УДК 539.1

НЕКОГЕРЕНТНОЕ РАССЕЯНИЕ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ НА ЯДРАХ ПРИ ПЛОСКОСТНОМ КАНАЛИРОВАНИИ

В. В. ТИХОМИРОВ[1)]

[1)]*Институт ядерных проблем Белорусского государственного университета,*
ул. Бобруйская, 11, 220030, г. Минск, Беларусь

Рассматривается проблема последовательного описания движения заряженных частиц высоких энергий в поле атомных плоскостей ориентированных кристаллов, имеющая принципиальное значение для управления движением частиц, получения интенсивного гамма-излучения и готовящегося измерения характеристик короткоживущих элементарных частиц, таких как магнитный и электрический дипольные моменты. На основании строго рассчитанного мгновенного изменения энергии поперечного движения частицы в поле плоскостей при рассеянии на остове отдельного атома получено выражение для средней скорости ее нарастания, учитывающее квантовые эффекты и резкое изменение плотности распределения частиц в межплоскостном канале. Найденное соотношение впервые дает возможность строго описать ограничения любых приложений эффекта каналирования в физике высоких энергий без введения параметров, вводившихся до сих пор на основе качественных соображений. Помимо этого, введены выражения для сечения рассеяния ядрами на большие углы и среднего квадрата угла рассеяния на малые, позволяющие сформулировать последовательный метод учета квантовой природы некогерентного и классической природы когерентного рассеяния на атомах кристаллических плоскостей при моделировании процесса распространения ультрарелятивистских частиц обоих знаков заряда как в условиях каналирования, так и вне его.

Образец цитирования:
Тихомиров ВВ. Некогерентное рассеяние ультрарелятивистских частиц на ядрах при плоскостном каналировании. *Журнал Белорусского государственного университета. Физика.* 2020;1:83–94.
https://doi.org/10.33581/2520-2243-2020-1-83-94

For citation:
Tikhomirov VV. Incoherent ultrarelativistic particle scattering by nuclei at planar channeling. *Journal of the Belarusian State University. Physics.* 2020;1:83–94. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-2243-2020-1-83-94

Автор:
Виктор Васильевич Тихомиров – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий лабораторией ядерной оптики и космомикрофизики.

Author:
Viktor V. Tikhomirov, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the laboratory of nuclear optics and astroparticle physics.
vvtikh@mail.ru

Ключевые слова: высокие энергии; релятивистская квантовая механика; каналирование частиц в кристаллах; дипольный момент; рассеяние частиц ядрами; когерентное рассеяние; некогерентное рассеяние.

Благодарность. Автор признателен за участие в обсуждении статьи доктору физико-математических наук, профессору, заслуженному деятелю науки Республики Беларусь Владимиру Григорьевичу Барышевскому, а также доктору Ксавье Артру (Лионский университет имени Клода Бернара, Франция), доктору физико-математических наук, профессору Султану Дабагову (Национальная лаборатория Фраскати, Рим, Италия; Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ») и доктору Андреа Маццолари (университет г. Феррары, Италия).

INCOHERENT ULTRARELATIVISTIC PARTICLE SCATTERING BY NUCLEI AT PLANAR CHANNELING

V. V. TIKHOMIROV [a]

[a] *Institute for Nuclear Problems, Belarusian State University, 11 Babrujskaja Street, Minsk 220030, Belarus*

The problem of high-energy charged particle motion in the field of atomic planes of oriented crystals, essential for particle beam manipulation, intensive gamma-radiation generation and prepared measurements of short-living elementary particle properties, such as magnetic and electric dipole momenta, is considered. A rigorously evaluated instant change of transverse channeling motion energy under the scattering by an atomic core is applied to deduce an expression for the average transverse energy growth rate, which takes into consideration both the quantum effects and sharp particle density variation inside an inter-plane channel. The latter makes it possible for the first time to describe numerically the key limitations of multiple applications of the channeling effects in high-energy physics, not involving the parameters, introduces earlier through the arbitrary qualitative considerations. Also, the expressions of both the large angle scattering cross section and average square of small scattering angles are obtained, making possible to formulate a consistent simulation method of both positively and negatively charged particles propagation both in and out of the channeling conditions, taking into consideration both quantum nature of incoherent and classical one of the coherent scattering of ultra-relativistic particles by crystal plane atoms.

Keywords: high-energy; relativistic quantum mechanics; particle channeling in crystals; dipole moment; scattering by nuclei; coherent scatting in crystals; incoherent scatting.

Acknowledgements. The author is grateful for the discussions to doctor of science, professor, honored scientist of Belarus Republic, Vladimir Grigorjevich Baryshevsky, as well as to doctor Xavier Artru (Claude Bernard University Lyon), doctor of science, professor Sultan Dabagov (Frascati National Laboratory, Rome, Italy; National Research Nuclear University MEPhI) and doctor Andrea Mazzolari (Ferrara University, Italy).

Введение

Эффект каналирования в изогнутых кристаллах предоставляет уникальные возможности управления движением и гамма-излучением быстрых частиц, а также изучения их свойств [1; 2]. Последние десятилетия активно исследовалось применение каналирования в изогнутых кристаллах для коллимации пучков Протонного суперсинхротрона (*Super Proton Synchrotron*, SPS), Сверхпроводящего суперколлайдера (*Superconducting Super Collider*, SSC), Большого адронного коллайдера (*Large Hadron Collider*, LHC) и разрабатываемого в настоящее время Будущего циркулярного коллайдера (*Future Circular Collider*, FCC) [2]. При этом в основном рассматривалось отклонение каналирующих частиц на малые (несколько десятков микрорадиан) углы тонкими (несколько миллиметров), слабо (с радиусом несколько десятков минимальных) изогнутыми кристаллами. Однако в ближайшее время на Большом адронном коллайдере планируется перейти к экспериментам по измерению магнитных дипольных и электрических квадрупольных, а также к поиску электрических дипольных моментов короткоживущих «очарованных» и «прекрасных» частиц [2–4] и другим экспериментам с фиксированной мишенью, требующим экстремальных толщин, кривизны и углов изгиба кристаллов, недостаточно исследованных экспериментально и описанных теоретически лишь на качественном уровне. Суть в том, что при значительной кривизне изгиба применение кристаллов при любых энергиях существенно ограничено эффектом деканалирования, развитие теории которого для данной области параметров также еще не завершено [5; 6]. Последовательному описанию некогерентного рассеяния на ядрах в условиях плоскостного каналирования в протяженных, сильно изогнутых кристаллах и посвящена данная работа.

