Журнал Белорусского государственного университета. Физика. 2019;1:12–18
Journal of the Belarusian State University. Physics. 2019;1:12–18

УДК 530.1,539.12

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ЧАСТИЦ С ДИПОЛЬНЫМИ ПОЛЯРИЗУЕМОСТЯМИ В ПОЛЕ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

***Е. В. ВАКУЛИНА*[1], *Н. В. МАКСИМЕНКО*[2]**

[1]*Брянский государственный университет им. академика И. Г. Петровского, филиал в г. Новозыбков, ул. Советская, 9, 243020, г. Новозыбков, Россия*
[2]*Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины, ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель, Беларусь*

На основании релятивистско-инвариантного лагранжиана взаимодействия электромагнитного поля с частицей с поляризуемостями, который согласуется с низкоэнергетической теоремой комптоновского рассеяния, получены ковариантные уравнения движения этих частиц в электромагнитном поле. Точные решения релятивистских волновых уравнений поляризующихся частиц спина 0 и $\frac{1}{2}$ в поле плоской электромагнитной волны получены на основе дифференциальных уравнений первого порядка с помощью общих ковариантных методов Ф. И. Федорова. При решении подобного ковариантного уравнения для частицы спина $\frac{1}{2}$ был использован метод, основанный на перестановочных соотношениях матриц и теории проективных операторов. Ковариантное уравнение для частиц спина 0 в рамках теории Даффина – Кеммера – Петью в поле плоской электромагнитной волны решалось способами, основанными на введении естественного базиса и свойствах действия матриц в пространстве волновых функций. Полученные решения могут быть использованы для расчетов квантовых электродинамических процессов взаимодействия частиц в поле плоской электромагнитной волны и определения на этой основе поляризуемостей адронов.

Ключевые слова: адроны; поляризуемость; лагранжиан; комптоновское рассеяние.

EXACT SOLUTIONS OF WAVE EQUATIONS FOR PARTICLES WITH DIPOLE POLARIZABILITIES IN THE FIELD OF A PLANE ELECTROMAGNETIC WAVE

***E. V. VAKULINA*[a], *N. V. MAKSIMENKO*[b]**

[a]*Branch of the Bryansk State Academician I. G. Petrovski University, 9 Sovietskaya Street, Novozybkov 243020, Russia*
[b]*Francisk Skaryna Gomel State University, 104 Saveckaja Street, Gomel 246019, Belarus*

Corresponding author: E. V. Vakulina (elvakulina@yandex.ru)

Based on the relativistic-invariant Lagrangian of the interaction of an electromagnetic field with a particle with polarizabilities, which agrees with the low-energy Compton scattering theorem, covariant equations of motion of these particles in an electromagnetic field are obtained. Exact solutions of the relativistic wave equations of polarized particles

Образец цитирования:
Вакулина ЕВ, Максименко НВ. Точные решения волновых уравнений для частиц с дипольными поляризуемостями в поле плоской электромагнитной волны. *Журнал Белорусского государственного университета. Физика.* 2019;1:12–18.

For citation:
Vakulina EV, Maksimenko NV. Exact solutions of wave equations for particles with dipole polarizabilities in the field of a plane electromagnetic wave. *Journal of the Belarusian State University. Physics.* 2019;1:12–18. Russian.

Авторы:
Елена Васильевна Вакулина – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры математики, физики и информатики.
Николай Васильевич Максименко – доктор физико-математических наук; профессор кафедры теоретической физики факультета физики и информационных технологий.

Authors:
Elena V. Vakulina, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of mathematics, physics and informatics.
elvakulina@yandex.ru
Nikolay V. Maksimenko, doctor of science (physics and mathematics); professor at the department of theoretical physics, faculty of physics and information technologies.
maksimenko@gsu.by

of spin 0 and $\frac{1}{2}$ in the field of a plane electromagnetic wave are obtained on the basis of first-order differential equations using the general covariant methods of F. I. Fedorov. When solving such a covariant equation for a spin $\frac{1}{2}$ particle, the method based on the permutation relations of matrices and the theory of projective operators was used. When solving the covariant equation for spin zero particles in the framework of the Duffin – Kemmer – Petyu theory in the field of a plane electromagnetic wave, methods were used based on the introduction of a natural basis and the properties of the action of matrices in the space of wave functions. The solutions obtained can be used to calculate quantum electrodynamic processes of the interaction of particles in the field of a plane electromagnetic wave and to determine on this basis the polarizabilities of hadrons.

