УДК 517.958:537.311.1;621.315.592

МИГРАЦИЯ ЭЛЕКТРОНОВ ПО ТРЕХЗАРЯДНЫМ ДЕФЕКТАМ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ МАТРИЦЫ

Н. А. ПОКЛОНСКИЙ [1], ***А. Н. ДЕРЕВЯГО*** [1], ***С. А. ВЫРКО*** [1], ***А. И. КОВАЛЕВ*** [1]

[1] *Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Изучение полупроводниковых материалов с точечными радиационными дефектами кристаллической структуры в трех зарядовых состояниях (-1), (0), $(+1)$ важно для определения условий их стойкости при воздействии гамма-квантов, быстрых электронов и др. Такие дефекты в условиях ионизационного равновесия самодостаточны

Образец цитирования:
Поклонский НА, Деревяго АН, Вырко СА, Ковалев АИ. Миграция электронов по трехзарядным дефектам кристаллической матрицы. *Журнал Белорусского государственного университета. Физика.* 2020;1:41–53.
https://doi.org/10.33581/2520-2243-2020-1-41-53

For citation:
Poklonski NA, Dzeraviaha AN, Vyrko SA, Kavaleu AI. Migration of electrons via triple-charged defects of crystal matrix. *Journal of the Belarusian State University. Physics.* 2020;1:41–53. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-2243-2020-1-41-53

Авторы:
Николай Александрович Поклонский – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры физики полупроводников и наноэлектроники физического факультета.
Александр Николаевич Деревяго – аспирант кафедры физики полупроводников и наноэлектроники физического факультета. Научный руководитель – Н. А. Поклонский.
Сергей Александрович Вырко – кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории физики электронных материалов кафедры физики полупроводников и наноэлектроники физического факультета.
Александр Игоревич Ковалев – кандидат физико-математических наук; старший преподаватель кафедры физики полупроводников и наноэлектроники физического факультета.

Authors:
Nikolai A. Poklonski, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of semiconductor physics and nanoelectronics, faculty of physics.
poklonski@bsu.by
http://orcid.org/0000-0002-0799-6950
Aliaksandr N. Dzeraviaha, postgraduate student at the department of semiconductor physics and nanoelectronics, faculty of physics.
deralexn@list.ru
Sergey A. Vyrko, PhD (physics and mathematics); senior researcher at the laboratory of physics of electronic materials, department of semiconductor physics and nanoelectronics, faculty of physics.
vyrko@bsu.by
Aliaksandr I. Kavaleu, PhD (physics and mathematics); senior lecturer at the department of semiconductor physics and nanoelectronics, faculty of physics.
kovalevai@bsu.by

для обеспечения электрической нейтральности материала, что и обусловливает его радиационную стойкость. В кристаллах кремния и алмаза указанные дефекты при их накоплении стабилизируют уровень Ферми в окрестности одной трети ширины запрещенной зоны от потолка валентной зоны. В работе приводится аналитическое описание стационарного прыжкового переноса электронов в полупроводнике при учете совместной миграции по этим трехзарядным дефектам и одиночных электронов, и пар электронов. Рассматривается кристаллический полупроводник как матрица, содержащая в превалирующей концентрации неподвижные точечные дефекты одного сорта. Впервые в дрейфово-диффузионном приближении построена феноменологическая теория сосуществующей миграции как одиночных электронов (переходы из зарядового состояния (-1) в состояние (0) и из состояния (0) в состояние $(+1)$), так и пар электронов (переходы из состояния (-1) в состояние $(+1)$) посредством их прыжков между такими дефектами при наложении на полупроводник внешнего стационарного электрического поля. В линейном приближении получены аналитические выражения для длины экранирования статического электрического поля и длины прыжковой диффузии электронов, мигрирующих по дефектам. Показано, что дополнительный вклад прыжкового переноса пар электронов приводит к уменьшению длины экранирования, а также изменяет длину диффузии.

Ключевые слова: кристаллический полупроводник; трехзарядные точечные дефекты; прыжки одиночных электронов; прыжки пар электронов; длина экранирования; длина диффузии.

Благодарность. Работа поддержана программой «Физматтех» Республики Беларусь, Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований (грант № Ф19РМ-054), а также рамочной программой Европейского союза по развитию научных исследований и технологий «Горизонт-2020» (грант № H2020-MSCA-RISE-2019-871284 SSHARE).

MIGRATION OF ELECTRONS VIA TRIPLE-CHARGED DEFECTS OF CRYSTAL MATRIX

N. A. POKLONSKI[a]***, A. N. DZERAVIAHA***[a]***, S. A. VYRKO***[a]***, A. I. KAVALEU***[a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*
Corresponding author: N. A. Poklonski (poklonski@bsu.by)

The study of semiconductor materials with point radiation defects of the crystal structure in three charge states (-1), (0), $(+1)$ is important for determining the conditions of their radiation resistance under the influence of gamma rays, fast electrons, etc. Such defects are self-sufficient to ensure electrical neutrality of the material under conditions of ionization equilibrium, that issue determines the radiation resistance of materials. In silicon and diamond crystals, such irradiation-induced defects during their accumulation stabilize the Fermi level in the vicinity of one third of the band gap from the top of the valence band. The purpose of the work is an analytical description of the stationary hopping electron transfer in a semiconductor, taking into account the joint migration of both the single electrons and the pairs of electrons over these triple-charged defects. A crystalline semiconductor is considered as a matrix containing immobile point defects of one sort in the prevailing concentration. For the first time in the drift-diffusion approximation, a phenomenological theory is constructed of coexisting migration of both the single electrons (transitions from the charge state (-1) to state (0) and from the state (0) to state $(+1)$), and the electron pairs (transitions from the state (-1) to state $(+1)$) by means of their hopping between such defects when an external stationary electric field is applied to the semiconductor. In the linear approximation, analytical expressions are obtained for the screening length of a static electric field and the length of the hopping diffusion of electrons migrating via such defects. It is shown that the additional contribution of the hopping transport of electron pairs leads to a decrease in the screening length and also changes the diffusion length.

Keywords: crystalline semiconductor; triple-charged point defects; hopping of single electrons; hopping of electron pairs; screening length; diffusion length.

Acknowledgements. The work was supported by the Belarusian National Research Program «Fizmattekh», Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (grant No. F19RM-054), and by the European Union Framework Programme for Research and Innovation «Horizon 2020» (grant No. H2020-MSCA-RISE-2019-871284 SSHARE).

Введение

Мотивацией к теоретическому исследованию прыжкового переноса электронов по трехзарядным точечным дефектам (имеющим заряд −1, 0 или +1 в единицах элементарного заряда) в полупроводниковых материалах являются три факта: 1) такие дефекты можно вводить в больших концентрациях ионизирующим излучением (радиацией) в сочетании с последующим термическим отжигом; 2) зарядовые состояния (-1) и $(+1)$ дефектов обеспечивают их самокомпенсацию; 3) радиационно-термическое происхождение указанных дефектов определяет стабильность параметров материала при последующем воздействии радиации (см., например, [1]). Поэтому данные исследования перспективны для разработки концепции проектирования элементов и приборных структур, работающих в ближнем космосе [2]. На основе таких материалов предлагается создать варикап [3] и выпрямитель прыжкового электрического тока [4], что представляется и актуальным, и возможным.

В [5] рассмотрена прыжковая миграция одиночных электронов по точечным трехзарядным дефектам (переходы между зарядовыми состояниями $(-1) \to (0)$ и $(0) \to (+1)$). В [6] исследована прыжковая миграция только пар электронов (иначе – биполяронов) между зарядовыми состояниями (-1) и $(+1)$ точечных трехзарядных дефектов. Ясно, что в результате прыжков как одиночных электронов, так и пар электронов зарядовые состояния неподвижных точечных дефектов мигрируют по кристаллу. Поэтому представляет практический интерес рассмотреть сосуществующую прыжковую миграцию и одиночных электронов, и пар электронов между трехзарядными точечными дефектами (см., например, [7; 8]).