Причиной отличия некогерентного рассеяния в кристаллах от кулоновского рассеяния в аморфном веществе, как и источником всех когерентных эффектов рассеяния и излучения, является неоднородность пространственного распределения атомов в плоскости прицельного параметра, характеризуемая амплитудой тепловых колебаний $u_1 \leq 10$ пм. Связанные с этой неоднородностью корреляции столкновений частиц с ядрами приводят к ослаблению рассеяния при прицельных параметрах $b \geq u_1$, а также перераспределению частиц по последним. Наиболее просто и единообразно (одинаково для всех частиц) подавление некогерентного рассеяния корреляциями проявляется в условиях близкого к однородному распределению потока частиц при движении в направлениях, далеких от параллельных осям и плоскостям кристалла [7; 8]. Этот эффект недавно наблюдался нами совместно с группой исследователей из университета г. Феррары (Италия) на микротроне Майнцского университета (Германия)[1]. Однако, сохраняясь и при малых углах падения частиц на оси и плоскости, этот эффект требует более сложного описания, учитывающего все особенности распределения ядер в достаточно широкой окрестности траектории частицы.

Ввиду своей специфики подобные эффекты вообще не учитывались квантовой теорией рассеяния и стали изучаться лишь недавно с использованием функции Вигнера, позволившей локально описать имеющее квантовую природу некогерентное рассеяние на классической траектории высокоэнергетичной частицы в усредненном потенциале цепочки атомов [6]. Кроме того, в работе [6] обнаружено, что неоднородность распределения ядер может приводить к отсутствию положительно определенной вероятности рассеяния на малые углы, и предложено моделировать отклонение частиц в этом случае при помощи среднего квадрата угла некогерентного рассеяния.

Для большинства ядер, расположенных в местах их высокой концентрации в центральных областях атомных цепочек и плоскостей, модификация процесса некогерентного рассеяния ограничивается переданными импульсами порядка $\dfrac{\hbar}{u_1} \sim 20\text{–}30$ кэВ/c (c – скорость света), связанными соотношением неопределенности Гейзенберга с характерным масштабом неоднородности распределения ядер, задаваемым амплитудой тепловых колебаний $u_1 \sim 10$ пм. При этом в областях пониженной концентрации становится существенным влияние удаленных областей локализации подавляющей массы ядер, в результате которого адекватное описание процесса рассеяния на малые углы на основе величины их локальной концентрации становится невозможным.

Эти сложности, однако, порождаются только требованием сохранения локальности описания некогерентного рассеяния на классической траектории, теряющим актуальность в случае продолжительного устойчивого движения. Действительно, в условиях каналирования на протяжении сотен и тысяч периодов определяющим является медленное достижение энергией поперечного движения пороговых величин быстро ускоряющегося ядерного деканалирования на расстоянии $x \leq 2{,}5u_1$ (рис. 1). Предшествующее ему медленное возрастание энергии поперечного движения носит стохастический характер, описываемый средней скоростью ее роста, которая может быть последовательно рассчитана на основе релятивистской квантовой механики при весьма реалистичных предположениях. Эта величина, нетривиально учитывающая также резкое изменение распределения плотности вероятности нахождения частиц вблизи точек отражения от атомных плоскостей, и будет положена в основу нижеследующего рассмотрения процесса деканалирования. Помимо этого, она позволит впервые ввести выражения для локальных характеристик некогерентного рассеяния, не содержащие дополнительных параметров.

Рост энергии поперечного движения при плоскостном каналировании

Переходя к расчету средней скорости вызываемого некогерентным рассеянием нарастания энергии поперечного движения, напомним, что поперечное движение каналирующих частиц, происходящее в направлении оси x, нормальной к кристаллическим, возможно изогнутым [1–4], плоскостям, определяется их эффективным потенциалом $U(x)$ и описывается учитывающим релятивистские эффекты «утяжеления» частиц [1] стационарным уравнением Шрёдингера для волновой функции $\varphi(x)$ (используется система единиц $c = \hbar = 1$)

$$\hat{H}_0\varphi = \left[\frac{\hat{p}_x^2}{2p} + U(x)\right]\varphi = \left[-\frac{1}{2p}\frac{d^2}{dx^2} + U(x)\right]\varphi = \varepsilon_n\varphi, \tag{1}$$

[1]Broad angular anisotropy of multiple scattering in a Si crystal / A. Mazzolari, A. Sytov, L. Bandiera, et al. // arXiv:1909.07691.

где p – практически равный полной энергии ε полный (трехмерный) импульс ультрарелятивистской частицы; $\hat{p}_x$ и ε_n – оператор одномерного импульса и величина энергии поперечного движения соответственно. С точки зрения описания устойчивости процесса каналирования основной интерес представляет начало ядерного деканалирования, наступающее при достижении точкой поворота x_0 области $\sim (2 \ldots 3) u_1 \sim 20-25$ пм (см. рис. 1). Благодаря быстрому спаданию в последней ядерной плотности

$$n_n(x_n) = \frac{n_0 d}{\sqrt{2\pi} u_1} e^{-\frac{x_n^2}{2u_1^2}} \tag{2}$$

(см. рис. 1), где d – межплоскостное расстояние, достаточно рассмотреть рассеяние в узком координатном интервале вблизи x_0, используя линейное разложение потенциала

$$U(x \approx x_0) \approx \varepsilon_n + U'(x_0)(x - x_0) = \varepsilon_n - e\mathscr{E}(x - x_0), \tag{3}$$

превращающее общее уравнение (1) в уравнение Эйри [9]

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + 2pe\mathscr{E}(x - x_0)\right]\varphi(x) = \left[\frac{d^2}{d\xi^2} - (\xi_0 - \xi)\right]\varphi(\xi) = 0, \tag{4}$$

в котором введена безразмерная координата

$$\xi = \xi' x = \sqrt[3]{2e|\mathscr{E}|p}\, x,$$

$$\xi_0 = \xi' x_0 = \sqrt[3]{2e|\mathscr{E}|p}\, x_0,$$

$$\xi' \equiv \frac{d\xi}{dx} = \sqrt[3]{2e|\mathscr{E}|p} = \text{const} > 0. \tag{5}$$