Key words: hadrons; polarizability; Lagrangian; Compton scattering.

Введение

Свойства элементарных частиц проявляются в их взаимодействиях. Так, у адронов при взаимодействии с электромагнитным полем имеют место дипольные магнитные и квадрупольные моменты. В процессах рассеяния фотонов важную роль играют такие структурные константы, как поляризуемости адронов, интерпретация которых была получена на основе общих принципов релятивистской квантовой теории поля [1–3].

В работах [4–6] в рамках релятивистской квантовой теории поля построены эффективные лагранжианы двухфотонного взаимодействия с адронами с учетом поляризуемостей, которые согласуются с амплитудами в низкоэнергетическом представлении [1–3]. На основе этих лагранжианов получены релятивистские квантово-полевые уравнения движения частиц с поляризуемостями в электромагнитном поле [7; 8].

В процессах взаимодействия адронов с электромагнитным полем проявляются свойства как самих адронов, так и электромагнитного поля. С помощью эффективных лагранжианов можно изучать различные процессы адронной электродинамики. Особый интерес вызывают исследования влияния интенсивного электромагнитного поля на проявления важных квантовых и релятивистских процессов взаимодействия элементарных частиц [9].

Основой исследований процессов взаимодействия адронов во внешних электромагнитных полях является нахождение точных решений соответствующих релятивистских волновых уравнений. Для взаимодействия адронов спина $\frac{1}{2}$ с учетом дипольных поляризуемостей с линейно-поляризованным электромагнитным полем точные решения определены на основе релятивистских волновых уравнений первого порядка и представлены в работах [10–12].

Настоящая работа посвящена точному решению релятивистских волновых уравнений для адронов со спинами 0 и $\frac{1}{2}$ с учетом их дипольных поляризуемостей во внешнем электромагнитном поле.

Частица спина $\frac{1}{2}$ в поле плоской электромагнитной волны с учетом поляризуемостей

Решение уравнения движения частицы спина $\frac{1}{2}$ в поле плоской электромагнитной волны обычно получают приведением дифференциального уравнения первого порядка к дифференциальному уравнению второго порядка [13]. Метод решения уравнения указанного движения, предложенный в [10], позволяет решать дифференциальные уравнения первого порядка в ковариантной форме.

Следуя работам [10; 11], найдем решение дифференциального уравнения первого порядка движения частицы спина $\frac{1}{2}$ в поле плоской электромагнитной волны в ковариантной форме с учетом поляризуемостей.

В [7] получен эффективный лагранжиан взаимодействия электромагнитного поля с частицей спина $\frac{1}{2}$ с учетом дипольных поляризуемостей:

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{\psi}\overleftrightarrow{\partial}_{\mu}\gamma_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi + K_{\sigma\nu}\theta_{\sigma\nu}, \tag{1}$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$; ψ – биспиноры; $\overleftrightarrow{\partial}_{\mu} = \overrightarrow{\partial}_{\mu} - \overleftarrow{\partial}_{\mu}$ – четырехмерный вектор, определяемый компонентами $a_{\mu}\{\vec{a}, ia_0\}$. Тензоры в последнем слагаемом имеют вид

$$K_{\sigma\nu} = \frac{2\pi}{m}\left(\alpha_E F_{\sigma\mu} F_{\mu\nu} + \beta_M \tilde{F}_{\sigma\mu} \tilde{F}_{\mu\nu}\right),$$

$$\theta_{\sigma\nu} = \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma_\sigma \overleftrightarrow{\partial}_\nu \psi,$$

где α_E и β_M – электрическая и магнитная дипольная поляризуемости частицы спина $\frac{1}{2}$; $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$.

