

# PHYSICS OF ELECTROMAGNETIC PHENOMENA

---

---

УДК 539.12

### МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ФОТОНОВ ДЛЯ МОДУЛИРОВАННОГО ПУЧКА ЭЛЕКТРОНОВ

И. Д. ФЕРАНЧУК<sup>1)</sup>, О. Д. СКОРОМНИК<sup>2)</sup>, НГУЕН КУАНГ ШАН<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

<sup>2)</sup>Педагогический университет г. Хошимина, ул. Ан Зыонг Выонг, 280, район 5, г. Хошимин, Вьетнам

Показано, что собственное электромагнитное поле периодически модулированного по плотности сгустка ультрарелятивистских электронов можно рассматривать как пучок эквивалентных фотонов (псевдофотонов), направленный вдоль скорости электронов. Спектр псевдофотонов включает как некогерентный вклад, пропорциональный числу электронов в сгустке, так и когерентную составляющую, которая имеет острый максимум на частоте модуляции. Метод эквивалентных фотонов может быть использован для описания взаимодействия сгустка электронов с кристаллом, которое приводит к генерации когерентного параметрического рентгеновского излучения от модулированных сгустков, выходящих из ондулятора рентгеновского лазера на свободных электронах. Это дает возможность получения импульсов рентгеновского излучения, направленных под большим углом

---

#### Образец цитирования:

Феранчук ИД, Скоромник ОД, Нгуен Куанг Шан. Метод эквивалентных фотонов для модулированного пучка электронов. *Журнал Белорусского государственного университета. Физика.* 2020;3:24–31.  
<https://doi.org/10.33581/2520-2243-2020-3-24-31>

#### For citation:

Feranchuk ID, Skoromnik OD, Nguyen Quang San. Method of the equivalent photons for modulated electron beam. *Journal of the Belarusian State University. Physics.* 2020;3:24–31. Russian.  
<https://doi.org/10.33581/2520-2243-2020-3-24-31>

---

#### Авторы:

**Илья Давыдович Феранчук** – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры теоретической физики и астрофизики физического факультета.

**Олег Дмитриевич Скоромник** – кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник группы компьютерной физики.

**Нгуен Куанг Шан** – аспирант кафедры теоретической физики и астрофизики физического факультета. Научный руководитель – И. Д. Феранчук.

#### Authors:

**Ilya D. Feranchuk**, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of theoretical physics and astrophysics, faculty of physics.

[feranchuk@bsu.by](mailto:feranchuk@bsu.by)

<https://orcid.org/0000-0003-0476-8634>

**Oleg D. Skoromnik**, PhD (physics and mathematics); senior researcher at the group of computational physics.

[olegskor@gmail.com](mailto:olegskor@gmail.com)

**Nguyen Quang San**, postgraduate student at the department of theoretical physics and astrophysics, faculty of physics.

[quangsanbsu@gmail.com](mailto:quangsanbsu@gmail.com)

к скорости электронов, где интенсивность фонового излучения существенно уменьшена. Определены условия, при которых спектрально-угловые характеристики распределения когерентных псевдофотонов могут быть сравнимы с аналогичными величинами для импульсов рентгеновского лазера.

**Ключевые слова:** самомодуляция пучка электронов; когерентное рентгеновское излучение в лазерах на свободных электронах; параметрическое рентгеновское излучение.

## METHOD OF THE EQUIVALENT PHOTONS FOR MODULATED ELECTRON BEAM

I. D. FERANCHUK<sup>a</sup>, O. D. SKOROMNIK<sup>b</sup>, NGUYEN QUANG SAN<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

<sup>b</sup>Ho Chi Minh City University of Education,

280 An Duong Vuong Street, 5 District, Ho Chi Minh City, Vietnam

Corresponding author: I. D. Feranchuk (feranchuk@bsu.by)

It is shown in this work that electromagnetic self-field of the periodically density modulated electron bunch can be considered as the beam of the equivalent photons (pseudo-photons), collimated along the electron velocity. Pseudo-photon spectrum includes both the incoherent contribution being proportional to number of electrons in the bunch and the coherent part with the sharp maximum corresponding the modulation frequency. Method of the equivalent photons can be applied for description of the interaction between the electron bunch and a crystal that leads to generation of the coherent parametric X-ray radiation by the modulated bunches exited from the undulator of the X-ray free electron laser. It provides the possibility to obtain the X-ray pulses directed at the large angle to the electron velocity where intensity of the background radiation essentially decreased. It is defined the conditions when the spectral and angular distributions of the coherent pseudo-photons can be compared with the analogous values for the pulses of the X-ray laser.