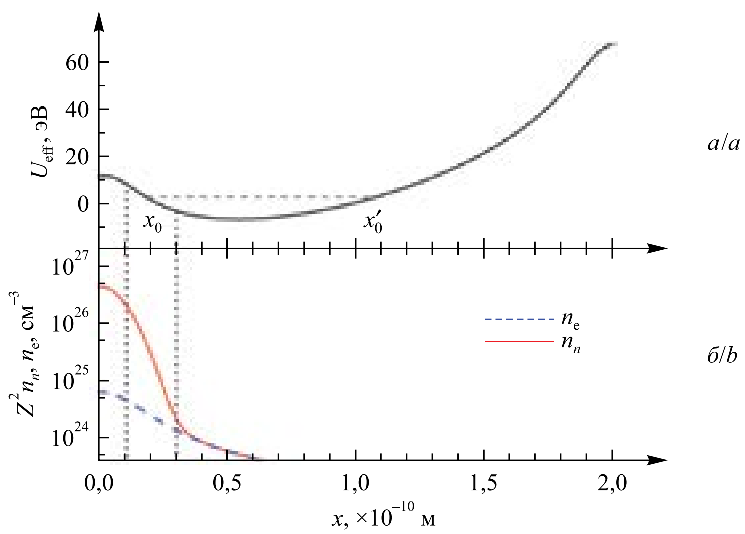

Рис. 1. Зависимости от поперечной координаты рассчитанного для положительно заряженных частиц с энергией 1 ТэВ эффективного потенциала плоскостей (110) кристалла германия, изогнутого с радиусом 5 м (*а*), концентрации электронов n_e и домноженной на квадрат атомного номера ($Z = 32$) концентрации ядер n_n (*б*).
Горизонтальный штриховой отрезок обозначает область устойчивого каналированного движения между точками поворота x_0 и x'_0. Вертикальные пунктирные линии ограничивают область применения линейной аппроксимации эффективного потенциала в условиях резкого спадания концентрации ядер вблизи левой точки поворота каналированного движения

Fig. 1. Effective potential of (110) germanium crystal planes evaluated for 1 TeV positively charged particles and 5 m bending radius (*a*); electron concentration n_e and multiplied by the atomic number $Z = 32$ squared nuclei concentration n_n (*b*).
The horizontal dashed line depicts the region of stable channeling motion between the turning points with coordinates of x_0 and x'_0. The vertical dotted lines limit the region of linear effective potential approximation, applied under the sharp nuclear concentration drop near the left channeling motion turning point

Уравнение (4) имеет решение

$$\varphi(x-x_0)=\sqrt{\frac{2\pi p}{\xi'}}\mathrm{Ai}(\xi_0-\xi)=\sqrt{\frac{p}{2\pi\xi'}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(i(\xi_0-\xi)t+i\frac{t^3}{3}\right)dt, \tag{6}$$

в котором Ai – функция Эйри [10], а нормировка выбрана так, чтобы усредненная по быстрым пространственным осцилляциям плотность вероятности

$$\left\langle\left|\varphi(x)\right|^2\right\rangle=v_x^{-1}(x), \tag{7}$$

где $v_x(x)=\sqrt{\dfrac{2e|\mathscr{E}|(x-x_0)}{p}}$ – скорость классического поперечного движения в точке x, одновременно соответствовала нормировке $\dfrac{d}{dt}=\dfrac{dx}{v_x(x)}$ на единицу времени.

Среднее изменение поперечной энергии каналированной частицы при некогерентном рассеянии на остове отдельного атома можно рассчитать на основании уравнения Шрёдингера:

$$i\frac{d\psi}{dz}\approx\hat{H}\psi=-\frac{1}{2p}\frac{d^2\psi}{dx^2}+\varepsilon_n\psi+\left[U(x)+\delta U(x-x_n,\,y-y_n,\,z-z_n)\right]\psi, \tag{8}$$

$$\hat{H}=\hat{H}_0+\delta U(x-x_n,\,y-y_n,\,z-z_n),$$

возмущенного эффективным потенциалом δU атома с ядром в произвольной точке $(x_n,\,y_n,\,z_n)$, учитывающим вклад этого атома в усредненный потенциал [6] (см. (10) ниже). Решение

$$\psi(x-x_n,\,y-y_n,\,z_n+0)=\exp\left(-i\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta U(x-x_n,\,y-y_n,\,z-z_n)\frac{dz}{v}\right)\varphi(x) \tag{9}$$

уравнения (8) в точке z_n+0 непосредственно за возмущающим атомом находится методом эйконала и содержит интеграл от эффективного потенциала атома:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta U(x-x_n,\,y-y_n,\,z-z_n)\frac{dz}{v}=\frac{Z\alpha}{\pi v}\int\frac{e^{-i\chi_x x_n-i\chi_y y_n}-e^{-\chi^2\frac{u_1^2}{2}}}{\chi^2+k_s^2}e^{i\chi_x x+i\chi_y y}d\chi_x d\chi_y, \tag{10}$$

где $\alpha\approx\dfrac{1}{137}$ – постоянная тонкой структуры; параметр $k_s=\dfrac{\hbar}{R}$ учитывает экранирование потенциала ядра электронами, описываемое радиусом экранирования R, а гауссова экспонента – влияние тепловых колебаний кристаллической решетки [6]. Поясним также, что приводящее к выражению (9) пренебрежение производными от экспоненциального сомножителя основано на оценках $|\varphi'|\sim\sqrt{pU}|\varphi|$ и $\left|\int\dfrac{U'dz}{v}\right|\sim U.$ Благодаря тому что в момент рассеяния пространственное перераспределение плотности вероятности произойти не успевает, соотношение (9) оказывается достаточным для нахождения изменения поперечной энергии

$$\left\langle\Delta\varepsilon_n\right\rangle=\int\psi^*\hat{H}\psi dx-\varepsilon_n=$$

$$=\frac{2\pi p}{\xi'}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dx}\delta U(x-x_n,\,y-y_n,\,z-z_n)\frac{dz}{v}\right)^2\mathrm{Ai}^2(x-x_0)dxdy, \tag{11}$$

которое сводится к изменению ее кинетической составляющей, порождаемому скачком (10) фазы волновой функции (9).