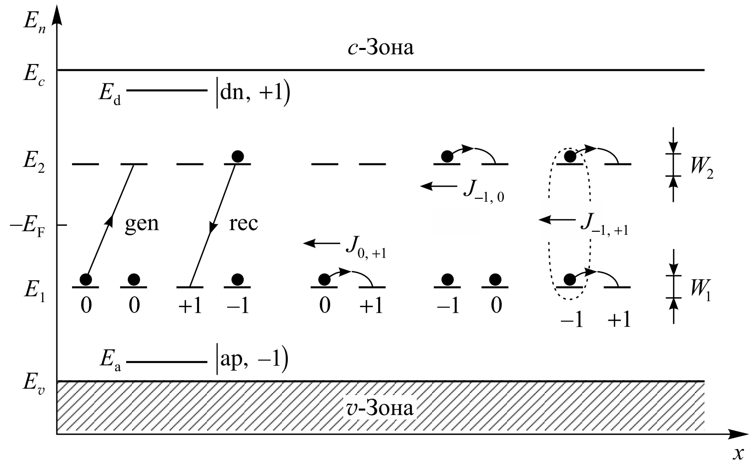
Цель работы – аналитическое описание прыжкового переноса электронов в полупроводнике, содержащем равномерно распределенные по объему неподвижные точечные дефекты, которые могут находиться в трех зарядовых состояниях (-1), (0) и $(+1)$. Ставится задача объединить подходы работ [5; 6], т. е. учесть прыжковую миграцию и одиночных электронов, и пар электронов по этим дефектам совместно.

Постановка задачи

Предположим, что в объеме кристаллического полупроводника равномерно распределены точечные дефекты, каждый из которых может находиться в одном из трех зарядовых состояний (-1), (0) или $(+1)$. Общая концентрация этих дефектов $N = N_{-1} + N_0 + N_{+1}$, где N_{-1}, N_0 и N_{+1} – равновесные концентрации дефектов в зарядовых состояниях (-1), (0) и $(+1)$ соответственно. Кроме этого, в кристаллической матрице содержатся водородоподобные доноры $|\mathrm{dn}, +1)$, все в зарядовом состоянии $(+1)$, и акцепторы $|\mathrm{ap}, -1)$, все в зарядовом состоянии (-1) (см. рисунок). В отсутствие внешнего электрического поля и прыжкового тока (т. е. в термодинамическом равновесии) выполняется условие электрической нейтральности: $N_{-1} + N_{\mathrm{ap},-1} = N_{+1} + N_{\mathrm{dn},+1}$, где $N_{\mathrm{ap},-1}$ и $N_{\mathrm{dn},+1}$ – концентрации водородоподобных акцепторов и доноров соответственно. Изменяя величины $N_{\mathrm{ap},-1}$ и $N_{\mathrm{dn},+1}$, можно управлять распределением трехзарядных дефектов по состояниям (-1), (0) и $(+1)$. Далее принимается, что $N_{-1} \gg N_{\mathrm{ap},-1}$ и $N_{+1} \gg N_{\mathrm{dn},+1}$, т. е. полупроводник по условию электронейтральности является самокомпенсированным ($N_{-1} = N_{+1}$).

Рассматриваются диапазоны температур и концентраций дефектов, при которых вклад в электрическую проводимость электронов c-зоны и (или) дырок v-зоны несуществен, и поэтому электрический ток в полупроводнике обусловлен только электронами, прыгающими по дефектам в зарядовых состояниях (-1), (0) и $(+1)$ (см. рисунок).

Пусть к находящемуся при постоянной температуре полупроводниковому образцу в отсутствие внешнего фотовозбуждения приложено однородное стационарное электрическое поле. Выберем декартову систему координат (x, y, z) так, чтобы направление оси x совпало с направлением вектора напряженности электрического поля. На границах образца по оси x расположены два плоских металлических электрода (контакта). Принимается, что расстояние между электродами много больше характерных параметров размерности длины, сопоставляемых процессу переноса электронов между дефектами. Электроды могут служить, с одной стороны, обкладками заряженного плоского электрического конденсатора, между которыми размещен полупроводниковый образец без возбуждения в нем тока, с другой стороны, – омическими контактами к полупроводниковому образцу для возбуждения в нем электрического тока прыгающими электронами. Под действием внешнего стационарного электрического поля в полупроводнике с трехзарядными точечными дефектами, занимающем полупространство $x \geq 0$, происходят следующие три процесса.



Одноэлектронная энергия E_n (отсчитанная от $E_v = 0$) как функция координаты x в однородном кристаллическом полупроводнике с точечными трехзарядными дефектами (средние значения уровней энергии $E_1 > 0$ и $E_2 > 0$ со среднеквадратичными флуктуациями W_1 и W_2): $E_F < 0$ – уровень Ферми, $E_c - E_v = E_g > 0$ – энергетическая щель между порогами подвижности для электронов c-зоны и для дырок v-зоны; $E_a \ll E_1$ – уровень энергии акцепторов $|\mathrm{ap}, -1)$, отсчитанный от E_v; $E_d \ll E_g - E_2$ – уровень энергии доноров $|\mathrm{dn}, +1)$, отсчитанный от E_c; gen и rec – переходы электронов, соответствующие тепловой генерации и рекомбинации зарядовых состояний (-1) и $(+1)$ дефектов

Single-electron energy E_n (counted from $E_v = 0$) as a function of x coordinate in a homogeneous semiconductor with point triple-charged defects (average values of energy levels $E_1 > 0$ and $E_2 > 0$ with root-mean-square fluctuations W_1 and W_2): $E_F < 0$ is the Fermi level, $E_c - E_v = E_g > 0$ is the energy gap between the mobility edges for electrons of the c-band and for holes of the v-band; $E_a \ll E_1$ is the energy level of acceptors $|\mathrm{ap}, -1)$ counted from E_v and $E_d \ll E_g - E_2$ is the energy level of donors $|\mathrm{dn}, +1)$ counted from E_c; gen and rec are the electron transitions corresponding to the thermal generation and recombination of the charge states (-1) and $(+1)$ of defects

1. Дрейфово-диффузионная миграция одиночных электронов, совершающих прыжки между зарядовыми состояниями дефектов $(-1) \to (0)$ и $(0) \to (+1)$, а также прыжки $(-1) \to (+1)$ пар электронов. Уравнения для стационарных плотностей прыжковых токов в дрейфово-диффузионном приближении имеют вид [3; 6; 9]

$$J_{-1,0}(x) = eN_{-1,0}(x)\left(M_{-1,0}E(x) + D_{-1,0}\frac{d}{dx}\ln\frac{N_{-1}(x)}{N_0(x)}\right),$$

$$J_{0,+1}(x) = eN_{0,+1}(x)\left(M_{0,+1}E(x) + D_{0,+1}\frac{d}{dx}\ln\frac{N_0(x)}{N_{+1}(x)}\right), \tag{1}$$

$$J_{-1,+1}(x) = 2eN_{-1,+1}(x)\left(M_{-1,+1}E(x) + D_{-1,+1}\frac{d}{dx}\ln\frac{N_{-1}(x)}{N_{+1}(x)}\right),$$

