

УДК 533.723:577.352.4(086.48)

АДИАБАТИЧЕСКИЙ БРОУНОВСКИЙ МОТОР СО СТУПЕНЧАТЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ, ВОЗМУЩАЕМЫМ ДИХОТОМНЫМ ГАРМОНИЧЕСКИМ СИГНАЛОМ

И. В. ШАПОЧКИНА¹⁾, А. Д. САВИНА¹⁾, Е. М. ЗАЙЦЕВА²⁾,
В. М. РОЗЕНБАУМ³⁾, М. И. ИКИМ⁴⁾, А. С. БУГАЕВ⁴⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

²⁾Республиканский институт высшей школы, ул. Московская, 15, 220007, г. Минск, Беларусь

³⁾Институт химии поверхности им. А. А. Чуйко НАН Украины,
ул. Генерала Наумова, 17, 03164, г. Киев, Украина

⁴⁾Федеральный исследовательский центр химической физики им. Н. Н. Семенова РАН,
ул. Косыгина, 4, 119991, г. Москва, Россия

Получено аналитическое выражение для средней скорости движения адиабатического броуновского мотора (рэтчета), функционирующего за счет малых дихотомных пространственно-гармонических флуктуаций ступенчатого потенциала. Выявлены свойства симметрии средней скорости как функционала стационарной и флуктуирующей компонент потенциальной энергии наночастицы и определены области значений параметров системы, обеспечивающих движение мотора направо и налево. Показано, что средняя скорость движения мотора является немонотонной функцией высоты ступенчатого потенциала. Для сингулярного (бесконечно высокого и бесконечно узкого) потенциального барьера средняя скорость немонотонно зависит от «мощности» этого барьера (произведения ширины барьера на экспоненту отношения его высоты к тепловой энергии). Статья продолжает развитие теоретических методов симметричного анализа применением предложенных авторами общих подходов к конкретным моторным системам.

Ключевые слова: диффузионный транспорт; диффузионная динамика; рэтчет-системы; адиабатические броуновские моторы; симметрия; ступенчатый потенциал; гармонические флуктуации.

Благодарность. Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф20Р-032) и Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 18-29-02012_мк, 20-57-00007_Бел_а, 21-57-52006_МНТ_а).

Образец цитирования:

Шапочкина ИВ, Савина АД, Зайцева ЕМ, Розенбаум ВМ, Иким МИ, Бугаев АС. Адиабатический броуновский мотор со ступенчатым потенциалом, возмущаемым дихотомным гармоническим сигналом. *Журнал Белорусского государственного университета. Физика.* 2021;2:71–80.
<https://doi.org/10.33581/2520-2243-2021-2-71-80>

For citation:

Shapochkina IV, Savina ND, Zaytseva EM, Rozenbaum VM, Ikim MI, Bugaev AS. Adiabatic Brownian motor with a stepwise potential perturbed by a dichotomous harmonic signal. *Journal of the Belarusian State University. Physics.* 2021;2:71–80. Russian.
<https://doi.org/10.33581/2520-2243-2021-2-71-80>

Сведения об авторах см. на с. 80.

Information about the authors see p. 80.





ADIABATIC BROWNIAN MOTOR WITH A STEPWISE POTENTIAL PERTURBED BY A DICHOTOMOUS HARMONIC SIGNAL

I. V. SHAPOCHKINA^a, N. D. SAVINA^a, E. M. ZAYTSEVA^b,
V. M. ROZENBAUM^c, M. I. IKIM^d, A. S. BUGAEV^d

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

^bNational Institute for Higher Education, 15 Maskoŭskaja Street, Minsk 220007, Belarus

^cChuiko Institute of Surface Chemistry, National Academy of Sciences of Ukraine,
17 Generala Naumova Street, Kiev 03164, Ukraine

^dN. N. Semenov Federal Research Center for Chemical Physics,
Russian Academy of Sciences, 4 Kosygina Street, Moscow 119991, Russia

Corresponding author: I. V. Shapochkina (shapoch@mail.ru)

We obtained an analytical expression for the average motion velocity of an adiabatic Brownian motor (ratchet), which operates due to small dichotomous spatially harmonic fluctuations of a stepwise potential. The symmetry properties of the average velocity as a functional of the stationary and fluctuating components of the nanoparticle potential energy are revealed, and the ranges of values of the system parameters that ensure the rightward and leftward motion of the motor are determined. We showed that the average motor velocity is a non-monotonic function of the stepwise potential height. For a singular (infinitely high and narrow) potential barrier, the average velocity depends non-monotonically on the «power» of this barrier (the barrier width multiplied by the exponent of the ratio of the barrier height to the thermal energy). The article continues the further development of theoretical methods of symmetry analysis by applying the general approaches proposed by the authors to specific motor systems.

Keywords: diffusion transport; diffusional dynamics; ratchet systems; adiabatic Brownian motors; symmetry; stepwise potential; harmonic fluctuations.