**Keywords:** self-modulation of the electron bunch; coherent X-ray radiation from the X-ray free electron laser; parametric X-ray radiation.

### Введение

Хорошо известно [1], что когерентное рентгеновское излучение в рентгеновских лазерах на свободных электронах (РЛСЭ) возникает при прохождении пучка релятивистских электронов через ондулятор, который выполняет две функции. С одной стороны, вследствие механизма самоусиления спонтанного излучения (*self-amplified spontaneous emission*, SASE) в нем происходит образование периодической последовательности микросгустков из первоначально однородного электронного импульса. В результате плотность электронов в импульсе становится периодически модулированной с периодом  $\lambda_0$ , соответствующим резонансной длине волны ондулятора. С другой стороны, в данном устройстве происходит формирование импульса когерентного ондуляторного излучения на резонансной частоте  $\omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$  ( $c$  – скорость света), возникающего на выходе из РЛСЭ. При этом когерентное излучение модулированного пучка сосредоточено в узком конусе вдоль направления движения электронов, а совпадение (резонанс) между частотой модуляции пучка и частотой испускаемых фотонов обеспечивается автоматически, поскольку они определяются одним и тем же механизмом ондуляторного излучения. В настоящее время подобная схема генерации реализована на ускорителях в Стэнфорде (США) и Гамбурге (Германия). Основные преимущества излучения от РЛСЭ, по сравнению с излучением от других рентгеновских источников, связаны с высокой спектральной мощностью когерентного импульса фотонов, что открывает широкие возможности в исследованиях динамики различных процессов в конденсированных средах [1]. Характерные параметры импульса рентгеновского излучения в современных РЛСЭ определяются следующими значениями [1]: длительность импульса –  $10^{-13}$ – $10^{-12}$  с; угловая расходимость –  $10^{-4}$  рад; относительная спектральная ширина –  $10^{-3}$ ; число фотонов в импульсе –  $10^{12}$ – $10^{13}$ .

Рассмотрим, однако, схему генерации излучения, при которой эти две функции разделены. Для этого предположим, что на выходе из ондулятора модулированный электронный импульс проходит через монокристаллическую мишень, в которой происходит генерация параметрического рентгеновского излучения (ПРИ) с частотой  $\omega_B$ , зависящей от структуры кристалла и угла  $\theta_B$  между его плоскостями

и направлением скорости электронов. При этом, как было недавно показано в работе [2], наибольшая интенсивность ПРИ достигается при скользящем движении пучка электронов вдоль поверхности монокристалла, в то время как рентгеновское излучение генерируется под большим углом  $2\theta_B$  к направлению скорости электронов. Угол  $\theta_B$  можно выбрать таким образом, чтобы выполнялось резонансное условие  $\omega_B \approx \omega_0$ . Тогда наряду с основным импульсом рентгеновского излучения от РЛСЭ возникнет импульс когерентного ПРИ от модулированного электронного импульса. При этом пучок фотонов, соответствующий ПРИ, будет направлен под большим углом к направлению движения электронов, что расширяет возможности использования РЛСЭ.

Целью настоящей работы является определение условий, при которых ПРИ от модулированного по плотности электронного сгустка будет наиболее интенсивным.

### Спектральная плотность эквивалентных фотонов периодически модулированного сгустка электронов

Для анализа взаимодействия модулированного пучка со средой можно использовать эффективный и наглядный метод описания электромагнитных процессов, основанный на концепции эквивалентных фотонов (псевдофотонов) [3–5]. Этот подход основан на том, что собственное электромагнитное поле заряженной частицы по своим характеристикам эквивалентно пучку псевдофотонов со спектрально-угловой плотностью распределения  $n(\vec{k})$  и малой угловой расходимостью, которая определяется релятивистским фактором частицы. В результате дифференциальное сечение перехода ( $i \Rightarrow f$ ) между начальным и конечным состояниями рассматриваемой системы  $d\sigma_{if}^e$  при ее взаимодействии с релятивистской заряженной частицей, движущейся со скоростью  $\vec{v}$ , представляется в виде

$$d\sigma_{if}^e = n(\vec{k}) d\sigma_{if}^{ph}(\omega, \vec{k}_\perp) d\omega d\vec{k}_\perp, \quad (1)$$

где  $d\sigma_{if}^{ph}(\omega, \vec{k}_\perp)$  – сечение исследуемого перехода под действием фотона с частотой  $\omega$  и волновым вектором  $\vec{k} = \left( \frac{\omega\vec{v}}{v}; \vec{k}_\perp \right)$ .

