i/u_j), \lambda > 0, \quad (6)$$

где u_i – объективные значения величины, $u_i = u(A_i)$; r_i – значения рейтинга, $r_i = r(A_i)$; $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$; λ – неизвестная постоянная, которая может быть найдена экспериментальным путем. Если использовать закон Стивенса (3) и способ сравнения (5), получим точно такую же формулу (6). Пусть эксперт правильно оценил рейтинг, тогда будет выполняться соотношение (6). Если дополнительно выбрать способ сравнения (4) или (5), можно найти субъективные значения величины, которые соответствуют обоим законам.

В итоге мы получили, что законы Стивенса и Фехнера – это эквиваленты одному и тому же закону (6). Совпадение законов в форме (6) подтверждает

взаимную валидность названных законов. Для иллюстрации возможности применения метода субъективного измерения в задачах психометрии рассмотрим пример.

Пример. Респондент должен решить три тестовых задания, которые имеют различный уровень сложности. Пусть эксперт присвоил заданиям баллы по десятибалльной шкале (в зависимости от уровня сложности задания). Более сложному заданию соответствует большее число баллов. Пусть, с точки зрения эксперта, первое задание получило три балла ($b_1 = 3$); второе задание – пять баллов ($b_2 = 5$); третье задание – девять баллов ($b_3 = 9$). Требуется сравнить между собой вероятности решения респондентом тестовых заданий.

Будем считать, что разность рейтингов вероятности и разность баллов имеют противоположный знак: $b_i - b_j = -(r_j - r_i)$, где $i, j = 1, 2, 3$ (чем сложнее задание, тем меньше вероятность его решить). Тогда для рейтинга можно выбрать значения $r_1 = 7$, $r_2 = 3$, $r_3 = 1$. Предположительно существует связь между

объективной вероятностью и рейтингом, аналогичная законам Фехнера и Стивенса в форме (6):

$$\ln \left(\frac{p_i}{p_j} \right) = \lambda (r_i - r_j),$$

где p_i, p_j – объективные значения вероятности; $i, j = 1, 2, 3$; λ – постоянная, $\lambda > 0$. Постоянная может

быть определена по результатам статистических испытаний.

Замечание. В данном случае для иллюстрации метода субъективного измерения мы ограничились упрощенной методикой нахождения рейтинга. Более подробно метод нахождения рейтинга на основании ответов респондента рассматривался в [5; 6].

Заключение

В статье предложено решение основной проблемы психофизического измерения путем обоснования взаимной валидности законов Фехнера и Стивенса.

Тем самым подтверждена возможность применения психофизических законов в задачах психометрии для количественного анализа тестовых данных.

Библиографические ссылки

1. Гусев АН, Уточкин ИС. *Психологические измерения. Теория. Методы*. Москва: Аспект Пресс; 2011. 317 с.
2. Шишкин ИФ. *Теоретическая метрология. Часть 1. Общая теория измерений*. 4-е издание. Санкт-Петербург: Питер; 2010. 192 с.
3. Staddon JE. Theory of behavioral power functions. *Psychological review*. 1978;85(4):305–320. DOI: 10.1037/0033-295X.85.4.305.
4. Шишкин ИФ. Измерения нефизических величин (измерения в ноосфере). *Экономика качества* [Интернет; процитировано 16 января 2018 г.]. 2016;2(14). Доступно по: www.eq-journal.ru/pdf/14/Шишкин%20Ф._правка.pdf.
5. Романчук ВМ. Измерение нефизической величины. *Системный анализ и прикладная информатика*. 2017;4:39–44.
6. Романчук ВМ. Субъективное оценивание вероятности. *Информатика*. 2018;15(2):74–82.
7. Берри А. Краткая история астрономии. Займовский СГ, переводчик; Куницкий РВ, редактор. Москва: Гостехиздат; 1946. 363 с.

References

1. Gusev AN, Utochkin IS. *Psikhologicheskie izmereniya. Teoriya. Metody* [Psychological measurements. Theory. Methods]. Moscow: Aspekt Press; 2011. 317 p. Russian.
2. Shishkin IF. *Teoreticheskaya metrologiya. Chast' 1. Obshchaya teoriya izmerenii* [Theoretical metrology. Part 1. General theory of measurements]. 4th edition. Saint Petersburg: Piter; 2010. 192 p. Russian.
3. Staddon JE. Theory of behavioral power functions. *Psychological review*. 1978;85(4):305–320. DOI: 10.1037/0033-295X.85.4.305.
4. Shishkin IF. Measurements of non-physical quantities (measurements in the noosphere). *Jekonomika kachestva* [Internet; cited 2018 January 16]. 2016;2(14). Available from: www.eq-journal.ru/pdf/14/Шишкин%20Ф._правка.pdf. Russian.
5. Romanchuk VM. Model of rating of non-physical quantity. *Sistemnyi analiz i prikladnaya informatika*. 2017;4:39–44. Russian.
6. Romanchuk VM. The subjective measurement of probability. *Informatika*. 2018;15(2):74–82. Russian.
7. Berri A. *Kratkaya istoriya astronomii* [Short history of astronomy]. Zaimovsky SG, translator; Kunitsky RV, editor. Moscow: Gostekhizdat; 1946. 363 p. Russian.

Статья поступила в редколлегию 05.07.2018.
Received by editorial board 05.07.2018.