Из лагранжиана (1) следует ковариантное уравнение движения частицы спина $\frac{1}{2}$ в электромагнитном поле [7]

$$\left(\hat{D} + m + \frac{1}{2}D_\mu\left(K_{\sigma\mu}\gamma_\sigma\right) + K_{\sigma\mu}\gamma_\sigma D_\mu\right)\psi = 0, \tag{2}$$

где $\hat{D} = D_\mu\gamma_\mu$, матрицы γ_μ удовлетворяют перестановочным соотношениям $\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}$; $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$.

На основании лагранжиана (1) и уравнения (2) в работе [7] показано согласование с низкоэнергетическим представлением амплитуды комптоновского рассеяния на нуклоне [1; 2]. Для решения уравнения (2), когда частица взаимодействует с полем плоской электромагнитной волны, будем использовать подход из [12].

В случае плосковолнового поля вектор-потенциал зависит от $\varphi = kx = k_\mu x_\mu$, т. е.

$$A_\mu = A_\mu(\varphi). \tag{3}$$

При решении уравнения (2) будем считать, что

$$k^2 = k_\mu^2 = 0$$

и потенциал (3) удовлетворяет условию Лоренца:

$$\partial_\mu A_\mu = A'_\mu k_\mu = 0,$$

где $A'_\mu = \frac{\partial A_\mu(\varphi)}{\partial\varphi}$. В этом случае тензор электромагнитного поля выражается в следующем виде:

$$F_{\mu\nu} = k_\mu A'_\nu - k_\nu A'_\mu.$$

Если воспользоваться соотношением

$$\tilde{F}_{\sigma\nu}\tilde{F}_{\nu\mu} = F_{\sigma\nu}F_{\nu\mu} + \frac{1}{2}\delta_{\mu\sigma}F_{\nu\rho}F_{\nu\rho},$$

то тензор $K_{\sigma\mu}$ можно представить так:

$$K_{\sigma\mu} = \frac{2\pi}{m}\left[\left(\alpha_E + \beta_M\right)F_{\sigma\nu}F_{\nu\mu} + \frac{\beta_M}{2}\delta_{\mu\sigma}F_{\nu\rho}F_{\nu\rho}\right]. \tag{4}$$

Поскольку потенциалы $A'_\mu(\varphi)$ удовлетворяют условию Лоренца, то из (4) следует

$$K_{\sigma\mu} = \frac{2\pi}{m}\left(\alpha_E + \beta_M\right)k_\sigma k_\mu \left(A'\right)^2. \tag{5}$$

Удлиненная производная $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ от тензора (5) равна нулю:

$$D_\mu K_{\sigma\mu} = \frac{2\pi}{m}\left(\alpha_E + \beta_M\right)\hat{k}_\sigma k^2\left[\left(A'\right)^2\right]' = 0.$$

Таким образом, уравнение (2) можно записать в виде

$$\left(\hat{D} + m + K_{\sigma\mu}\gamma_\sigma D_\mu\right)\psi = 0. \tag{6}$$

Следуя работам [10–12], решение уравнения (6) представим как

$$\psi = \chi(\varphi)e^{i\left(px - \varepsilon(\varphi)\right)}, \tag{7}$$

где $\varepsilon(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{b^2 + m^2}{2kp}d\varphi'$, $b_\mu = p_\mu - eA_\mu$. В этом случае функция $\chi(\varphi)$ удовлетворяет уравнению

$$\hat{k}\chi' + \left[\left(m + i\hat{c}\right) + i\Omega\hat{k}\right]\chi = 0, \tag{8}$$

где обозначено

$$c_\mu = b_\mu - k_\mu \frac{b^2 + m^2}{2kp}, \;\; c^2 = -m^2; \;\; \Omega = \frac{2\pi}{m}\left(\alpha_E + \beta_M\right)\left(pk\right)\left(A'\right)^2.$$

Умножив уравнение (8) на матрицу $\hat{k}$, получим

$$\hat{k}\left(m + i\hat{c}\right)\chi = 0.$$

Тогда, согласно [10], функцию χ можно представить в виде

$$\chi(\varphi) = \left(m - i\hat{c}\right)\hat{k}\chi_1(\varphi). \tag{9}$$

Подстановка (9) в (8) приводит к уравнению

$$k\chi_1' + i\Omega\hat{k}\chi_1 = 0. \tag{10}$$

Решение для (10) представляется следующим образом:

$$k\chi_1(\varphi) = e^{-i\int_0^\varphi \Omega(\varphi')d\varphi'}\hat{k}\chi_0, \tag{11}$$

где χ_0 – биспинор, который не зависит от φ и удовлетворяет уравнению Дирака для свободно движущейся частицы.