Спектрально-угловое распределение эквивалентных фотонов, связанных с одной заряженной частицей, хорошо известно [3–5] и является гладкой функцией частоты. Поэтому возможные пики в вероятности рассматриваемого процесса определяются частотами  $\omega_m$ , при которых сечение  $d\sigma_{if}^{ph}(\omega, \vec{k}_\perp)$  имеет максимумы. Это утверждение справедливо и при некогерентном сложении полей заряженных частиц однородного пучка, состоящего из  $N$  равномерно распределенных в пространстве частиц, так что спектрально-угловая плотность псевдофотонов однородного пучка электронов равна  $Nn(\vec{k})$ .

Однако, как было указано выше, при выходе из ондулятора РЛСЭ плотность электронов в сгустке вследствие механизма SASE является периодической функцией координат с периодом  $\lambda_0$ . Можно ожидать, что это приводит к существенному изменению спектральной плотности псевдофотонов и возникновению в ней пиков на гармониках частоты  $\omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$ . Если положение такого пика совпадает с одной из частот  $\omega_m$ , то происходит резонансное увеличение сечения  $d\sigma_{if}^e$  рассматриваемого процесса.

Вычислим спектральную плотность эквивалентных фотонов периодически модулированного сгустка электронов для получения когерентного рентгеновского излучения на основе ПРИ.

В области энергии фотонов, много меньшей энергии частицы ( $\omega \ll E$ ), спектр псевдофотонов можно получить на основе классического рассмотрения электромагнитного поля [3] (используется натуральная система единиц с  $\hbar = c = 1$ ). Векторный  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  и скалярный  $\phi(\vec{r}, t)$  потенциалы поля, создаваемого пучком электронов с зарядом  $e$ , равномерно движущихся в вакууме, определяются уравнениями

$$\begin{aligned} \square \vec{A} &= -4\pi e \sum_a^N v_a \delta(\vec{r} - \vec{v}_a t - \vec{r}_a), \\ \square \phi &= -4\pi e \sum_a^N \delta(\vec{r} - \vec{v}_a t - \vec{r}_a), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\vec{r}_a, \vec{v}_a$  – координата и скорость частицы пучка;  $N$  – число частиц в сгустке.

Используя фурье-разложение потенциалов в уравнениях (2), находим следующие выражения для электромагнитных полей:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_a^N \vec{E}_a(\vec{r}, t), \quad \vec{E}_a(\vec{r}, t) = -\frac{i\mathbf{e}}{2\pi^2} \int d\vec{k} \frac{\vec{k} - \vec{v}_a (\vec{k} \vec{v}_a)}{k^2 - (\vec{k} \vec{v}_a)^2} e^{i\vec{k}(\vec{r} - \vec{v}_a t - \vec{r}_a)},$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \sum_a^N [\vec{v}_a \vec{E}_a(\vec{r}, t)].$$
(3)

Предположим, что пучок релятивистских электронов обладает достаточно малой угловой расходимостью, так что скорость отдельной частицы можно представить в виде

$$\vec{v}_a = \vec{v} + \vec{v}'_a, \quad v'_a \ll v; \quad 1 - v^2 = \frac{m^2}{E^2} \equiv \gamma^{-2} \ll 1.$$

Ось  $z$  направим вдоль средней скорости пучка  $\vec{v}$  и предположим, что угловая расходимость частиц пучка относительно этой оси  $\theta_a < \gamma^{-1}$ . Флуктуации модуля скорости частиц связаны с некогерентностью пучка по энергии и удовлетворяют условию  $|v_a - v| \approx \gamma^{-2} \frac{\Delta E}{E} \ll \gamma^{-2}$ . Тогда компоненты вектора  $\vec{v}'_a$ , определяющего флуктуации скоростей частиц в пучке с точностью до слагаемых  $\gamma^{-2}$ , можно представить в виде

$$\vec{v}'_a = \bar{\theta}_a - \frac{\theta_a^2}{2} \vec{e}_z, \quad \theta_a^2 = \theta_{ax}^2 + \theta_{ay}^2, \quad \bar{\theta}_a = \theta_{ax} \vec{e}_x + \theta_{ay} \vec{e}_y,$$

где  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  – единичные векторы.