В силу положительной определенности выражение (11) позволяет описать рассеяние на отдельном атоме решетки, что весьма затруднительно при использовании функции Вигнера, подобным свойством не обладающей [6]. Однако в данной статье мы рассмотрим результирующее действие некогерентного рассеяния на всех атомах плоскости, для чего свернем (11) с функцией их распределения (2). Подставляя далее интегральные выражения для функции Эйри (6) и модифицированного атомного потенциала (10), интегрируя по x, y, а также по t и χ_y в одном из интегралов (6) или (10), переходим от (11) к выражению

$$\left\langle \Delta\varepsilon_n \right\rangle = -\frac{Z^2\alpha^2 n_0 d}{\pi v^2 \xi'^2} \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(\zeta+\eta)^2\frac{u_1^2}{2}} - e^{-\left(\zeta^2+\eta^2\right)\frac{u_1^2}{2}}}{\left(\zeta^2+\chi_y^2+k_s^2\right)\left(\eta^2+\chi_y^2+k_s^2\right)} e^{i\xi_0(\zeta+\eta) + \frac{2i}{3}\left(\frac{\zeta+\eta}{2\xi'}\right)^3 + i\frac{\zeta+\eta}{\xi'}t^2} \zeta d\zeta \eta d\eta dt d\chi_y, \tag{12}$$

где переменные ζ и η играют роль переменной χ_x в двух входящих в (11) интегралах (10). Обозначив

$$k = \frac{\zeta+\eta}{2},\ q_x = \frac{\zeta-\eta}{2},\ q_y = \chi_y \tag{13}$$

для импульсной переменной интегрирования и двух компонент передаваемого импульса соответственно и выполнив интегрирование по t и q_y, преобразуем выражение (12) к виду

$$\left\langle \Delta\varepsilon_n\left(x_0,\ q_1 \le \left|q_x\right| \le q_2\right)\right\rangle = \frac{4Z^2\alpha^2 n_0 d}{v^2\xi'}\sqrt{\frac{\pi}{2\xi'}} \times$$

$$\times \int\limits_{q_1}^{q_2}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{q_x^2-k^2}{\sqrt{k}} \frac{\left(\exp\left(-2k^2u_1^2\right) - \exp\left[-\left(q_x^2+k^2\right)u_1^2\right]\right)\cos\left(2x_0k + \frac{2k^3}{3\xi'^3} + \frac{\pi}{4}\right)dk\, dq_x}{\sqrt{\left(q_x+k\right)^2+k_s^2}\sqrt{\left(q_x-k\right)^2+k_s^2}\left(\sqrt{\left(q_x+k\right)^2+k_s^2}+\sqrt{\left(q_x-k\right)^2+k_s^2}\right)} \approx$$

$$\approx \frac{p}{2}\frac{4\pi Z^2\alpha^2}{v^2p^2\xi'}\ln\left(\frac{q_2}{q_1}\right)\frac{n_0 dp}{\sqrt{2\xi' x_0}} e^{-\frac{x_0^2}{2u_1^2}}, \tag{14}$$

где для последующего разделения вкладов больших и малых углов рассеяния введена верхняя граница интервала интегрирования по переданному импульсу q_2. Его нижняя граница q_1 использована для иллюстрации перехода к пределу однородной среды, соответствующему сечению рассеяния на экранированном электронами кулоновском потенциале атомного ядра:

$$\frac{d^2\sigma_{\text{Coul}}}{dq^2} = \frac{4Z^2\alpha^2}{v^2\left(q^2+k_s^2\right)^2}, \tag{15}$$

где $q^2 = q_x^2 + q_y^2$. Приведенное в (14) приближенное значение в пределе $q_2 > q_1 \gg \frac{\hbar}{u_1}$, как видно, равно произведению среднего изменения энергии поперечного движения при передаче x-компоненты импульса $q_1 < \left|q_x\right| < q_2$ одному ядру и приближенного значения интеграла от концентрации ядер на траектории частицы по времени ее движения от точки поворота x_0 до области исчезающе малых величин (2). Это равенство, поясняющее смысл исходного выражения (11), менее прямым путем, но более точно обосновывается ниже.

Основное предназначение полученных выражений – описание некогерентных процессов с малыми передачами импульса $\left|q_x\right| \sim \frac{\hbar}{u_1}$. При нормировке на основе определений (2), (7) и (15) как энергии поперечного движения, так и эффективного сечения и угла многократного рассеяния (см. ниже) все численные результаты (рис. 2–4) непосредственно визуализируют степень отличия наших предсказаний от итогов расчета по модели, основанной на сечении (15), не учитывающем влияния неоднородности распределения ядер на процесс рассеяния. При введении нормировки далее полагается $q_1 = 0$. А для перехода к выражению (12) в (14) следует положить $q_2 = \infty$.

Как видно из рис. 2, интенсивность некогерентного рассеяния, вызывающего возрастание энергии поперечного движения, может на порядок и более превышать предсказания, сделанные на основе сечения (15). Это превышение нарастает с удалением от плоскости, демонстрируя, что пропорциональная резко спадающей ядерной плотности локальная интенсивность рассеяния на большие углы существенно уступает интенсивности рассеяния на малые. Последнее происходит нелокально под действием основной, сравнительно удаленной массы ядер атомов плоскости, попадающих в относительно широкую область прицельных параметров $b \sim R > u_1$, и описывается здесь на квантовом языке впервые. Нетрудно также видеть, что изменение средней энергии поперечного движения, как

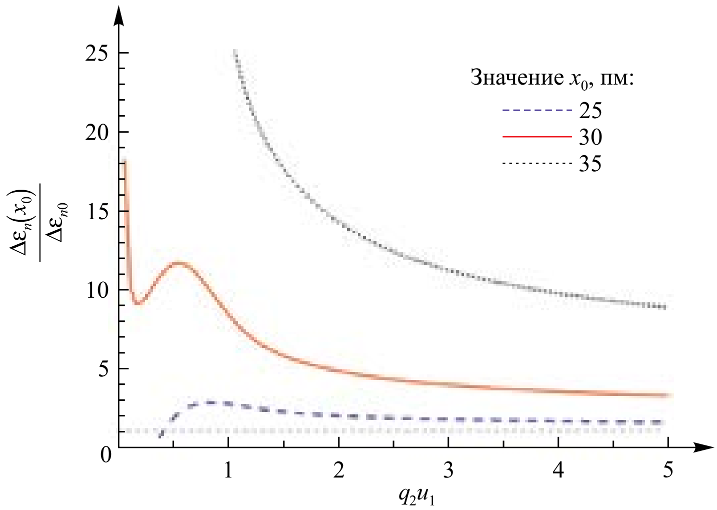

Рис. 2. Зависимость от верхней границы передаваемого импульса величины изменения поперечной энергии вследствие некогерентного рассеяния (14) при $q_1 = 0$ и трех указанных значениях координаты точки поворота x_0, лежащих в области перехода к ускоренному ядерному деканалированию. В качестве нормировки используется аналогичная (14) величина, рассчитанная для $q_1 = 0$ на основе кулоновского сечения (15). Граница передаваемого импульса q_2 выражена в характерных единицах u_1^{-1}