Acknowledgements. This work was supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (project F20R-032) and the Russian Foundation for Basic Research (grants 18-29-02012_mk, 20-57-00007_Bel_a, 21-57-52006_MNT_a).

Введение

Моделирование активного транспорта наночастиц [1; 2], возникающего в отсутствие стационарных сил и градиентов концентраций (моторного эффекта или рэтчет-эффекта), в частности его аналитическое описание, призванное выделить ключевые механизмы и обобщить закономерности эффекта, порой требует разработки и привлечения сравнительно простых и наглядных техник, которые бы допускали получение аналитических выражений для характеристик направленного движения наночастиц. Также оно требует построения и использования различных приближений относительно частотных, пространственных и энергетических режимов возникновения движения [3]. В частности, значительное упрощение описания наноразмерных моторных систем достигается при рассмотрении функционирования адиабатического броуновского мотора с кусочно-линейной формой стационарного потенциального профиля, дихотомно возмущаемого пространственно-периодическим сигналом также простой формы [3; 4]. Как в теоретических, так и экспериментальных работах широко распространено использование пилообразного потенциала как стационарной составляющей потенциального рельефа и гармонического сигнала как возмущения [5; 6].

В данной статье в качестве стационарной компоненты рэтчет-потенциала мы рассматриваем разновидность кусочно-линейного потенциала – периодический ступенчатый, форма которого описывается функцией, относящейся к классу симметричных функций (функций *s*-типа) [7]. Хорошо известно, что в системе, обладающей зеркальной симметрией, рэтчет-эффект существовать не может [8; 9]. Очевидно, что эта симметрия может быть нарушена за счет возмущения, асимметричного по пространству и (или) времени. В работе [10] было показано, что рэтчет-эффект может возникать даже при пространственно-симметричном возмущении, если ось симметрии описывающей его функции сдвинута относительно оси симметрии стационарной компоненты потенциала (и сдвиг не равен целому числу полупериодов каждого из потенциальных профилей). Выбор ступенчатого потенциала в качестве стационарной компоненты и пространственно-гармонического сигнала в качестве возмущения позволяет получить достаточно простое явное аналитическое выражение для средней скорости движения такого броуновского мотора, а также наглядно проследить указанное и выявить новые свойства симметрии (в следующем разделе мы приводим физические аргументы выбора таких моделей компонент потенциального профиля). Статья представляет собой развитие теоретических идей по исследованию общих симметричных свойств моделей броуновских моторов [7–11] и ставит своей целью применение их к анализу конкретных систем, а также расширение результатов, приведенных в недавней работе [6].



Основные соотношения и свойства симметрии

Рассматриваемая в настоящей статье рэтчет-система представляет собой адиабатически быстрый [11] броуновский мотор, характеризуемый периодическими функциями $u(x)$ и $w(x)$ с периодом L ($u(x+L) = u(x)$, $w(x+L) = w(x)$), задающими стационарный потенциальный рельеф и форму его дихотомного возмущения соответственно. Тем самым пространственно-временная зависимость потенциальной энергии наночастицы частицы имеет аддитивно-мультипликативный вид $U(x, t) = u(x) + \sigma(t)w(x)$ с функцией возмущения $\sigma(t)$, описывающей дихотомный (стохастический или детерминистический периодический) процесс, т. е. флуктуирует между двумя состояниями, задаваемыми $\sigma(t) = \pm 1$, с временами жизни, значительно превышающими иные характерные времена системы. Такая модель весьма популярна в теории броуновских моторов, поскольку позволяет описывать разнообразные теоретические и экспериментальные системы и характеризуется набором нетривиальных свойств [3; 4; 11]. В приближении малых флуктуаций потенциальной энергии ($\beta|w(x)| \ll 1$, где $\beta = (k_B T)^{-1}$, k_B – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура) общее выражение для средней скорости движения рассматриваемого броуновского мотора может быть представлено следующим образом (см. формулу (35) в [3]):

$$v = -\frac{4L\beta^2}{\tau} \Phi\{u(x)\}, \quad \Phi\{u(x)\} = \int_{-L/2}^{L/2} dx R(x; u(x)) \int_{-L/2}^x dy R(y; -u(y)),$$

$$R(x; \pm u(x)) = \rho_{\pm}(x) \left[w(x) - \int_{-L/2}^{L/2} dz \rho_{\pm}(z) w(z) \right], \quad \rho_{\pm}(x) = \frac{e^{\pm \beta u(x)}}{\int_{-L/2}^{L/2} dx e^{\pm \beta u(x)}}. \quad (1)$$

Здесь τ – период дихотомного процесса, связанный в случае стохастического процесса с его обратным временем корреляции Γ соотношением $\tau = \frac{4}{\Gamma}$. В адиабатическом приближении период τ предполагается достаточно большим по сравнению с характерным временем диффузии $\tau_D = \frac{L^2}{D}$ на периоде L (D – коэффициент диффузии), в силу чего можно считать, что функция распределения координаты броуновской частицы близка к равновесной больцмановской функции распределения $\rho_{\pm}(x)$. Приближение малых флуктуаций обосновано для описания рэтчет-систем, в которых возмущение имеет искусственную природу и мало в сравнении со взаимодействием частицы с подложкой (треком) $u(x)$. Примерами потребителей этого приближения могут выступать частицы, движущиеся в растворах, вихри в сверхпроводниках и пр. (см. цитируемые в обзоре [3] работы [77–82]). Управляющим сигналом при этом могут служить пространственно-гармонические возмущения с различными временными зависимостями. Большие величины возмущений предполагаются обычно при описании молекулярных рэтчетов биологической природы.