В принятом приближении знаменатель в выражении (3) для поля имеет вид

$$k_z^2 \gamma^{-2} + (\vec{k}_\perp - k_z \bar{\theta}_a)^2,$$

который показывает, что основной вклад в амплитуду поля определяется значениями

$$\theta_a \approx \frac{k_\perp}{k_z} \approx \gamma^{-1},$$

и при этих условиях поле с точностью до  $\gamma^{-1}$  является поперечным  $|E_z| \approx \gamma^{-1} |E_\perp|$ :

$$\vec{E}_\perp(\vec{r}, t) = \sum_a^N \vec{E}_{a\perp}(\vec{r}, t),$$

$$\vec{E}_{a\perp}(\vec{r}, t) = -\frac{i\mathbf{e}}{2\pi^2} \int d\vec{k} \frac{\vec{k}_\perp - \bar{\theta}_a k_z}{k_z^2 \gamma^{-2} + (\vec{k}_\perp - k_z \bar{\theta}_a)^2} e^{i\vec{k}(\vec{r} - \vec{v}_a t - \vec{r}_a)},$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = [\vec{v} \vec{E}_\perp(\vec{r}, t)].$$

Проекция потока энергии электромагнитного поля, связанного с пучком частиц, на ось  $z$  определяется выражением [3]

$$\Pi = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy dt [\vec{E} \vec{H}]_z = \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy dt |\vec{E}_\perp|^2 \approx$$

$$\approx \frac{e^2}{2v\pi^2} \sum_a \sum_b \int d\vec{k} \frac{(\vec{k}_\perp - \bar{\theta}_a k_z)(\vec{k}_\perp - \bar{\theta}_b k_z)}{(k_z^2 \gamma^{-2} + (\vec{k}_\perp - k_z \bar{\theta}_a)^2)(k_z^2 \gamma^{-2} + (\vec{k}_\perp - k_z \bar{\theta}_b)^2)} e^{i\vec{k}(\vec{r}_b - \vec{r}_a)} e^{iz\vec{k}(\vec{v}'_a - \vec{v}'_b)}.$$

Этот поток можно разбить на две части:

$$\Pi = \Pi_{sp} + \Pi_{coh}.$$

Некогерентный поток  $\Pi_{sp}$  соответствует слагаемым с  $a = b$ , и для него после интегрирования по переменной  $(\vec{k}_\perp - \bar{\theta}_a k_z) \Rightarrow \vec{k}_\perp$  получается обычное выражение для спектральной плотности псевдофотонов:

$$\Pi_{sp} = \frac{e^2}{2v\pi^2} N \int d\vec{k} \frac{k_{\perp}^2}{[k_z^2 \gamma^{-2} + \vec{k}_{\perp}^2]^2} = \int \omega n(\omega) d\omega, \quad (4)$$

$$n_{sp}(\omega) = N \frac{2e^2}{\pi\omega} \ln\left(\frac{m\gamma}{\omega}\right), \quad |\vec{k}_{\perp} - \vec{\theta}_a| \approx \omega\gamma^{-1}.$$

Когерентная часть потока  $\Pi_{coh}$  имеет следующий вид:

$$\Pi_{coh} = \frac{e^2}{2v\pi^2} \int d\vec{k} |\vec{F}(\vec{k})|^2,$$

$$\vec{F}(\vec{k}) = \sum_a \frac{\vec{k}_{\perp} - \vec{\theta}_a k_z}{k_z^2 \gamma^{-2} + (\vec{k}_{\perp} - k_z \vec{\theta}_a)^2} e^{-i\vec{k}\vec{r}_a} e^{iz\vec{k}\vec{v}'_a}, \quad \vec{v}'_a = v\vec{\theta}_a.$$

Для вычисления формфактора  $\vec{F}(\vec{k})$  нужно усреднить полученное выражение с учетом распределения электронов сгустка в РЛСЭ [1]. Суммирование по координатам и скоростям электронов в модулированном пучке можно представить как

$$\sum_a = N \int d\vec{r} d\vec{\theta} f(\vec{r}) \rho(\vec{\theta})$$

с нормированными на единицу функциями распределения

$$\rho(\vec{\theta}) = \frac{1}{\pi\sigma_a^2} \exp\left[-\frac{(\theta_x^2 + \theta_y^2)}{\sigma_a^2}\right],$$