Fig. 2. Incoherent transverse energy variation (14) dependence on the upper transferred momentum boundary at $q_1 = 0$ and three indicated values of the turning point coordinate x_0, belonging to the region of the transition to the accelerated nuclear dechanneling. The value, evaluated with the use of Coulomb cross section (15) at $q_1 = 0$, was used for the normalization. The transferred momentum boundary q_2 is expressed in the typical units of u_1^{-1}

и эффективное сечение (см. (21)) и средний квадрат угла рассеяния (см. (23)), может принимать отрицательные значения при малых переданных импульсах, теряя таким образом привычную физическую интерпретацию, для восстановления которой понадобится увеличить передаваемый импульс q_2.

При нормировке волновой функции (7) выражение (14) описывает изменение средней энергии поперечного движения при движении между точкой поворота x_0 и областью, где концентрация ядер (2) становится пренебрежимо малой. Необходимая для моделирования процесса деканалирования средняя скорость нарастания энергии поперечного движения

$$\frac{d}{dt}\left\langle \varepsilon_n\left(x_0, |q_x| \le q_2\right)\right\rangle = \frac{2}{T\left(x_0, x_0'\right)}\left(\left\langle \Delta\mu_n\left(x_0, |q_x| \le q_2\right)\right\rangle + \left\langle \Delta\mu_n\left(x_0', |q_x| \le q_2\right)\right\rangle\right) \tag{16}$$

представляет собой сумму ее изменений вблизи обеих точек поворота x_0 и x_0' (см. рис. 1), деленную на время движения между ними, равное полупериоду каналирования:

$$\frac{T\left(x_0, x_0'\right)}{2} = \int_{x_0}^{x_0'} \frac{dx}{v_x(x)}. \tag{17}$$

Выделение однократного рассеяния и его моделирование на основе эффективного сечения

Известно [6; 10], что среднего квадрата угла многократного рассеяния на единичной длине, как и пропорциональной ему с коэффициентом $\frac{p}{2}$ средней скорости роста энергии поперечного движения (14), (16), недостаточно для адекватного описания процесса некогерентного рассеяния. Напомним [7; 6], что основной вклад в квадрат угла многократного рассеяния пропорционален логарифму отношения максимального угла рассеяния (переданного импульса) к минимальному. Корректному расчету величины последнего в присутствии когерентного рассеяния в кристаллах посвящены как развиваемая здесь теория, так и работа [6]. Максимальный же угол рассеяния определяется в логарифмическом приближении радиусом ядра и при всех доступных пока энергиях превышает, и, как правило, очень сильно, угол каналирования. Поэтому его подстановка в (14) либо в эквивалентную формулу для среднего квадрата угла многократного рассеяния [6] не является согласованной, поскольку включает вклад рассеяния даже на самые большие углы в расчет кумулятивной характеристики процесса рассеяния на малые. С другой стороны, обсуждавшееся несколько десятилетий [11] понижение предела интегрирования по углам многократного рассеяния путем введения параметра, фиксируемого на основе различных качественных соображений, в действительности не является приемлемым [6; 11], поскольку исключает из рассмотрения любые катастрофические процессы, а также радикально изменяет расчет расходящейся на верхнем пределе интегрирования дисперсии квадрата угла рассеяния [5; 6].

Единственный выход из этой ситуации состоит в определении естественной физической границы между углами однократного и многократного рассеяния [10], задаваемой в данной статье граничным переданным импульсом q_2, и моделировании рассеяния на малые углы с использованием среднеквадратичного угла, а на большие – при помощи сечения, отличающегося от (15) только поправками. Для рассматриваемых энергий легко возможен выбор численного значения границы раздела этих углов, существенно меньшего угла каналирования, поэтому результаты совместного моделирования многократного и однократного рассеяния вообще перестают зависеть от этого выбора, как это происходит в теории ионизационных потерь, источником которых также служит кулоновское рассеяние [9]. Кроме того, благодаря удобному аналитическому виду сечения (15), а также относительной редкости рассеяния на большие углы как теоретическая, так и техническая сторона его моделирования оказываются весьма простыми в полной противоположности моделированию рассеяния на малые, квантовая природа и количественный расчет характеристик которого являются основным содержанием работы [6] и данной статьи.

Введение верхней границы интегрирования $q_2 \sim \dfrac{\hbar}{u_1}$ позволяет использовать выражения (11)–(14) сугубо для представляющего наибольшие трудности описания сильно модифицирующегося в кристаллах рассеяния на малые углы, проявляющегося как средний по периоду каналирования рост энергии поперечного движения. Для моделирования же имеющего локальную природу однократного рассеяния на большие углы $\theta_x > \dfrac{q_2}{p}$ следует представить выражение (11) в виде интеграла по координате и переданному импульсу от эффективного сечения рассеяния, переходящего в пределе больших переданных импульсов $\vec{q} = \left(q_x,\ q_y\right)$ в сечение (15). Сделать это можно исходя как из выражения (12), так и (14) при помощи хорошо известных соотношений [12]

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t^2 dt} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda(x_0 - x)}dx}{\sqrt{x_0 - x}} = \sqrt{\frac{\pi}{|\lambda|}} e^{i\frac{\pi\lambda}{4|\lambda|}}, \tag{18}$$

получая при этом

$$\left\langle \varepsilon_n\left(x_0,\ q_1 \le \left|q_x\right| \le q_2\right)\right\rangle = \int\limits_{x_0}^{\infty} 2\int\limits_{q_1}^{q_2} \frac{q_x^2}{2p}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2\sigma_{\text{eff}}\left(q_x,\ q_y,\ x\right)}{dq_x\, dq_y} dq_y\right) dq_2\, \frac{n(x)dx}{v(x)}, \tag{19}$$