где $J_{-1,0}(x)$, $J_{0,+1}(x)$ и $J_{-1,+1}(x)$ – плотности прыжковых токов одиночных электронов и пар электронов; e – элементарный заряд; $E(x)$ – напряженность электрического поля внутри полупроводника; $N_{-1}(x)$, $N_0(x)$, $N_{+1}(x)$ – концентрации дефектов в зарядовых состояниях (-1), (0), $(+1)$ соответственно; $N_{-1,0}(x) = \dfrac{N_{-1}(x)N_0(x)}{N}$ – концентрация одиночных электронов, прыгающих между дефектами в зарядовых состояниях (-1) и (0); $N_{0,+1}(x) = \dfrac{N_0(x)N_{+1}(x)}{N}$ – концентрация одиночных электронов, прыгающих между дефектами в зарядовых состояниях (0) и $(+1)$; $N_{-1,+1}(x) = \dfrac{N_{-1}(x)N_{+1}(x)}{N}$ – концентрация пар электронов, прыгающих между дефектами в зарядовых состояниях (-1) и $(+1)$; $M_{-1,0}$, $M_{0,+1}$ и $D_{-1,0}$,

$D_{0,\,+1}$ – дрейфовые прыжковые подвижности и коэффициенты диффузии одиночных электронов по дефектам, $M_{-1,\,+1}$ и $D_{-1,\,+1}$ – дрейфовая подвижность и коэффициент прыжковой диффузии пар электронов. Отметим, что величины $M_{-1,\,0}$, $M_{0,\,+1}$, $M_{-1,\,+1}$ и $D_{-1,\,0}$, $D_{0,\,+1}$, $D_{-1,\,+1}$ определяются только равновесными (в отсутствие внешнего электрического поля и токов) концентрациями N_{-1}, N_0, N_{+1} дефектов и расположением их уровней энергии в запрещенной энергетической зоне полупроводника (см. рисунок).

2. Изменение величины электрического поля внутри полупроводника вследствие перераспределения зарядовых состояний дефектов и нарушения условия электронейтральности $N_{-1} = N_{+1}$. Описывается уравнением Пуассона для напряженности электрического поля [5; 6]

$$\frac{dE(x)}{dx} = \frac{e}{\varepsilon_r \varepsilon_0}\big(\delta N_{+1}(x) - \delta N_{-1}(x)\big), \tag{2}$$

здесь ε_r – относительная диэлектрическая проницаемость полупроводника (без учета вклада от дефектов); ε_0 – электрическая постоянная. Концентрации дефектов определяются как $N_Z(x) = N_Z + \delta N_Z(x)$, где $\delta N_Z(x)$ – отклонение концентрации дефектов в зарядовом состоянии (Z) от равновесного значения N_Z, $Z = -1,\ 0,\ +1$. $\sum\limits_Z \delta N_Z(x) = 0$, $N = N_{-1}(x) + N_0(x) + N_{+1}(x)$ – полная концентрация равномерно распределенных в полупроводниковом образце дефектов, не зависящая от x.

3. Генерационно-рекомбинационные процессы между дефектами в зарядовых состояниях (-1), (0), $(+1)$. Уравнение непрерывности для стационарного полного тока имеет вид

$$\frac{dJ_{-1,\,0}(x)}{dx} + \frac{dJ_{0,\,+1}(x)}{dx} + \frac{dJ_{-1,\,+1}(x)}{dx} = 0.$$

Прыжковые генерационно-рекомбинационные процессы между тремя зарядовыми состояниями неподвижных точечных дефектов (см. рисунок) при учете дивергенций трех плотностей прыжковых токов описываются уравнениями [5; 6]

$$\begin{gathered}
\frac{1}{e}\frac{dJ_{-1,\,0}(x)}{dx} + \frac{1}{2e}\frac{dJ_{-1,\,+1}(x)}{dx} = \alpha N_{-1}(x) N_{+1}(x) - \beta N_0^2(x), \\
\frac{1}{e}\frac{dJ_{0,\,+1}(x)}{dx} + \frac{1}{2e}\frac{dJ_{-1,\,+1}(x)}{dx} = -\alpha N_{-1}(x) N_{+1}(x) + \beta N_0^2(x), \\
\frac{1}{e}\frac{d}{dx}\big(J_{0,\,+1}(x) - J_{-1,\,0}(x)\big) = -2\big(\alpha N_{-1}(x) N_{+1}(x) - \beta N_0^2(x)\big),
\end{gathered} \tag{3}$$

где α – коэффициент прыжкового захвата одного электрона с дефекта в зарядовом состоянии (-1) на дефект в зарядовом состоянии $(+1)$, заканчивающегося появлением двух электрически нейтральных дефектов ($(-1) + (+1) \to 2(0)$); β – коэффициент тепловой ионизации двух электрически нейтральных дефектов ($2(0) \to (-1) + (+1)$). В состоянии равновесия выполняется равенство $\alpha N_{-1} N_{+1} = \beta N_0^2$.

Система нелинейных дифференциальных уравнений

Далее решаем стационарную задачу, т. е. считаем, что концентрации равномерно распределенных по кристаллу дефектов в зарядовых состояниях (-1), (0), $(+1)$ и плотности прыжковых токов не зависят от времени, иными словами, выполняются равенства

$$\frac{dN_{-1}(x)}{dx} + \frac{dN_0(x)}{dx} + \frac{dN_{+1}(x)}{dx} = 0, \quad \frac{dJ_{-1,\,0}(x)}{dx} + \frac{dJ_{0,\,+1}(x)}{dx} + \frac{dJ_{-1,\,+1}(x)}{dx} = 0. \tag{4}$$

Из (4) следует, что плотность суммарного стационарного прыжкового тока одиночных электронов $J_{-1,\,0}(x) + J_{0,\,+1}(x)$ и пар электронов $J_{-1,\,+1}(x)$ в полупроводнике не зависит от координаты x.

Объединим (1)–(3) с учетом (4) в систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$J_{-1,\,0}(x) = e\frac{N_{-1}(x)\,N_0(x)}{N}M_{-1,\,0}E(x) + \frac{eD_{-1,\,0}}{N}\left(\frac{dN_{-1}(x)}{dx}N_0(x) - \frac{dN_0(x)}{dx}N_{-1}(x)\right),$$

$$J_{0,\,+1}(x) = e\frac{N_0(x)N_{+1}(x)}{N}M_{0,\,+1}E(x) + \frac{eD_{0,\,+1}}{N}\left(\frac{dN_0(x)}{dx}N_{+1}(x) - \frac{dN_{+1}(x)}{dx}N_0(x)\right),$$

$$J_{-1,\,+1}(x) = 2e\frac{N_{-1}(x)\,N_{+1}(x)}{N}M_{-1,\,+1}E(x) + \frac{2eD_{-1,\,+1}}{N}\left(\frac{dN_{-1}(x)}{dx}N_{+1}(x) - \frac{dN_{+1}(x)}{dx}N_{-1}(x)\right),$$

$$\frac{dE(x)}{dx} = \frac{e}{\varepsilon_r\varepsilon_0}\big(\delta N_{+1}(x) - \delta N_{-1}(x)\big), \tag{5}$$

$$\frac{1}{2e}\frac{dJ_{-1,\,+1}(x)}{dx} + \frac{1}{e}\frac{dJ_{-1,\,0}(x)}{dx} = \alpha N_{-1}(x)N_{+1}(x) - \beta N_0^2(x),$$

$$\frac{1}{e}\frac{d}{dx}\big(J_{0,\,+1}(x) - J_{-1,\,0}(x)\big) = 2\big(-\alpha N_{-1}(x)N_{+1}(x) + \beta N_0^2(x)\big),$$

$$\frac{1}{2e}\frac{dJ_{-1,\,+1}(x)}{dx} + \frac{1}{e}\frac{dJ_{0,\,+1}(x)}{dx} = -\alpha N_{-1}(x)N_{+1}(x) + \beta N_0^2(x)$$

с неизвестными функциями $N_{-1}(x)$, $N_0(x)$, $N_{+1}(x)$, $E(x)$, $J_{-1,\,0}(x)$, $J_{0,\,+1}(x)$, $J_{-1,\,+1}(x)$.