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{\pi\sigma_b^2} \exp\left[-\frac{(x^2 + y^2)}{\sigma_b^2}\right] \left\{ 1 + \frac{1}{K} \sum_{n=1}^K \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma_c} \exp\left[-\frac{(z - nd)^2}{\sigma_c^2}\right] \right\},$$

где величина  $\sigma_a$  обуславливает угловой разброс направлений скорости, а  $\sigma_b$  – среднеквадратичный разброс по поперечным координатам. Параметр  $\xi = \exp\left[-\frac{d^2}{4\sigma_c^2}\right] < 1$  определяет глубину модуляции в сгустке (т. е. отношение амплитуды осцилляций плотности к средней плотности электронов в пучке), от которой, в свою очередь, зависят флуктуации периода модуляции  $\sigma_c \ll d$  [6];  $d$  – период модуляции сгустка длиной  $L = Kd$  и число микросгустков  $K \gg 1$ .

При усреднении по координатам электронов постоянная составляющая плотности потока не дает вклада в  $\Pi_{coh}$ , а вычисление интегралов от периодической составляющей приводит к следующему результату:

$$\int d\vec{r} f(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\vec{r}} = \exp\left[-\frac{(k_x^2 + k_y^2)\sigma_b^2}{4}\right] \frac{1}{K} \sum_{l=0}^{K-1} e^{-ik_z ld} \exp\left[-\frac{k_z^2 \sigma_c^2}{4}\right] =$$

$$= \exp\left[-\frac{(k_x^2 + k_y^2)\sigma_b^2}{4}\right] \frac{1 - e^{iLk_z}}{K(1 - e^{idk_z})} \exp\left[-\frac{k_z^2 \sigma_c^2}{4}\right].$$

Усреднение формфактора по угловому разбросу электронов в сгустке сводится к вычислению интеграла

$$I = \frac{1}{k_z} \int d\vec{\theta} \frac{1}{\pi\sigma_a^2} e^{-\vec{\theta}^2/\sigma_a^2} \frac{\vec{\theta}_k - \vec{\theta}}{\gamma^{-2} + (\vec{\theta}_k - \vec{\theta})^2} e^{izk_z v \vec{\theta}_k \vec{\theta}}, \quad \vec{\theta}_k = \frac{\vec{k}_{\perp}}{k}.$$

Характерный угловой разброс псевдофотонов определяется параметром  $\theta_k \approx \gamma^{-1}$ , так что влиянием углового разброса электронов на связанный с ними спектр псевдофотонов можно пренебречь при выполнении условия

$$\theta \approx \sigma_a \ll \gamma^{-1},$$

которое может быть достигнуто для реальных эмиттансов релятивистских пучков [7]. Тогда искомым интеграл равен

$$I = \frac{1}{k} \frac{\bar{\theta}_k}{\gamma^{-2} + \bar{\theta}_k^2} e^{-(zkv)^2 \sigma_a^2 \bar{\theta}_k^2 / 4}.$$

В результате для когерентной части потока псевдофотонов находим

$$\begin{aligned} \Pi_{coh} = N^2 \frac{e^2}{2v\pi^2} \xi \int_0^\infty dk \int d\bar{\theta}_k \frac{\bar{\theta}_k^2}{(\gamma^{-2} + \bar{\theta}_k^2)^2} e^{-(zkv)^2 \sigma_a^2 \bar{\theta}_k^2 / 2} e^{-\bar{\theta}_k^2 k^2 \sigma_b^2 / 2} \times \\ \times \left| \frac{1 - e^{iLk_z}}{K(1 - e^{idk_z})} \exp \left[ \frac{-k_z^2 \sigma_c^2}{4} \right] \right|^2. \end{aligned}$$

Вычислим интеграл по углам:

$$\begin{aligned} J = \int d\bar{\theta}_k \frac{\bar{\theta}_k^2}{(\gamma^{-2} + \bar{\theta}_k^2)^2} e^{-a^2 \bar{\theta}_k^2}, \quad a^2 = \frac{1}{2} [(zkv)^2 \sigma_a^2 + k^2 \sigma_b^2]. \\ J = \pi \int_0^\infty dx \frac{x}{(\gamma^{-2} + x)^2} e^{-a^2 x} = \pi \left[ \int_0^\infty dx \frac{1}{\gamma^{-2} + x} e^{-a^2 x} - \int_0^\infty dx \frac{\gamma^{-2}}{(\gamma^{-2} + x)^2} e^{-a^2 x} \right] = \\ = \pi \left[ -e^{a^2 \gamma^{-2}} Ei(-a^2 \gamma^{-2}) (1 + \gamma^{-2} a^2) - 1 \right], \end{aligned}$$

где  $Ei(x)$  – интегральная показательная функция.