Учитывая соотношения (9) и (11) в определении функции (7), получим выражение общего решения уравнения (2) взаимодействия частицы с поляризуемостями с полем плоской электромагнитной волны:

$$\psi(x) = \left(m - i\hat{c}\right)\hat{k}\chi_0 e^{i\left(px - \varepsilon(\varphi) - \int_0^\varphi \Omega(\varphi')d\varphi'\right)}. \tag{12}$$

Если у частицы отсутствуют поляризуемости, т. е. $\alpha_E + \beta_M = 0$, то волновая функция (12) переходит в известное решение Волкова [14; 15].

Мезон спина 0 в поле плоской электромагнитной волны

Для получения точного решения ковариантного дифференциального уравнения первого порядка взаимодействия с учетом поляризуемостей теоретическим методом [10] воспользуемся формализмом Даффина – Кеммера – Петью. В этом формализме лагранжиан взаимодействия электромагнитного поля с мезоном спина 0 имеет вид [8]

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{\psi}\overleftrightarrow{\partial}_\mu \beta_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi + ie\bar{\psi}\hat{A}\psi + K_{\sigma\nu}\theta_{\sigma\nu}. \tag{13}$$

В уравнении (13) $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$ – пятимерные волновые функции скалярных частиц, а четырехмерный импульс определяется компонентами $a_\mu\left\{\vec{a},\, a_4 = ia_0\right\}$. Пятимерные матрицы $\beta = \beta_\mu^5$ являются матрицами Даффина – Кеммера и удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\beta_\mu\beta_\nu\beta_p + \beta_p\beta_\nu\beta_\mu = \delta_{\mu\nu}\beta_p + \delta_{p\nu}\beta_\mu.$$

Тензоры в (13) определены следующим образом:

$$K_{\sigma\nu} = \frac{2\pi}{m}\left[\alpha_E F_{\sigma\mu}F_{\mu\nu} + \beta_M \tilde{F}_{\sigma\mu}\tilde{F}_{\mu\nu}\right],$$

$$\theta_{\sigma\nu} = \frac{1}{2}\bar{\psi}\beta_\sigma\overleftrightarrow{\partial}_\nu\psi,$$

где стрелки над производными указывают их действие на волновые функции частицы в пятимерном пространстве; α_E и β_M – электрическая и магнитная поляризуемости пиона.

Уравнение взаимодействия пиона с электромагнитным полем с учетом заряда и поляризуемостей, как следует из (13), можно записать в виде

$$\left[\hat{D} + m + \frac{1}{2}D_\mu K_{\sigma\mu}\beta_\sigma + K_{\sigma\mu}\beta_\sigma D_\mu\right]\psi = 0, \tag{14}$$

где $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$; $\hat{D} = D_\mu\beta_\mu$.

С использованием метода функций Грина в работе [8] установлено, что амплитуда комптоновского рассеяния, которая следует из лагранжиана (13), в низкоэнергетическом пределе имеет вид [12]

$$M = \left(\frac{e^2}{m} + 4\pi\omega^2\alpha_E\right)\left(\vec{e}^{(\lambda_2)^*}\vec{e}^{(\lambda_1)}\right) + 4\pi\omega^2\beta_M\left[\vec{n}_2\vec{e}^{(\lambda_2)^*}\right]\left[\vec{n}_1\vec{e}^{(\lambda_1)}\right],$$

где ω – энергия фотонов; $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ – единичные векторы, направленные по импульсам падающего и рассеянного фотонов $\vec{k}_1$ и $\vec{k}_2$; $\vec{e}^{(\lambda_1)}$ и $\vec{e}^{(\lambda_2)}$ – соответствующие векторы поляризации.