Соотношения Нернста – Таунсенда – Эйнштейна – Смолуховского между дрейфовыми прыжковыми подвижностями и коэффициентами диффузии, согласно [3; 5; 9], имеют вид

$$\frac{M_{-1,\,0}}{D_{-1,\,0}} = \frac{e}{k_BT\xi_{-1,\,0}},\quad \frac{M_{0,\,+1}}{D_{0,\,+1}} = \frac{e}{k_BT\xi_{0,\,+1}},\quad \frac{M_{-1,\,+1}}{D_{-1,\,+1}} = \frac{2e}{k_BT\xi_{-1,\,+1}}, \tag{6}$$

где k_B – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура; $\xi_{-1,\,0} \geq 1$, $\xi_{0,\,+1} \geq 1$ и $\xi_{-1,\,+1} \geq 1$ – безразмерные параметры, зависящие от соотношений между энергетическими ширинами W_1 и W_2 зон трехзарядных дефектов (см. рисунок) и тепловой энергией k_BT. Если $W_1 + W_2 < k_BT$, то $\xi_{-1,\,0} = \xi_{0,\,+1} = \xi_{-1,\,+1} = 1$.

С учетом (6) систему (5) перепишем так:

$$\frac{dN_{-1}(x)}{dx}N_0(x) - \frac{dN_0(x)}{dx}N_{-1}(x) = -N_{-1}(x)\,N_0(x)\frac{eE(x)}{k_BT\xi_{-1,\,0}} + \frac{J_{-1,\,0}(x)N}{eD_{-1,\,0}},$$

$$\frac{dN_0(x)}{dx}N_{+1}(x) - \frac{dN_{+1}(x)}{dx}N_0(x) = -N_0(x)\,N_{+1}(x)\frac{eE(x)}{k_BT\xi_{0,\,+1}} + \frac{J_{0,\,+1}(x)N}{eD_{0,\,+1}},$$

$$\frac{dN_{-1}(x)}{dx}N_{+1}(x) - \frac{dN_{+1}(x)}{dx}N_{-1}(x) = -N_{-1}(x)\,N_{+1}(x)\frac{2eE(x)}{k_BT\xi_{-1,\,+1}} + \frac{J_{-1,\,+1}(x)N}{2eD_{-1,\,+1}},$$

$$\frac{dE(x)}{dx} = \frac{e}{\varepsilon_r\varepsilon_0}\big(\delta N_{+1}(x) - \delta N_{-1}(x)\big), \tag{7}$$

$$\frac{dJ_{-1,\,+1}(x)}{dx} + 2\frac{dJ_{-1,\,0}(x)}{dx} = 2e\big(\alpha N_{-1}(x)\,N_{+1}(x) - \beta N_0^2(x)\big),$$

$$\frac{d}{dx}\big(J_{0,\,+1}(x) - J_{-1,\,0}(x)\big) = 2e\big(-\alpha N_{-1}(x)\,N_{+1}(x) + \beta N_0^2(x)\big),$$

$$\frac{dJ_{-1,\,+1}(x)}{dx} + 2\frac{dJ_{0,\,+1}(x)}{dx} = 2e\big(-\alpha N_{-1}(x)\,N_{+1}(x) + \beta N_0^2(x)\big).$$

Из первых трех уравнений системы (7) можно найти соотношение между плотностями прыжковых токов одиночных электронов и пар электронов. Действительно, если домножить первое уравнение на $\frac{N_{+1}}{N_0}$, второе – на $\frac{N_{-1}}{N_0}$, сложить их, а затем из полученной суммы вычесть третье, то получим

$$\frac{J_{-1,\,0}(x)N_{+1}(x)}{D_{-1,\,0}N_0(x)}+\frac{J_{0,\,+1}(x)N_{-1}(x)}{D_{0,\,+1}N_0(x)}-\frac{J_{-1,\,+1}(x)}{2D_{-1,\,+1}}=\frac{eE(x)}{k_{\mathrm{B}}T}\frac{N_{-1}(x)N_{+1}(x)}{N}\left(\frac{1}{\xi_{-1,\,0}}+\frac{1}{\xi_{0,\,+1}}-\frac{2}{\xi_{-1,\,+1}}\right). \quad (8)$$

Входящие в формулы (6) параметры $\xi_{-1,\,0}$, $\xi_{0,\,+1}$ и $\xi_{-1,\,+1}$ определяются в состоянии равновесия и связаны равенством

$$\xi_{-1,\,+1}=2\frac{\xi_{-1,\,0}\xi_{0,\,+1}}{\xi_{-1,\,0}+\xi_{0,\,+1}}, \quad (9)$$

которое следует из уравнений (1) при условии, что напряженность поля $E(x)\neq 0$, а плотности прыжковых токов $J_{-1,\,0}(x)=J_{0,\,+1}(x)=J_{-1,\,+1}(x)=0$. Это условие соответствует размещенному между обкладками (электродами) заряженного плоского электрического конденсатора полупроводниковому образцу без возбуждения в нем тока.

Подставляя (9) в (8), находим связь плотности прыжкового тока пар электронов $J_{-1,\,+1}(x)$ с плотностями прыжковых токов $J_{-1,\,0}(x)$ и $J_{0,\,+1}(x)$ одиночных электронов:

$$J_{-1,\,+1}(x)=\frac{2D_{-1,\,+1}}{D_{-1,\,0}}\frac{N_{+1}(x)}{N_0(x)}J_{-1,\,0}(x)+\frac{2D_{-1,\,+1}}{D_{0,\,+1}}\frac{N_{-1}(x)}{N_0(x)}J_{0,\,+1}(x). \quad (10)$$

Далее, используя первые три уравнения системы (7) и условия (4), преобразуем производные концентраций дефектов в зарядовых состояниях (-1), (0) и $(+1)$ по x и перепишем (7) в виде

$$\frac{dN_{-1}(x)}{dx}=-\left(\frac{N_{-1,\,0}(x)}{\xi_{-1,\,0}}+2\frac{N_{-1,\,+1}(x)}{\xi_{-1,\,+1}}\right)\frac{e}{k_{\mathrm{B}}T}E(x)+\frac{\left(N_{+1}(x)+N_0(x)\right)}{N_0(x)}\frac{J_{-1,\,0}(x)}{eD_{-1,\,0}}+\frac{N_{-1}(x)}{N_0(x)}\frac{J_{0,\,+1}(x)}{eD_{0,\,+1}},$$

$$\frac{dN_{+1}(x)}{dx}=\left(\frac{N_{0,\,+1}(x)}{\xi_{0,\,+1}}+2\frac{N_{-1,\,+1}(x)}{\xi_{-1,\,+1}}\right)\frac{e}{k_{\mathrm{B}}T}E(x)-\frac{N_{+1}(x)}{N_0(x)}\frac{J_{-1,\,0}(x)}{eD_{-1,\,0}}-\frac{\left(N_{-1}(x)+N_0(x)\right)}{N_0(x)}\frac{J_{0,\,+1}(x)}{eD_{0,\,+1}},$$

$$\frac{dN_0(x)}{dx}=-\left(\frac{dN_{-1}(x)}{dx}+\frac{dN_{+1}(x)}{dx}\right),$$

$$\frac{dE(x)}{dx}=\frac{e}{\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0}\left(\delta N_{+1}(x)-\delta N_{-1}(x)\right), \quad (11)$$

$$\frac{dJ_{-1,\,+1}(x)}{dx}+2\frac{dJ_{-1,\,0}(x)}{dx}=2e\left(\alpha N_{-1}(x)N_{+1}(x)-\beta N_0^2(x)\right),$$

$$\frac{d}{dx}\left(J_{0,\,+1}(x)-J_{-1,\,0}(x)\right)=2e\left(-\alpha N_{-1}(x)N_{+1}(x)+\beta N_0^2(x)\right),$$

$$\frac{dJ_{-1,\,+1}(x)}{dx}+2\frac{dJ_{0,\,+1}(x)}{dx}=2e\left(-\alpha N_{-1}(x)N_{+1}(x)+\beta N_0^2(x)\right).$$