В результате когерентная составляющая спектральной плотности псевдофотонов принимает вид ( $k_z \approx \omega$ )

$$n_{coh}(\omega) \approx N^2 \frac{e^2}{2v\pi\omega} \frac{d^2}{L^2} \left[ -e^{a^2 \gamma^{-2}} Ei(-a^2 \gamma^{-2}) (1 + \gamma^{-2} a^2) - 1 \right] \left| \frac{1 - e^{iL\omega}}{1 - e^{id\omega}} \right|^2 e^{-\omega^2 \sigma_c^2 / 2d^2}. \quad (5)$$

Спектральная плотность когерентных псевдофотонов имеет острые максимумы при частотах  $\omega_n = \frac{2\pi n}{d}$ , причем основной вклад в (5) вносит первая гармоника, соответствующая  $n = 1$ :

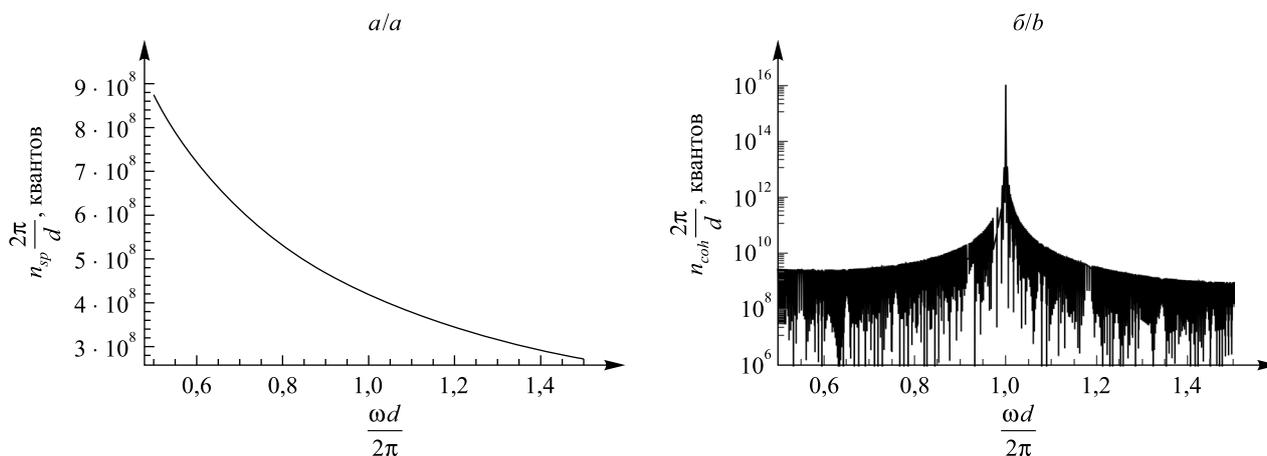
$$\begin{aligned} n_{coh}(\omega) \approx N^2 \frac{e^2}{2v\pi\omega} \frac{d^2}{L^2} \left[ -e^{a^2 \gamma^{-2}} Ei(-a^2 \gamma^{-2}) (1 + \gamma^{-2} a^2) - 1 \right] \times \\ \times \frac{\sin^2 \left[ \frac{1}{2} L \left( \omega - \frac{2\pi}{d} \right) \right]}{\sin^2 \left[ \frac{1}{2} d \left( \omega - \frac{2\pi}{d} \right) \right]} e^{-2\pi^2 \sigma_c^2 / d^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

при этом, как было указано выше, множитель  $\xi = e^{-2\pi^2 \sigma_c^2 / d^2}$  определяет глубину модуляции сгустка, которая зависит от среднеквадратичной флуктуации периода модуляции  $\sigma_c \ll d$ .