Поскольку установлено, что α_E и β_M являются поляризуемостями комптоновского рассеяния, рассмотрим решение уравнения (14) в случае взаимодействия пиона с полем плоской электромагнитной волны с учетом поляризуемостей.

Потенциал A_μ поля плоской электромагнитной волны зависит от координат через инвариантную фазу $\varphi = kx$:

$$A_\mu = A_\mu(\varphi) \tag{15}$$

– и удовлетворяет условию Лоренца

$$\partial_\mu A_\mu = 0,$$

которое, согласно (15), примет вид

$$\partial_\mu A_\mu = k_\mu A'_\mu = 0,$$

где $k\left\{\vec{k}, k_4 = i\omega\right\}, k^2 = 0;\ A'_\mu = \dfrac{\partial A_\mu}{\partial\varphi}$.

В случае когда внешнее поле является плоской электромагнитной волной, решение уравнения (14) определим, следуя работе [10]:

$$\psi(x) = f(\varphi)e^{i(px)}. \tag{16}$$

Подставляя (16) в (14) и учитывая, что

$$K_{\sigma\mu} = \left(\frac{2\pi}{m}\right)(\alpha_E + \beta_M)k_\sigma k_\mu (A')^2,$$

а производная от тензора $K_{\sigma\mu}$ равна нулю, приходим к равенству

$$D_\mu K_{\sigma\mu}\beta_\sigma = 0,$$

и тогда получим уравнение

$$\hat{k}f' + \left\{i\hat{b} + m + \Omega\hat{k}\right\}f = 0, \tag{17}$$

где $b_\mu = p_\mu - qA_\mu;\ \Omega = \left(\dfrac{2\pi}{m}\right)(\alpha_E + \beta_M)(pk)(A')^2$.

Согласно [10], решение уравнения (17) можно представить в виде

$$f(\varphi) = \chi(\varphi)e^{-i\varepsilon(\varphi)},$$

где $\varepsilon(\varphi) = \displaystyle\int_0^\varphi \frac{b^2 + m^2}{2kp}d\varphi'$.

В результате из (17) получим

$$\hat{k}\chi' + \left[\left(m + i\hat{c}\right) + i\Omega\hat{k}\right]\chi = 0. \tag{18}$$

В уравнении (18)

$$c_\mu = b_\mu - k_\mu\frac{b^2 + m^2}{2kp},\ c^2 = -m^2.$$

Следуя [10], представим χ в виде пятимерного столбца

$$\chi = \begin{pmatrix} mu_0 \\ u_\mu \end{pmatrix},$$

где $\mu = 1, 2, 3, 4$.

Поскольку $\hat{k} = k_\mu\beta_\mu$, то, используя явный вид пятимерных матриц, можно показать, что

$$\hat{k} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В таком случае свертки $\hat{k}\chi$ и $\hat{c}\chi$ имеют вид

$$\hat{k}\chi = \begin{pmatrix} k_\mu u_\mu \\ m u_0 k_\mu \end{pmatrix}, \quad \hat{c}\chi = \begin{pmatrix} c_\mu u_\mu \\ m u_0 c_\mu \end{pmatrix}.$$

В итоге (18) распадается на два уравнения вида

$$\begin{gathered} (ku)' + m^2 u_0 + i(cu) + i\Omega(ku) = 0, \\ u_\mu + (k_\mu u_0') + i u_0 c_\mu + i\Omega u_0 k_\mu = 0. \end{gathered} \tag{19}$$

Из второго уравнения системы (19) следует, что

$$u_\mu = -(k_\mu u_0') - i u_0 c_\mu - i\Omega u_0 k_\mu.$$

Умножив это равенство на вектор k_μ, получим

$$(ku) = -i u_0 (ck),$$

а производная примет вид

$$(ku)' = -i(u_0 c)' k. \tag{20}$$

Подставляя (20) в первое уравнение системы (19), приходим к выводу, что

$$(u_0' + i\Omega u_0)\hat{c}k = 0. \tag{21}$$

Решением для (21) является

$$u_0(\varphi) = \exp\left[-i\int \Omega\, d\varphi\right].$$

Из второго уравнения системы (20) следует

$$u_\mu = -i u_0 c_\mu.$$

Таким образом, общее решение уравнения (14) имеет вид

$$\psi(x) = N \begin{pmatrix} im \\ c_\mu \end{pmatrix} e^{i\left(px - \varepsilon(\varphi) - \int_0^\varphi \Omega\, d\varphi'\right)},$$

где N – нормированный множитель.