Решение линеаризованной системы уравнений

Ограничимся рассмотрением состояний исследуемой полупроводниковой системы вблизи равновесия (когда $E(x)=0$ и $J_{-1,\,0}(x)=J_{0,\,+1}(x)=J_{-1,\,+1}(x)=0$). Ее отклонение от положения равновесия во внешнем электрическом поле определяется величинами $\left|\delta N_{-1}(x)\right|\ll N_{-1}$, $\left|\delta N_0(x)\right|\ll N_0$, $\left|\delta N_{+1}(x)\right|\ll N_{+1}$, где N_{-1}, N_0 и N_{+1} – равновесные значения концентраций дефектов в зарядовых состояниях (-1), (0) и $(+1)$ соответственно. В линейном приближении система (11) принимает вид

$$\frac{d\left(\delta N_{-1}(x)\right)}{dx} = -\left(\frac{N_{-1,\,0}}{\xi_{-1,\,0}} + 2\frac{N_{-1,\,+1}}{\xi_{-1,\,+1}}\right)\frac{eE(x)}{k_{\mathrm{B}}T} + \frac{\left(N_{+1} + N_0\right)J_{-1,\,0}(x)}{eN_0 D_{-1,\,0}} + \frac{N_{-1}J_{0,\,+1}(x)}{eN_0 D_{0,\,+1}},$$

$$\frac{d\left(\delta N_{+1}(x)\right)}{dx} = \left(\frac{N_{0,\,+1}}{\xi_{0,\,+1}} + 2\frac{N_{-1,\,+1}}{\xi_{-1,\,+1}}\right)\frac{eE(x)}{k_{\mathrm{B}}T} - \frac{N_{+1}J_{-1,\,0}(x)}{eN_0 D_{-1,\,0}} - \frac{\left(N_{-1} + N_0\right)J_{0,\,+1}(x)}{eN_0 D_{0,\,+1}},$$

$$\frac{d\left(\delta N_{0}(x)\right)}{dx} = -\frac{d\left(\delta N_{-1}(x)\right)}{dx} - \frac{d\left(\delta N_{+1}(x)\right)}{dx},$$

$$\frac{dE(x)}{dx} = \frac{e}{\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0}\left(\delta N_{+1}(x) - \delta N_{-1}(x)\right), \qquad (12)$$

$$\frac{dJ_{-1,\,+1}(x)}{dx} + 2\frac{dJ_{-1,\,0}(x)}{dx} = 2e\left(\left(\alpha N_{+1} + 2\beta N_0\right)\delta N_{-1}(x) + \left(\alpha N_{-1} + 2\beta N_0\right)\delta N_{+1}(x)\right),$$

$$\frac{d}{dx}\left(J_{0,\,+1}(x) - J_{-1,\,0}(x)\right) = -2e\left(\left(\alpha N_{+1} + 2\beta N_0\right)\delta N_{-1}(x) + \left(\alpha N_{-1} + 2\beta N_0\right)\delta N_{+1}(x)\right),$$

$$\frac{dJ_{-1,\,+1}(x)}{dx} + 2\frac{dJ_{0,\,+1}(x)}{dx} = -2e\left(\left(\alpha N_{+1} + 2\beta N_0\right)\delta N_{-1}(x) + \left(\alpha N_{-1} + 2\beta N_0\right)\delta N_{+1}(x)\right),$$

где $N_{-1,\,0} = \dfrac{N_{-1}N_0}{N}$ – равновесная концентрация одиночных электронов, прыгающих между дефектами в зарядовых состояниях (-1) и (0); $N_{0,\,+1} = \dfrac{N_0 N_{+1}}{N}$ – равновесная концентрация одиночных электронов, прыгающих между дефектами в зарядовых состояниях (0) и $(+1)$; $N_{-1,\,+1} = \dfrac{N_{-1}N_{+1}}{N}$ – равновесная концентрация пар электронов, прыгающих между дефектами в зарядовых состояниях (-1) и $(+1)$.

Систему (12) можно сократить на два уравнения. Третье уравнение исключается с помощью обращения в нуль суммы отклонений концентраций дефектов от их равновесных значений, т. е. $\delta N_{-1}(x) + \delta N_0(x) + \delta N_{+1}(x) = 0$, а пятое, шестое и седьмое уравнения приводятся к двум уравнениям относительно токов $J_{-1,\,0}(x)$ и $J_{0,\,+1}(x)$ путем исключения $\dfrac{dJ_{-1,\,+1}(x)}{dx}$ после линеаризации (при $\delta N_Z(x) \to 0$ для $Z = -1, 0, +1$) выражения (10) для плотности тока:

$$J_{-1,\,+1}(x) = \frac{2D_{-1,\,+1}}{D_{-1,\,0}}\frac{N_{+1}}{N_0}J_{-1,\,0}(x) + \frac{2D_{-1,\,+1}}{D_{0,\,+1}}\frac{N_{-1}}{N_0}J_{0,\,+1}(x). \qquad (13)$$

В итоге в системе (12) останется пять уравнений:

$$\frac{d\left(\delta N_{-1}(x)\right)}{dx} = -\left(\frac{N_{-1,\,0}}{\xi_{-1,\,0}} + 2\frac{N_{-1,\,+1}}{\xi_{-1,\,+1}}\right)\frac{eE(x)}{k_{\mathrm{B}}T} + \frac{\left(N_{+1} + N_0\right)J_{-1,\,0}(x)}{eN_0 D_{-1,\,0}} + \frac{N_{-1}J_{0,\,+1}(x)}{eN_0 D_{0,\,+1}},$$

$$\frac{d\left(\delta N_{+1}(x)\right)}{dx} = \left(\frac{N_{0,\,+1}}{\xi_{0,\,+1}} + 2\frac{N_{-1,\,+1}}{\xi_{-1,\,+1}}\right)\frac{eE(x)}{k_{\mathrm{B}}T} - \frac{N_{+1}J_{-1,\,0}(x)}{eN_0 D_{-1,\,0}} - \frac{\left(N_{-1} + N_0\right)J_{0,\,+1}(x)}{eN_0 D_{0,\,+1}},$$

$$\frac{dE(x)}{dx} = \frac{e}{\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0}\left(\delta N_{+1}(x) - \delta N_{-1}(x)\right), \qquad (14)$$

$$\frac{dJ_{-1,\,0}(x)}{dx} = \frac{2e\left(\left(\alpha N_{+1} + 2\beta N_0\right)\delta N_{-1}(x) + \left(\alpha N_{-1} + 2\beta N_0\right)\delta N_{+1}(x)\right)}{1 + C^{-1}},$$

$$\frac{dJ_{0,\,+1}(x)}{dx} = -\frac{2e\left(\left(\alpha N_{+1} + 2\beta N_0\right)\delta N_{-1}(x) + \left(\alpha N_{-1} + 2\beta N_0\right)\delta N_{+1}(x)\right)}{1 + C},$$

где зависящие от координаты x неизвестные функции $\delta N_{-1}(x)$, $\delta N_{+1}(x)$, $E(x)$, $J_{-1,\,0}(x)$, $J_{0,\,+1}(x)$ указаны явно и введен коэффициент $C = \dfrac{D_{-1,\,0}\left(D_{0,\,+1}N_0 + 2D_{-1,\,+1}N_{-1}\right)}{D_{0,\,+1}\left(D_{-1,\,0}N_0 + 2D_{-1,\,+1}N_{+1}\right)}$. Отметим, что $C = 1$ при $D_{-1,\,+1} = 0$, и в этом случае выражения для $\dfrac{dJ_{-1,\,0}(x)}{dx}$ и $\dfrac{dJ_{0,\,+1}(x)}{dx}$ получаются такими же, как в работе [5].