Сравним вклады когерентной (5) и некогерентной (4) составляющих в распределение псевдофотонов для параметров пучка электронов, соответствующих РЛСЭ [7]:

$$\begin{aligned} \gamma^{-1} = \frac{0,511}{6,7 \cdot 10^3} \approx 8 \cdot 10^{-5}, \quad k \approx 10^{10} m^{-1}, \quad N \approx 1 nC \approx 6 \cdot 10^9, \quad \frac{2\pi^2 \sigma_c^2}{d^2} \approx 0,3, \\ \sigma_a = 10^{-4}, \quad \sigma_b = 2 \cdot 10^{-7} m, \quad z = L = 4,3 \cdot 10^{-6} m, \quad d = 6,28 \cdot 10^{-10} m, \\ \gamma^{-2} a^2 = 6,4 \cdot 10^{-9} \cdot 0,5 \left[ 1,6 \cdot 10^{-7} \cdot 10^8 + 4 \cdot 10^{-10} \cdot 10^{16} \right] \approx 0,03. \end{aligned}$$

На рисунке приведено сравнение спектральных плотностей потока некогерентных и когерентных псевдофотонов при указанных параметрах сгустка электронов.



Спектральная плотность распределения псевдофотонов модулированного пучка:  
*a* – некогерентных; *b* – когерентных в логарифмическом масштабе  
 Spectral distribution density of pseudo-photons of the modulated beam:  
*a* – incoherent; *b* – coherent in the logarithmic scale

Оценим число некогерентных псевдофотонов в интервале частот  $\frac{\Delta\omega}{\omega} \approx 10^{-3}$ , характерном для импульса рентгеновского излучения в РЛСЭ.

$$N_{sp} = N \frac{2e^2}{\pi} \ln \frac{m\gamma \Delta\omega}{\omega} \approx 10^9 \cdot 10^{-5} \approx 10^4,$$

что существенно меньше величины, соответствующей импульсу РЛСЭ.

В то же время интегрирование формулы (6) по такому же интервалу вблизи частоты  $\omega_0 = \frac{2\pi}{d}$  дает число псевдофотонов, сопоставимое с числом реальных фотонов в импульсе РЛСЭ [7].

$$N_{coh} = N^2 \frac{e^2}{2} \frac{1}{\omega_0 L} \approx 3,6 \cdot 10^{19} \cdot \frac{1}{137} \cdot \frac{1}{8 \cdot 10^4} \approx 4,5 \cdot 10^{12}.$$

В соответствии с соотношением (1) процесс излучения определяется рассеянием псевдофотонов, что приводит к их преобразованию в реальные фотоны. Таким образом, вероятность излучения фотона от пучка электронов достигает максимального значения для таких частот фотона, при которых максимум спектральной плотности псевдофотонов совпадает с наибольшей величиной сечения рассеяния  $d\sigma_{if}^{ph}(\omega, \vec{k}_\perp)$  для определенного механизма излучения. Как было показано в работе [8], в случае ПРИ полная вероятность такого рассеяния в интервале углов  $\Delta\theta \approx \gamma^{-1}$  и частот  $\frac{\Delta\omega}{\omega} \approx \gamma^{-1}$  стремится к 1. Это означает, что в указанных интервалах происходит полное преобразование псевдофотонов в реальные фотоны. В данном случае значение  $N_{coh}$  определяет число фотонов в импульсе, соответствующее рассматриваемому механизму ПРИ, и имеет тот же порядок величины, что и в импульсе РЛСЭ. Подчеркнем, что метод эквивалентных фотонов позволяет оценить интегральное число фотонов в импульсе, однако для расчета детальной структуры спектра ПРИ необходимо использовать более полную теорию этого механизма излучения [2], что будет рассмотрено в отдельной работе. Следует также отметить, что метод эквивалентных фотонов может быть применен и при вычислении поля произвольного распределения зарядов в калибровке Кулона, исследованного недавно в статье [9].

### Заключение

Таким образом, в работе показано, что спектр эквивалентных фотонов периодически модулированного сгустка электронов на выходе из ондулятора РЛСЭ содержит когерентную составляющую, которая дает возможность получения дополнительных импульсов рентгеновского излучения под большим углом к направлению движения пучка электронов в ондуляторе [8]. Число фотонов в таких импульсах имеет тот же порядок величины, что и количество фотонов, которые испускаются в РЛСЭ в направлении движения электронов. Высокая спектральная плотность эквивалентных фотонов может быть также использована для накачки рентгеновского лазера при когерентной фотоионизации с внутренних оболочек атомов [10].