Заключение

Для формализма Даффина – Кеммера – Петью получен лагранжиан взаимодействия электромагнитного поля с частицей спина 0, обладающей дипольными электрической и магнитной поляризуемостями. Выполнено согласование эффективных релятивистских лагранжианов взаимодействия частиц спина 0 и $\frac{1}{2}$ с электромагнитным полем с амплитудами комптоновского рассеяния, которые установлены на основе низкоэнергетических теорем.

Волновые функции типа Д. М. Волкова для частиц спина 0 и $\frac{1}{2}$ в поле плоской электромагнитной волны, как правило, получают путем решения ковариантных дифференциальных уравнений второго порядка. В этой работе точные решения релятивистских волновых уравнений поляризующихся частиц найдены на основе дифференциальных уравнений первого порядка.

Библиографические ссылки

1. Петрунькин ВА. Двухфотонные взаимодействия элементарных частиц при малых энергиях. *Труды ФИАН*. 1968;41:165–223.

2. Максименко НВ, Шульга СГ. Низкоэнергетическое разложение амплитуды комптоновского рассеяния на адроне и одновременные коммутаторы токов. *Ядерная физика.* 1990;52(2-8):524–534.

3. Raguza S. Third-order spin polarizabilities of the nucleon: I. *Physical Review D*. 1993;47(9):3757–3767.

4. Максименко НВ, Мороз ЛГ. Феноменологическое описание поляризуемостей элементарных частиц в полевой теории. В: *Международная школа молодых ученых по физике высоких энергий и релятивистской ядерной физике.* Дубна: Объединенный институт ядерных исследований; 1979. с. 533–543.

5. Андреев ВВ, Максименко НВ. Поляризуемость элементарных частиц в теоретико-полевом подходе. *Проблемы физики, математики и техники.* 2011;4(9):7–11.

6. Vakulina EV, Maksimenko NV. Spin Polarizabilities and Characteristics of Spin-1 Hadrons Related to Parity Nonconservation in the Duffin – Kemmer – Petiau Formalism. *Physics of Particles and Nuclei Letters.* 2017;14(5):713–718. DOI: 10.1134/S1547477117050120.

7. Andreev VV, Deryuzhkova OM, Maksimenko NV. Covariant equations of motion of a spin $\frac{1}{2}$ particle in an electromagnetic field with allowance for polarizabilities. *Russian Physics Journal.* 2014;56(9):1069–1075. DOI: 10.1007/s11182-014-0141-x.

8. Вакулина ЕВ, Максименко НВ. Поляризуемость пиона в формализме Даффина – Кеммера. *Проблемы физики, математики и техники.* 2013;3:16–18.

9. Ритус ВИ. Квантовые эффекты при взаимодействии элементарных частиц с интенсивным электромагнитным полем. В: Гинзбург ВЛ, редактор. *Квантовая электродинамика явлений в интенсивных полях. Труды ФИАН. Том 111*. Москва: Наука; 1979. с. 5–151.

10. Федоров ФИ. *Группа Лоренца.* Минск: Наука и техника; 1979. 384 с.

11. Радюк АФ. Поляризующаяся частица со спином $\frac{1}{2}$ в поле плоской электромагнитной волны и в постоянном магнитном поле. В: *Ковариантные методы в теоретической физике*. Минск: Институт физики АН БССР; 1986. с. 93–101.

12. Крылов ВБ, Радюк АФ, Федоров ФИ. *Спиновые частицы в поле плоской электромагнитной волны.* [Препринт № 113]. Минск: Институт физики АН БССР; 1976. 59 с.

13. Берестецкий ВБ, Лифшиц ЕМ, Питаевский ЛП. *Квантовая электродинамика.* Москва: Наука; 1980. 704 с.