Запишем систему линейных уравнений (14) в матричном виде (см., например, [10]):

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = A\boldsymbol{y}, \tag{15}$$

где

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \delta N_{-1}(x) \\ \delta N_{+1}(x) \\ E(x) \\ J_{-1,\,0}(x) \\ J_{0,\,+1}(x) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Элементы матрицы A выражаются через равновесные величины:

$$\begin{gathered} a_{13} = -\frac{e}{k_\text{B}T}\left(\frac{N_{-1,\,0}}{\xi_{-1,\,0}} + 2\frac{N_{-1,\,+1}}{\xi_{-1,\,+1}}\right), \quad a_{14} = \frac{N_{+1} + N_0}{eN_0 D_{-1,\,0}}, \quad a_{15} = \frac{N_{-1}}{eN_0 D_{0,\,+1}}, \\ a_{23} = \frac{e}{k_\text{B}T}\left(\frac{N_{0,\,+1}}{\xi_{0,\,+1}} + 2\frac{N_{-1,\,+1}}{\xi_{-1,\,+1}}\right), \quad a_{24} = -\frac{N_{+1}}{eN_0 D_{-1,\,0}}, \quad a_{25} = -\frac{N_{-1} + N_0}{eN_0 D_{0,\,+1}}, \\ a_{31} = -\frac{e}{\varepsilon_\text{r}\varepsilon_0}, \quad a_{32} = \frac{e}{\varepsilon_\text{r}\varepsilon_0}, \quad a_{41} = \frac{2e(\alpha N_{+1} + 2\beta N_0)}{1 + C^{-1}}, \quad a_{42} = \frac{2e(\alpha N_{-1} + 2\beta N_0)}{1 + C^{-1}}, \\ a_{51} = -\frac{2e(\alpha N_{+1} + 2\beta N_0)}{1 + C}, \quad a_{52} = -\frac{2e(\alpha N_{-1} + 2\beta N_0)}{1 + C}. \end{gathered} \tag{17}$$

Отсюда видно, что матрица A несимметрична ($a_{13} \neq a_{31}$ и т. д.).

Собственные значения λ матрицы A системы (15) находятся из характеристического уравнения $\det(A - \lambda\mathbf{1}) = 0$, где $\mathbf{1}$ – единичная матрица 5-го порядка, и равны

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\lambda_3 = -\frac{\sqrt{b - \sqrt{b^2 - d}}}{\sqrt{2}}, \quad \lambda_4 = -\lambda_5 = -\frac{\sqrt{b + \sqrt{b^2 - d}}}{\sqrt{2}}, \tag{18}$$

где $b = a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32} + a_{14}a_{41} + a_{24}a_{42} + a_{15}a_{51} + a_{25}a_{52}$; $d = 4\big((a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23})(a_{31}a_{42} - a_{32}a_{41}) + (a_{13}a_{25} -$ $- a_{15}a_{23})(a_{31}a_{52} - a_{32}a_{51}) + (a_{14}a_{25} - a_{15}a_{24})(a_{41}a_{52} - a_{42}a_{51})\big)$.

(Отметим, что положительные λ_3 и λ_5 быстро выводят систему из состояния, близкого к равновесному, в области $x > 0$, отрицательные λ_2 и λ_4 – в области $x < 0$, и система теряет смысл. Так как среди собственных значений имеются действительные, отличные от нуля, то решения исходной (11) и линеаризованной (14) систем дифференциальных уравнений вблизи равновесного состояния исследуемой системы близки [11; 12].)

Введем новые обозначения:

$$\begin{gathered} B_1 = a_{13}a_{25} - a_{15}a_{23}; \quad B_2 = a_{14}a_{25} - a_{15}a_{24}; \quad B_3 = a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23}; \\ B_4 = a_{15}a_{31} + a_{25}a_{32}; \quad B_5 = a_{15}a_{41} + a_{25}a_{42}; \quad B_6 = a_{31}a_{42} - a_{32}a_{41}; \\ B_7 = a_{31}a_{52} - a_{32}a_{51}; \quad B_8 = a_{41}a_{52} - a_{42}a_{51}; \quad B_9 = a_{15}a_{51} + a_{25}a_{52}. \end{gathered}$$

При подстановке a_{ij} из (17) в последние выражения получим, что $B_8 = 0$. Тогда $d = 4\left(B_3B_6 + B_1B_7\right)$.

Решение системы уравнений (15) в типичном случае, когда у матрицы A нет кратных собственных значений, имеет вид

$$\begin{pmatrix} \delta N_{-1}(x) \\ \delta N_{+1}(x) \\ E(x) \\ J_{-1,\,0}(x) \\ J_{0,\,+1}(x) \end{pmatrix} = C_1\boldsymbol{e}_1 + C_2\boldsymbol{e}_2\exp(-\lambda_3 x) + C_3\boldsymbol{e}_3\exp(\lambda_3 x) + C_4\boldsymbol{e}_4\exp(-\lambda_5 x) + C_5\boldsymbol{e}_5\exp(\lambda_5 x), \tag{19}$$

где C_i – постоянные коэффициенты, определяемые из граничных условий, $i = \overline{1, 5}$; $\boldsymbol{e}_i$ – собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_i (т. е. решение системы уравнений $(A - \lambda_i\mathbf{1})\boldsymbol{e}_i = 0$ относительно $\boldsymbol{e}_i$, $i = \overline{1, 5}$).

Собственные векторы матрицы A системы (15) суть

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \sigma_{-1,\,0} \\ \sigma_{0,\,+1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} \lambda_3\left(a_{15}\lambda_3^2 + B_1a_{32} + B_2a_{42}\right) \\ -\lambda_3\left(-a_{25}\lambda_3^2 + B_1a_{31} + B_2a_{41}\right) \\ -\left(B_4\lambda_3^2 + B_2B_6\right) \\ -\left(B_5\lambda_3^2 - B_1B_6\right) \\ -\left(B_9\lambda_3^2 - B_1B_7\right) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} \lambda_3\left(a_{15}\lambda_3^2 + B_1a_{32} + B_2a_{42}\right) \\ -\lambda_3\left(-a_{25}\lambda_3^2 + B_1a_{31} + B_2a_{41}\right) \\ B_4\lambda_3^2 + B_2B_6 \\ B_5\lambda_3^2 - B_1B_6 \\ B_9\lambda_3^2 - B_1B_7 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}_4 = \begin{pmatrix} \lambda_5\left(a_{15}\lambda_5^2 + B_1a_{32} + B_2a_{42}\right) \\ -\lambda_5\left(-a_{25}\lambda_5^2 + B_1a_{31} + B_2a_{41}\right) \\ -\left(B_4\lambda_5^2 + B_2B_6\right) \\ -\left(B_5\lambda_5^2 - B_1B_6\right) \\ -\left(B_9\lambda_5^2 - B_1B_7\right) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_5 = \begin{pmatrix} \lambda_5\left(a_{15}\lambda_5^2 + B_1a_{32} + B_2a_{42}\right) \\ -\lambda_5\left(-a_{25}\lambda_5^2 + B_1a_{31} + B_2a_{41}\right) \\ B_4\lambda_5^2 + B_2B_6 \\ B_5\lambda_5^2 - B_1B_6 \\ B_9\lambda_5^2 - B_1B_7 \end{pmatrix}, \tag{20}$$

где $\sigma_{-1,\,0} = eN_{-1,\,0}M_{-1,\,0} = -\dfrac{B_1}{B_2}$, $\sigma_{0,\,+1} = eN_{0,\,+1}M_{0,\,+1} = \dfrac{B_3}{B_2}$ – удельные прыжковые электрические проводимости одиночных электронов по дефектам.