где при помощи подстановки

$$\frac{d^2\sigma_{\text{eff}}\left(q_x,\ q_y,\ x\right)}{dq_x\, dq_y} n(x) = \frac{8Z^2\alpha^2 n_0 d}{\pi v^2} \times$$
$$\times \int\limits_{0}^{\infty}\left(1 - \frac{k^2}{q_x^2}\right) \frac{\left(\exp\left(-2k^2u_1^2\right) - \exp\left(-\left(q_x^2 + k^2\right)u_1^2\right)\right)\cos\left(2xk + \dfrac{2k^3}{3\xi'^3}\right)dk}{\left(\left(q_x + k\right)^2 + q_y^2 + k_s^2\right)\left(\left(q_x - k\right)^2 + q_y^2 + k_s^2\right)} \tag{20}$$

введено эффективное сечение рассеяния в точке x, переходящее при больших переданных импульсах в (15). В этом нетрудно убедиться, снова воспользовавшись гауссовым интегралом по переменной k в пределе $q \gg \dfrac{\hbar}{u_1}$.

Как уже отмечалось, основой адекватного моделирования некогерентного рассеяния является раздельное параллельное разыгрывание процессов отклонения частиц на малые и большие углы [10; 6]. При устойчивом движении в условиях плоскостного каналирования первое из них описывается скоростью медленного нарастания средней энергии поперечного движения (16). А рассеяние на большие углы адекватно моделируется методом розыгрыша однократного рассеяния с использованием сечения (20), позволяющего, помимо процесса катастрофического деканалирования, описать также и рассеяние в перпендикулярном (параллельном атомным плоскостям) направлении оси y, либо сечения, дифференциального только по компоненте импульса, передаваемой в плоскости каналирования xz:

$$\frac{d^2\sigma_{\text{eff}}(q_x, x)}{d|q_x|}n(x) = 2n(x)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^2\sigma_{\text{eff}}}{dq_x\,dq_y}\,dq_y = \frac{16Z^2\alpha^2 n_0 d}{v^2}\times$$

$$\times\int_0^{\infty}\left(1-\frac{k^2}{q_x^2}\right)\frac{\left(\exp\left(-2k^2u_1^2\right)-\exp\left(-\left(q_x^2+k^2\right)u_1^2\right)\right)\cos\left(2xk+\dfrac{2k^3}{3\xi'^3}\right)dk}{\sqrt{(q_x+k)^2+k_s^2}\sqrt{(q_x-k)^2+k_s^2}\left(\sqrt{(q_x+k)^2+k_s^2}+\sqrt{(q_x-k)^2+k_s^2}\right)}, \tag{21}$$

которое получается из (20) интегрированием по q_y. Нетрудно убедиться, что при больших переданных импульсах выражение (21) также согласуется с сечением рассеяния изолированным ядром в плоскости xz:

$$\lim_{|q_x|\gg u_1^{-1}}\frac{d^2\sigma_{\text{eff}}(x)}{d|q_x|}\approx\frac{4\pi Z^2\alpha^2}{v^2|q_x|^3}\times$$

$$\times\left(1-\sqrt{2}e^{-2q_x^2u_1^2-\frac{x^2}{2u_1^2}}+2\sqrt{\frac{2}{\pi}}q_x e^{-2q_x^2u_1^2+\frac{x^2}{2u_1^2}}\operatorname{Re}\left(\frac{e^{2iq_x x}}{2q_x^2u_1^2-3iq_x x-\dfrac{x^2}{u_1^2}}\right)\right). \tag{22}$$

Зависимость сечения (20) от модуля x-компоненты передаваемого импульса (рис. 3) демонстрирует, с одной стороны, значительные отклонения (20) от (22) в области $|q_x|\sim\frac{\hbar}{u_1}$, обусловленные вкладом удаленной от точки x_0 области $x\le u_1$ максимальной концентрации ядер, а с другой – быстрое убывание этих отклонений уже при $|q_x|>\frac{1{,}5\hbar}{u_1}$.

Следует понимать, что локальные по координате x соотношения (20)–(22) получены из строгого выражения (12) для изменения энергии поперечного движения на основе специального представления интеграла по координате x, продиктованного пределом (15). Именно благодаря обладанию последним

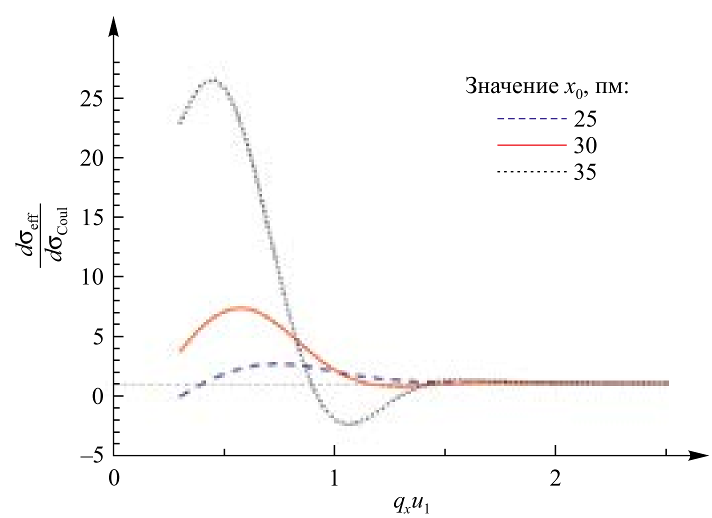

Рис. 3. Зависимость от компоненты передаваемого импульса эффективного сечения рассеяния в плоскости xz (21) при прежних значениях координаты x_0, выраженного в единицах аналогичной величины, рассчитанной при помощи сечения (15)

Fig. 3. Dependence of the effective cross section of scattering in the xz plane (21) on the transferred momentum component, evaluated for the same coordinates x_0 and expressed in the units of the analogous value, evaluated using cross section (15)

эффективные сечения (20), (21) гарантированно корректно описывают процессы с большими передачами импульса. Вклады же в изменение движения малых передач $|q_x| \sim \frac{\hbar}{u_1}$ проявляются при моделировании сугубо кумулятивно, как описываемый (16) медленный рост энергии поперечного движения на протяжении многих периодов каналирования. При этом усредненная по координате величина (16) позволяет решить принципиальную проблему использования эффективных сечений рассеяния в области малых передач импульса, где их положительная определенность может нарушаться.