14. Волков ДМ. Электрон в поле плоских неполяризованных электромагнитных волн с точки зрения уравнения Дирака. *Журнал экспериментальной и теоретической физики.* 1937;7:1286–1289.

15. Pardy M. Volkov solution for two laser beams and ITER. arXiv:hep-ph /050714141v1.

References

1. Petrun'kin VA. [Two-photon interactions of elementary particles at low energies]. *Trudy FIAN*. 1968;41:165–223. Russian.

2. Maksimenko NV, Shulga SG. Low-energy expansion of the Compton scattering amplitude on hadron and simultaneous current switches. *Yadernaya fizika.* 1990;52(2-8):524–534. Russian.

3. Raguza S. Third-order spin polarizabilities of the nucleon: I. *Physical Review D*. 1993;47(9):3757–3767.

4. Maksimenko NV, Moroz LG. Fenomenologicheskoe opisanie polyarizuemostei elementarnykh chastits v polevoi teorii. In: *Mezhdunarodnaya shkola molodykh uchenykh po fizike vysokikh energii i relyativistskoi yadernoi fizike* [International School of young scientists in high energy physics and relativistic nuclear physics]. Dubna: Joint Institute for Nuclear Research; 1979. p. 533–543. Russian.

5. Andreev VV, Maksimenko NV. The polarizability of elementary particles in the field theory approach. *Problems of physics, mathematics and technics.* 2011;4(9):7–11. Russian.

6. Vakulina EV, Maksimenko NV. Spin Polarizabilities and Characteristics of Spin-1 Hadrons Related to Parity Nonconservation in the Duffin – Kemmer – Petiau Formalism. *Physics of Particles and Nuclei Letters.* 2017;14(5):713–718. DOI: 10.1134/S1547477117050120.

7. Andreev VV, Deryuzhkova OM, Maksimenko NV. Covariant equations of motion of a spin $\frac{1}{2}$ particle in an electromagnetic field with allowance for polarizabilities. *Russian Physics Journal.* 2014;56(9):1069–1075. DOI: 10.1007/s11182-014-0141-x.

8. Vakulina EV, Maksimenko NV. Polarizability of pion in Duffin – Kemmer formalism. *Problems of physics, mathematics and technics*. 2013;3:16–18. Russian.

9. Ritus VI. [Quantum effects in the interaction of elementary particles with an intense electromagnetic field]. In: Ginzburg VL, editor. *Kvantovaya elektrodinamika yavlenii v intensivnykh polyakh. Trudy FIAN. Tom 111* [Quantum electrodynamics of phenomena in intense fields. Proceedings of the Physical Institute of the Academy of Sciences. Volume 111]. Moscow: Nauka; 1979. p. 5–151. Russian.

10. Fedorov FI. *Gruppa Lorentsa* [Lorenz Group]. Minsk: Nauka i tekhnika; 1979. 384 p. Russian.

11. Raduk AF. [Polarizing particle with spin $\frac{1}{2}$ in the field of a plane electromagnetic wave and in a constant magnetic field]. In: *Kovariantnye metody v teoreticheskoi fizike* [Covariant methods in theoretical physics]. Minsk: Institut fiziki AN BSSR; 1986. p. 93–101. Russian.

12. Krylov VB, Raduk AF, Fedorov FI. *Spinovye chastitsy v pole ploskoi elektromagnitnoi volny* [Spin particles in the field of a plane electromagnetic wave]. [Preprint No. 113]. Minsk: Institut fiziki AN BSSR; 1976. 59 p. Russian.

13. Beresteckiy VB, Lifshic EM, Pitaevskiy LP. *Kvantovaya elektrodinamika* [Kvantovaya elektrodinamika]. Moscow: Nauka; 1980. 704 p. Russian.

14. Volkov DM. Electron in the field of flat unpolarized electromagnetic waves from the point of view of the Dirac equation. *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki.* 1937;7:1286–1289. Russian.

15. Pardy M. Volkov solution for two laser beams and ITER. arXiv:hep-ph /050714141v1.

Статья поступила в редколлегию 12.11.2018.
Received by editorial board 12.11.2018.