Отметим, что по (17)–(20) отношение 4-й компоненты к 5-й в собственных векторах $\boldsymbol{e}_2$, …, $\boldsymbol{e}_5$ есть $\dfrac{B_5\lambda_3^2 - B_1B_6}{B_9\lambda_3^2 - B_1B_7} = \dfrac{B_5\lambda_5^2 - B_1B_6}{B_9\lambda_5^2 - B_1B_7} = \dfrac{a_{41}}{a_{51}}$. Если полупроводниковый образец поместить между обкладками заряженного плоского электрического конденсатора без возбуждения в нем стационарного тока, то в формуле (19) получим $C_1 = 0$. Тогда с учетом выражения (13) для линеаризованной плотности прыжкового тока пар электронов $J_{-1,\,+1}(x)$ из (19) в силу (20) следует $J_{-1,\,0}(x) + J_{0,\,+1}(x) + J_{-1,\,+1}(x) = 0$.

Длина экранирования поля и длина диффузии электронов

Получим явные формулы для длины экранирования электрического поля Λ_s и длины диффузии прыгающих электронов Λ_d в типичном случае отсутствия у матрицы A кратных собственных значений (см. соотношения (15)–(18)). Формально введем замены

$$b = \Lambda_\text{s}^{-2} + \Lambda_\text{d}^{-2}, \ d = 4\Lambda_\text{s}^{-2}\Lambda_\text{d}^{-2}Y_\text{s}Y_\text{d}, \tag{21}$$

где $Y_\text{s} = \dfrac{N_{-1,\,0} + N_{0,\,+1} + 4N_{-1,\,+1}}{\tilde{N}_{-1,\,0} + \tilde{N}_{0,\,+1} + 4\tilde{N}_{-1,\,+1}} \geq 1$; $Y_\text{d} = \dfrac{\tilde{N}_{-1,\,0}D_{-1,\,0} + \tilde{N}_{0,\,+1}D_{0,\,+1} + 4\tilde{N}_{-1,\,+1}D_{-1,\,+1}}{N_{-1,\,0}D_{-1,\,0} + N_{0,\,+1}D_{0,\,+1} + 4N_{-1,\,+1}D_{-1,\,+1}}$, $0 < Y_\text{d} \leq 1$, $Y_\text{s}Y_\text{d} > 0$, $\tilde{N}_{-1,\,0} = \dfrac{N_{-1,\,0}}{\xi_{-1,\,0}}$, $\tilde{N}_{0,\,+1} = \dfrac{N_{0,\,+1}}{\xi_{0,\,+1}}$, $\tilde{N}_{-1,\,+1} = \dfrac{N_{-1,\,+1}}{\xi_{-1,\,+1}}$; безразмерные параметры $\xi_{-1,\,0} \geq 1$, $\xi_{0,\,+1} \geq 1$ и $\xi_{-1,\,+1} \geq 1$

показывают по (6), насколько отношения коэффициентов прыжковой диффузии к прыжковым дрейфовым подвижностям превышают классическое значение $\frac{k_B T}{e}$.

Используя (21), собственные значения (18) представим в виде

$$\lambda_1 = 0,\quad \lambda_i = \pm\frac{\sqrt{\Lambda_s^{-2} + \Lambda_d^{-2} \pm \sqrt{\left(\Lambda_s^{-2} + \Lambda_d^{-2}\right)^2 - 4\Lambda_s^{-2}\Lambda_d^{-2} Y_s Y_d}}}{\sqrt{2}},\quad i = \overline{2, 5}. \tag{22}$$

Из (22) видно, что λ_i выражаются как через длину экранирования Λ_s, так и через длину диффузии Λ_d, характеризующие по (19) экспоненциальную зависимость $\delta N_{-1}(x)$, $\delta N_{+1}(x)$, $E(x)$, $J_{-1,0}(x)$, $J_{0,+1}(x)$ от пространственной координаты x.

Входящая в (22) длина экранирования Λ_s внешнего электрического поля в полупроводнике (получается из (19) при $E(0) \neq 0$, $E(\infty) = 0$ и $J_{-1,0}(x) + J_{0,+1}(x) + J_{-1,+1}(x) = 0$) есть

$$\Lambda_s = \left(a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32}\right)^{-1/2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 k_B T}{e^2\left(\tilde{N}_{-1,0} + \tilde{N}_{0,+1} + 4\tilde{N}_{-1,+1}\right)}}. \tag{23}$$

Отметим, что длина экранирования по (23) такая же, как и при $\frac{dJ_{-1,+1}(x)}{dx} = 0$ (ср. [5]).

В случае когда $N_0 \ll N_{-1}$ и $N_0 \ll N_{+1}$ (концентрация прыгающих пар электронов $N_{-1,+1}$ намного превышает концентрации прыгающих одиночных электронов $N_{-1,0}$ и $N_{0,+1}$), длина экранирования из (23) совпадает с длиной экранирования биполяронами из [6]:

$$\Lambda_s = \sqrt{\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 k_B T}{4e^2 \tilde{N}_{-1,+1}}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 \xi_{-1,+1} k_B T}{4e^2 N_{-1,+1}}},$$

где $N_{-1,+1} = \frac{N_{-1}N_{+1}}{N_{-1} + N_0 + N_{+1}} \approx \frac{N_{-1}N_{+1}}{N_{-1} + N_{+1}}$.

Длина диффузии Λ_d прыгающих между дефектами одиночных электронов и пар электронов (получается из (19) при $E(x) \neq 0$ и $J_{-1,0}(x) + J_{0,+1}(x) + J_{-1,+1}(x) \neq 0$) есть

$$\Lambda_d = \left(a_{14}a_{41} + a_{24}a_{42} + a_{15}a_{51} + a_{25}a_{52}\right)^{-1/2} =$$

$$= \sqrt{\frac{N_0\left(D_{0,+1}D_{-1,0}N_0 + D_{-1,0}D_{-1,+1}N_{-1} + D_{0,+1}D_{-1,+1}N_{+1}\right)}{\alpha N\left(D_{-1,0}N_{-1}N_0 + D_{0,+1}N_0 N_{+1} + 4D_{-1,+1}N_{-1}N_{+1}\right)}}. \tag{24}$$

Рассмотрим два частных случая выражения (24).

1. Пусть реализуются прыжки между дефектами только одиночных электронов и отсутствует прыжковый ток пар электронов, т. е. $D_{-1,+1} = 0$. Тогда из (24) получаем результат работ [5; 13]:

$$\Lambda_d = \sqrt{\frac{D_{0,+1}D_{-1,0}N_0}{\alpha N\left(D_{-1,0}N_{-1} + D_{0,+1}N_{+1}\right)}} \equiv \sqrt{D_d \tau_d},$$

где $D_d = \frac{D_{-1,0}D_{0,+1}\left(N_{-1,0} + N_{0,+1}\right)}{D_{-1,0}N_{-1,0} + D_{0,+1}N_{0,+1}}$ – эффективный коэффициент прыжковой диффузии одиночных электронов; $\tau_d = \frac{N_0}{\alpha N\left(N_{-1} + N_{+1}\right)}$ – эффективное время жизни двух дефектов в зарядовых состояниях (-1) и $(+1)$ относительно прыжка между ними одного электрона по схеме $(-1) + (+1) \to 2(0)$.

2. Пусть реализуются прыжки между дефектами только пар электронов и отсутствует прыжковый ток одиночных электронов ($D_{-1,0} = D_{0,+1} = 0$). Тогда из (24) получим $\Lambda_d = 0$.