## Библиографические ссылки

1. Huang Z, Kim K-J. Review of X-ray free-electron laser theory. *Physical Review Accelerators and Beams*. 2007;10:034801. DOI: 10.1103/PhysRevSTAB.10.034801.
2. Skoromnik OD, Baryshevsky VG, Ulyanenko AP, Feranchuk ID. Radical increase of the parametric X-ray intensity under condition of extremely asymmetric diffraction. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*. 2017;412:86–92. DOI: 10.1016/j.nimb.2017.09.013.
3. Ахиезер АИ, Берестецкий ВБ. *Квантовая электродинамика*. Москва: Наука; 1969. 623 с.
4. Ter-Mikaelian ML. *High-energy electromagnetic processes in condensed media*. New York: Wiley; 1972. 457 p.
5. Берестецкий ВБ, Лифшиц ЕМ, Питаевский ЛП. *Релятивистская квантовая теория. Часть I*. Москва: Наука; 1968. 479 с.
6. Adams BW, Christian B, Cavaletto SM, Evers J, Harman Z, Keitel CH, et al. X-ray quantum optics. *Journal of Modern Optics*. 2013;60(1):2–21. DOI: 10.1080/09500340.2012.752113.
7. Feldhaus J, Krikunova M, Meyer M, Moller Th, Moshhammer R, Rudenko A, et al. AMO science at the FLASH and European XFEL free-electron laser facilities. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*. 2013;46(16):164002. DOI: 10.1088/0953-4075/46/16/164002.
8. Skoromnik O, Feranchuk I, Lu DV. Parametric X-ray radiation in the Smith – Purcell geometry for non-destructive beam diagnostics. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*. 2019;444:125–134. DOI: 10.1016/j.nimb.2019.01.003.
9. Фурс АН. Потенциалы электромагнитного поля произвольного распределения зарядов и токов в калибровке Кулона. *Журнал Белорусского государственного университета. Физика*. 2017;1:43–51.
10. Benediktovitch A, Majety VP, Rohringer N. Quantum theory of superfluorescence based on two-point correlation functions. *Physical Review A*. 2019;99:013839. DOI: 10.1103/PhysRevA.99.013839.

## References

1. Huang Z, Kim K-J. Review of X-ray free-electron laser theory. *Physical Review Accelerators and Beams*. 2007;10:034801. DOI: 10.1103/PhysRevSTAB.10.034801.
2. Skoromnik OD, Baryshevsky VG, Ulyanenko AP, Feranchuk ID. Radical increase of the parametric X-ray intensity under condition of extremely asymmetric diffraction. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*. 2017;412:86–92. DOI: 10.1016/j.nimb.2017.09.013.
3. Akhiezer AI, Berestetsky VB. *Kvantovaya elektrodinamika* [Quantum electrodynamics]. Moscow: Nauka; 1969. 623 p. Russian.
4. Ter-Mikaelian ML. *High-energy electromagnetic processes in condensed media*. New York: Wiley; 1972. 457 p.
5. Berestetsky VB, Lifshitz EM, Pitaevsky LP. *Relyativistskaya kvantovaya teoriya. Chast' I* [Relativistic quantum theory. Part 1]. Moscow: Nauka; 1968. 479 p. Russian.
6. Adams BW, Christian B, Cavaletto SM, Evers J, Harman Z, Keitel CH, et al. X-ray quantum optics. *Journal of Modern Optics*. 2013;60(1):2–21. DOI: 10.1080/09500340.2012.752113.
7. Feldhaus J, Krikunova M, Meyer M, Moller Th, Moshhammer R, Rudenko A, et al. AMO science at the FLASH and European XFEL free-electron laser facilities. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*. 2013;46(16):164002. DOI: 10.1088/0953-4075/46/16/164002.
8. Skoromnik O, Feranchuk I, Lu DV. Parametric X-ray radiation in the Smith – Purcell geometry for non-destructive beam diagnostics. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*. 2019;444:125–134. DOI: 10.1016/j.nimb.2019.01.003.
9. Furs AN. The electromagnetic field potentials of an arbitrary charge and current distribution in Coulomb gauge. *Journal of the Belarusian State University. Physics*. 2017;1:43–51. Russian.
10. Benediktovitch A, Majety VP, Rohringer N. Quantum theory of superfluorescence based on two-point correlation functions. *Physical Review A*. 2019;99:013839. DOI: 10.1103/PhysRevA.99.013839.

Статья поступила в редколлегию 25.06.2020.  
Received by editorial board 25.06.2020.