Обобщение результатов на случай отрицательно заряженных частиц и неканалированного движения

В качестве дальнейшего, более радикального шага выдвинем гипотезу применимости и предложим способ корректного использования эффективного сечения (21) для описания не только устойчивого каналированного движения положительно заряженных частиц с ограниченной поперечной энергией, но и движения как положительно, так и отрицательно заряженных частиц с произвольной величиной последней. Как и в осевом случае [6], проблема невозможности непротиворечивого определения локальных эффективных сечений рассеяния на малые углы решается введением средних квадратов углов рассеяния на единичной длине в плоскостях xz ($j = x$) и yz ($j = y$):

$$\frac{d\left\langle \theta_j^2\left(|q_x| \le q_2\right)\right\rangle}{dz} \equiv 2n(x)\int_0^{q_2} \frac{q_j^2}{p^2}\frac{d\sigma_{\text{eff}}}{d|q_x|}dq_x = 2n(x)\int_0^{q_2}\frac{q_j^2}{p^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^2\sigma_{\text{eff}}}{dq_x\,dq_y}dq_y\,dq_x, \tag{23}$$

поведение которых проиллюстрировано на рис. 4. Последний показывает (как и рис. 2 и 3), что интерференционные эффекты в рассеянии на неоднородном распределении ядер атомов плоскости приводят при малых передачах импульса $q < q_2 \le \frac{\hbar}{u_1}$ к невозможности описания положительно определенными сечением и средним квадратом угла однократного и многократного рассеяния соответственно. Однако рис. 2–4 также позволяют убедиться, что повышение границы передаваемых импульсов до $q_2 \gg \frac{\hbar}{u_1}$ может обеспечить и необходимую для формулировки процедуры моделирования положительность, и традиционную физическую интерпретацию всех обсуждаемых величин везде, за исключением областей исчезающе малой плотности ядер $x > 3u_1$ (см. рис. 4). Однако, в силу того что при движении с достаточно большой поперечной энергией частицы (заряженные как положительно, так и отрицательно) быстро достигают областей плотности ядер, сравнимой с максимальной, вкладами областей исчезающе малой плотности на их фоне вполне допустимо пренебречь (см. рис. 1).

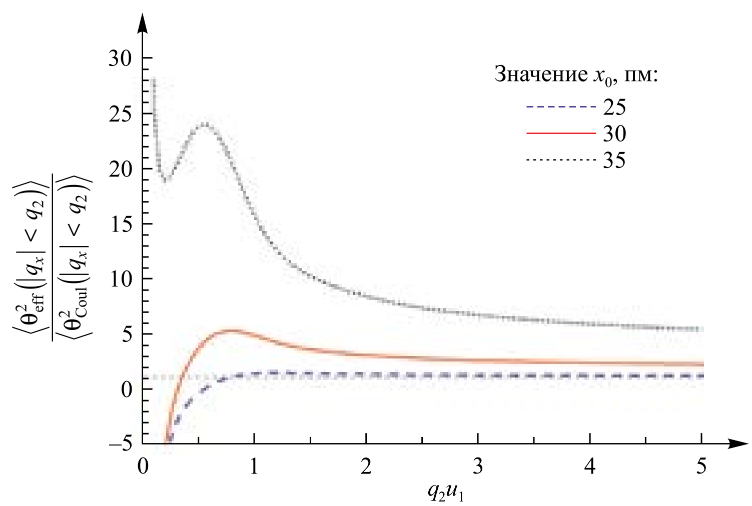

Рис. 4. Средний квадрат угла некогерентного рассеяния в плоскости xz, рассчитанный на основании эффективного сечения рассеяния (21) при прежних значениях координаты x_0 и выраженный в единицах аналогичной величины, найденной с использованием сечения (15)

Fig. 4. Average square of the incoherent scattering angle in the plane of xz, evaluated using effective cross section (21) at the same coordinates x_0 and expressed in the units of the analogous value, evaluated using (15) cross section

В широко распространенной упрощенной модели деканалирования [11] некогерентное рассеяние на ядрах описывается исходя из плотности (2) и сечения (15), исключающих учет влияния неоднородности распределения (2), необходимость которого уже подтверждена экспериментально [8]. Помимо этого, сравнение интенсивности рассеяния на ядрах и электронах на основании пространственного распределения их плотностей (см. рис. 1, *a*) уже десятилетиями используется [11] для введения ядерного коридора, на границе которого $x_c \approx 20–25$ пм, как весьма упрощенно предполагается в [11], происходит «мгновенное включение» рассеяния на ядрах, приводящее к ускоренному деканалированию положительно заряженных частиц. На рис. 2–4 данные отражают неадекватность такого расчета, демонстрируя, что в действительности локальная интенсивность некогерентного рассеяния может на порядок и более превышать упрощенные предсказания на основе (2), (15), принципиально уточняя таким образом теорию рассеяния частиц ядрами в наиболее принципиальной для готовящихся экспериментов [2–4] пространственной области начала резкого роста интенсивности рассеяния частиц по мере приближения их к атомной плоскости. Действительно, сопоставляя результаты расчета, надо учитывать, что на рис. 3 и 4 представлены *локальные* значения эффективного сечения и среднего квадрата угла рассеяния, рассчитанные в точках x_0 с координатами 25; 30 и 35 пм, а на рис. 2 – величина изменения поперечной энергии, *интегральная* по области $x > x_0$, для которой те же координаты точки поворота x_0 играют уже роль нижних пределов интегрирования.

Кроме того, при нормировке, основанной на сечении (15), графики на рис. 2–4 непосредственно визуализируют предсказываемый коэффициент изменения рассматриваемых характеристик процесса некогерентного рассеяния. Это сразу позволяет убедиться, что бóльшая по сравнению с локальными характеристиками (см. рис. 3 и 4) степень возрастания интегральной величины изменения поперечной энергии (см. рис. 2) объясняется вкладом в интеграл коэффициента модификации некогерентного рассеяния, большего при $x > x_0$, чем при $x = x_0$. При этом, помимо строго квантово-механического определения, достоинством интегральной величины изменения поперечной энергии является то, что ее использование позволяет избежать рассмотрения сложного поведения среднего квадрата угла рассеяния в каждой точке области исчезающе малой ядерной плотности. Однократное же рассеяние в последней может моделироваться по не содержащей интегралов асимптотической формуле (22) уже начиная с передач импульса $|q_x| > \frac{1{,}5\hbar}{u_1}$. Как показывает график на рис. 2 (штриховая линия), в области границы ядерного коридора описанный подход предсказывает интенсивность некогерентного рассеяния, в 1,5–2,0 раза превышающую величину, получаемую на основании сечения (15).