Наконец, отметим, что отношение длин экранирования и диффузии определяет тип полупроводников: рекомбинационный (при $\Lambda_s < \Lambda_d$) или релаксационный (при $\Lambda_s > \Lambda_d$) [14; 15], т. е. их применимость при создании фоторезисторов (из рекомбинационного полупроводника) или, наоборот, низкочастотных силовых биполярных транзисторов (с базовой областью из релаксационного полупроводника).

Заключение

В дрейфово-диффузионном (гидродинамическом) приближении составлена система нелинейных дифференциальных уравнений для описания сосуществующей прыжковой миграции как одиночных электронов, так и пар электронов по трехзарядным точечным дефектам одного сорта (вида) в кристаллической полупроводниковой матрице. Впервые найдено решение линеаризованной системы дифференциальных уравнений для распределения концентраций неподвижных дефектов в зарядовых состояниях (-1), (0) и $(+1)$ вдоль напряженности внешнего электрического поля, а также плотностей токов одиночных электронов $(-1) \to (0)$ и $(0) \to (+1)$ и пар электронов $(-1) \to (+1)$, прыгающих по дефектам. Получены выражения для длины экранирования внешнего стационарного электрического поля и длины диффузии прыгающих электронов. Показано, что учет прыжков пар электронов с дефектов в зарядовом состоянии (-1) на дефекты в зарядовом состоянии $(+1)$ уменьшает длину экранирования за счет увеличения концентрации экранирующих зарядов, а также изменяет длину диффузии электронов.

Библиографические ссылки

1. Brudnyi VN. Charge neutrality in semiconductors: defects, interfaces, surface. *Russian Physics Journal.* 2013;56(7):754–756. DOI: 10.1007/s11182-013-0095-4.
2. Yamaguchi M. Radiation-resistant solar cells for space use. *Solar Energy Materials and Solar Cells.* 2001;68(1):31–53. DOI: 10.1016/S0927-0248(00)00344-5.
3. Poklonski NA, Vyrko SA, Zabrodskii AG. Calculation of capacitance of self-compensated semiconductors with intercenter hops of one and two electrons (by the example of silicon with radiation defects). *Semiconductors.* 2008;42(12):1388–1394. DOI: 10.1134/S1063782608120038.
4. Поклонский НА, Ковалев АИ, Вырко СА, Власов АТ. Полупроводниковый диод с прыжковой миграцией электронов по точечным дефектам кристаллической матрицы. *Доклады Национальной академии наук Беларуси.* 2017;61(3):30–37.
5. Поклонский НА, Ковалев АИ, Вырко СА. Дрейф и диффузия электронов по двухуровневым (трехзарядным) точечным дефектам в кристаллических полупроводниках. *Доклады Национальной академии наук Беларуси.* 2014;58(3):37–43.
6. Поклонский НА, Вырко СА, Ковалев АИ. Стационарная прыжковая миграция биполяронов по «мягким» точечным дефектам в частично разупорядоченных полупроводниках. *Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук.* 2014;3:91–96.
7. Pollak M. Hopping – past, present and future (?). *Physica Status Solidi B.* 2002;230(1):295–304. DOI: 10.1002/1521-3951(200203)230:1<295::AID- PSSB295>3.0.CO;2-C.
8. Shlimak I. *Is Hopping a science? Selected topics of hopping conductivity.* Singapore: World Scientific; 2015. 156 p. DOI: 10.1142/9522.
9. Poklonski NA, Vyrko SA, Kovalev AI, Dzeraviaha AN. Drift-diffusion model of hole migration in diamond crystals via states of valence and acceptor bands. *Journal of Physics Communications.* 2018;2:015013. DOI: 10.1088/2399-6528/aa8e26.
10. Korn GA, Korn TM. *Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review.* New York: Dover; 2000. xx+1130 p.
11. Арнольд ВИ. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. Москва: МЦНМО; 2014. 341 с.
12. Farlow SJ. *An introduction to differential equations and their applications*. New York: Dover; 2006. 640 p. (Dover Books on Mathematics).
13. Poklonskii NA, Lopatin SYu. Stationary hopping photoconduction among multiply charged impurity atoms in crystals. *Physics of the Solid State.* 1998;40(10):1636–1640. DOI: 10.1134/1.1130623.
14. Manifacier JC, Henisch HK. The concept of screening length in lifetime and relaxation semiconductors. *Journal of Physics and Chemistry of Solids.* 1980;41(11):1285–1288. DOI: 10.1016/0022-3697(80)90166-3.
15. Warner RM. Normalization in semiconductor problems. *Solid-State Electronics.* 1985;28(5):529–530. DOI: 10.1016/0038-1101(85)90118-2.

References

1. Brudnyi VN. Charge neutrality in semiconductors: defects, interfaces, surface. *Russian Physics Journal.* 2013;56(7):754–756. DOI: 10.1007/s11182-013-0095-4.
2. Yamaguchi M. Radiation-resistant solar cells for space use. *Solar Energy Materials and Solar Cells*. 2001;68(1):31–53. DOI: 10.1016/S0927-0248(00)00344-5.
3. Poklonski NA, Vyrko SA, Zabrodskii AG. Calculation of capacitance of self-compensated semiconductors with intercenter hops of one and two electrons (by the example of silicon with radiation defects). *Semiconductors.* 2008;42(12):1388–1394. DOI: 10.1134/S1063782608120038.
4. Poklonski NA, Kovalev AI, Vyrko SA, Vlasov AT. Semiconductor diode with hopping migration of electrons via point defects of crystalline matrix. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus.* 2017;61(3):30–37. Russian.
5. Poklonski NA, Kovalev AI, Vyrko SA. Drift and diffusion of electrons via two-level (triple-charged) point defects in crystalline semiconductors. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus.* 2014;58(3):37–43. Russian.
6. Poklonski NA, Vyrko SA, Kovalev AI. Stationary hopping migration of bipolarons via «soft» point defects in partly disordered semiconductors. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series.* 2014;3:91–96. Russian.
7. Pollak M. Hopping – past, present and future (?). *Physica Status Solidi B.* 2002;230(1):295–304. DOI: 10.1002/1521-3951(200203)230:1<295::AID- PSSB295>3.0.CO;2-C.

8. Shlimak I. *Is hopping a science? Selected topics of hopping conductivity.* Singapore: World Scientific; 2015. 156 p. DOI: 10.1142/9522.

9. Poklonski NA, Vyrko SA, Kovalev AI, Dzeraviaha AN. Drift-diffusion model of hole migration in diamond crystals via states of valence and acceptor bands. *Journal of Physics Communications.* 2018;2:015013. DOI: 10.1088/2399-6528/aa8e26.

10. Korn GA, Korn TM. *Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review.* New York: Dover; 2000. xx+1130 p.

11. Arnol'd VI. *Ordinary differential equations*. Berlin: Springer; 1992. 334 p.

Russian edition: Arnol'd VI. *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya.* Moscow: Moskovskii tsentr nepreryvnogo matematicheskogo obrazovaniya; 2014. 341 p.

12. Farlow SJ. *An introduction to differential equations and their applications*. New York: Dover; 2006. 640 p. (Dover Books on Mathematics).

13. Poklonskii NA, Lopatin SYu. Stationary hopping photoconduction among multiply charged impurity atoms in crystals. *Physics of the Solid State.* 1998;40(10):1636–1640. DOI: 10.1134/1.1130623.

14. Manifacier JC, Henisch HK. The concept of screening length in lifetime and relaxation semiconductors. *Journal of Physics and Chemistry of Solids.* 1980;41(11):1285–1288. DOI: 10.1016/0022-3697(80)90166-3.

15. Warner RM. Normalization in semiconductor problems. *Solid-State Electronics.* 1985;28(5):529–530. DOI: 10.1016/0038-1101(85)90118-2.

Статья поступила в редколлегию 03.12.2019.
Received by editorial board 03.12.2019.