Таким образом, полученное на основании релятивистского квантово-механического расчета выражение для изменения поперечной энергии (14), а также введенные на его основе эффективные сечения (20), (21) позволяют впервые предложить метод моделирования процесса некогерентного рассеяния положительно и отрицательно заряженных частиц высоких энергий, свободный от параметров, десятки лет вводившихся на основании качественных соображений.

Библиографические ссылки

1. Барышевский ВГ. *Каналирование, излучение и реакции в кристаллах при высоких энергиях.* Минск: БГУ; 1982. 256 с.
2. Baryshevsky VG, Tikhomirov VV. Crystal applications in high energy physics for new phenomena observation and acceleration technology development. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*. 2017;4:20–32.
3. Baryshevsky VG. Electromagnetic dipole moment and time reversal invariance violating interactions of high energy short-lived particles in bent and straight crystals. *Physical Review Accelerators and Beams.* 2019;22:081004. DOI: 10.1103/PhysRevAccelBeams.22.081004.
4. Baryshevsky VG. Electromagnetic dipole moments and time reversal violating interactions for high energy charged baryons in bent crystals at LHC. *European Physical Journal C.* 2019;79(4):350. DOI: 10.1140/epjc/s10052-019-6857-6.
5. Tikhomirov VV. Quantitative theory of channeling particle diffusion in transverse energy in the presence of nuclear scattering and direct evaluation of dechanneling length. *European Physical Journal C.* 2017;77:483. DOI: 10.1140/epjc/s10052-017-5060-x.
6. Tikhomirov VV. Quantum features of high-energy particle incoherent scattering in crystals. *Physical Review Accelerators and Beams*. 2019;22(5):054501. DOI: 10.1103/PhysRevAccelBeams.22.054501.
7. Ter-Mikaelian ML. *High-energy electromagnetic processes in condensed media.* New York: Wiley; 1972. 457 p.
8. Tikhomirov VV, Bandiera L, Guidi V, Mazzolari A, Sytov A. Incoherent scattering reduction in crystals. *Proceedings of the 37th International Symposium on Dynamical Properties of Solids.* 2019;26(1):29. DOI: 10.3390/proceedings2019026029.
9. Ландау ЛД, Лифшиц ЕМ. *Квантовая механика. Нерелятивистская теория.* Москва: Наука; 1974. 752 с. (Теоретическая физика; том 3).
10. Tikhomirov VV. Simulation of multi-GeV electron energy losses in crystals. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms.* 1989;36(3):282–285. DOI: 10.1016/0168-583X(89)90670-8.
11. Biryukov VM, Chesnokov YA, Kotov VI. *Crystal channeling and its application at high-energy accelerators.* Berlin: Springer; 2010. 219 p. (Accelerator Physics). DOI: 10.1007/978-3-662-03407-1.
12. Прудников АП, Брычков ЮА, Маричев ОИ. *Интегралы и ряды. Том 1. Элементарные функции.* Москва: Физматлит; 2002. 632 с.

References

1. Baryshevsky VG. *Kanalirovanie, izluchenie i reaktsii v kristallakh pri vysokikh energiyakh* [Channeling, radiation and reactions in crystals at high energies]. Minsk: Belarusian State University; 1982. 256 p. Russian.

2. Baryshevsky VG, Tikhomirov VV. Crystal applications in high energy physics for new phenomena observation and acceleration technology development. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*. 2017;4:20–32.

3. Baryshevsky VG. Electromagnetic dipole moment and time reversal invariance violating interactions of high energy short-lived particles in bent and straight crystals. *Physical Review Accelerators and Beams.* 2019;22:081004. DOI: 10.1103/PhysRevAccelBeams.22.081004.

4. Baryshevsky VG. Electromagnetic dipole moments and time reversal violating interactions for high energy charged baryons in bent crystals at LHC. *European Physical Journal C.* 2019;79(4):350. DOI: 10.1140/epjc/s10052-019-6857-6.

5. Tikhomirov VV. Quantitative theory of channeling particle diffusion in transverse energy in the presence of nuclear scattering and direct evaluation of dechanneling length. *European Physical Journal C.* 2017;77:483. DOI: 10.1140/epjc/s10052-017-5060-x.

6. Tikhomirov VV. Quantum features of high-energy particle incoherent scattering in crystals. *Physical Review Accelerators and Beams.* 2019;22(5):054501. DOI: 10.1103/PhysRevAccelBeams.22.054501.

7. Ter-Mikaelian ML. *High-energy electromagnetic processes in condensed media.* New York: Wiley; 1972. 457 p.

8. Tikhomirov VV, Bandiera L, Guidi V, Mazzolari A, Sytov A. Incoherent scattering reduction in crystals. *Proceedings of the 37th International Symposium on Dynamical Properties of Solids.* 2019;26(1):29. DOI: 10.3390/proceedings2019026029.

9. Landau LD, Lifshitz EM. *Kvantovaya mekhanika. Nerelyativistskaya teoriya* [Quantum Mechanics. Non-relativistic theory]. Moscow: Nauka; 1974. 752 p. (Teoreticheskaya fizika; tom 3). Russian.

10. Tikhomirov VV. Simulation of multi-GeV electron energy losses in crystals. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms.* 1989;36(3):282–285. DOI: 10.1016/0168-583X(89)90670-8.

11. Biryukov VM, Chesnokov YA, Kotov VI. *Crystal channeling and its application at high-energy accelerators.* Berlin: Springer; 2010. 219 p. (Accelerator Physics). DOI: 10.1007/978-3-662-03407-1.

12. Prudnikov AP, Brychkov YuA, Marichev OI. *Integraly i ryady. Tom 1. Elementarnye funktsii* [Integrals and series. Volume 1. Elementary functions]. Moscow: Fizmatlit; 2002. 632 p. Russian.

Статья поступила в редколлегию 01.11.2019.
Received by editorial board 01.11.2019.