В выражении (1) при выбранной форме возмущающего сигнала величина $\Phi\{u(x)\}$ является функционалом стационарного потенциального профиля $u(x)$. Покажем справедливость следующего равенства:

$$\Phi\{-u(x)\} = -\Phi\{u(x)\}, \quad (2)$$

утверждающего, что $\Phi\{u(x)\}$ – нечетный функционал $u(x)$. Для этого заменим порядок следования интегралов в выражении для $\Phi\{u(x)\}$ в (1) и воспользуемся тождеством $\int_{-L/2}^{L/2} dx R(x; u(x)) = 0$:

$$\begin{aligned} \Phi\{u(x)\} &= \int_{-L/2}^{L/2} dy R(y; -u(y)) \int_y^{L/2} dx R(x; u(x)) = \\ &= - \int_{-L/2}^{L/2} dy R(y; -u(y)) \int_{-L/2}^y dx R(x; u(x)) = -\Phi\{-u(x)\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Отметим, что доказанное посредством (3) свойство симметрии (2) демонстрирует частный случай более общего свойства нечетности функционала средней скорости так называемых адиабатически



быстрых броуновских моторов (к которым относятся и рассматриваемые моторы с чисто дихотомным изменением потенциальной энергии со временем) по стационарной компоненте потенциала, доказанного в работе [11] без использования приближения малых флуктуаций.

Выделим далее симметричную (s -тип) и антисимметричную (a -тип) составляющие функции $R(x; u(x))$:

$$R(\pm x; u(x)) = R_s(x; u(x)) \pm R_a(x; u(x)).$$

Тогда путем разбиения двукратного интеграла на два интеграла, в каждом из которых внешнее интегрирование выполнено по половине периода, можно получить следующее представление для функционала $\Phi\{u(x)\}$ (удовлетворяющее, как и должно быть, свойству (2)):

$$\Phi\{u(x)\} = 2[\Phi_{sa}\{u(x)\} - \Phi_{sa}\{-u(x)\}], \quad (4)$$

где введен вспомогательный функционал

$$\Phi_{sa}\{u(x)\} = \int_0^{L/2} dx R_s(x; u(x)) \int_0^x dy R_a(y; -u(y)). \quad (5)$$

Далее будем считать, что стационарный профиль $u(x)$ описывается произвольной симметричной периодической функцией ($u(x - x_s) = u(-x - x_s)$). Если выбрать начало координат, совпадающее с положением ее оси симметрии x_s , то функция $u(x)$ станет четной, $u(-x) = u(x)$. Тогда симметричная и антисимметричная составляющие функции $R(x; u(x))$ будут определяться посредством симметричной $w_s(x)$ и антисимметричной $w_a(x)$ составляющих функции возмущения $w(x)$ соответственно ($w(\pm x) = w_s(x) \pm w_a(x)$):

$$R_s(x; u(x)) = \rho_+(x) \left[w_s(x) - 2 \int_0^{L/2} dz \rho_+(z) w_s(z) \right], \quad R_a(x; -u(x)) = \rho_-(x) w_a(x). \quad (6)$$

Соотношения (4)–(6) позволяют рассчитать среднюю скорость рассматриваемого броуновского мотора (1) наиболее эффективным способом, с учетом свойств симметрии определяющих функций.

Ступенчатый потенциал, возмущаемый гармоническим сигналом

Кусочно-линейные формы потенциальных профилей играют особую роль в теории и экспериментальной реализации рэтчет-систем. Это обусловлено как возможностью получения аналитических решений для таких профилей, так и сравнительной простотой их реализации (подробнее см. введение в [12]). В одной из классических работ Р. Д. Астумяна [13] была предложена типичная реализация такого потенциала в схеме молекулярного насоса для сепарации частиц, в котором заряженные частицы двигались в электрическом поле электродов чередующихся полярностей и расстояний между ними (см. также [14] и экспериментальную реализацию данной геометрии в диэлектрофоретическом рэтчете в работе [15]). Потенциальный рельеф в рассматриваемом случае называется пилообразным (рис. 1, a). Ступенчатый потенциальный профиль может возникнуть как модификация данной схемы при чередовании уже пар электродов (одинаковых полярностей внутри пары, отличных от полярностей соседней пары) (см. рис. 1, b). При стремлении расстояний между электродами с разной полярностью к нулю потенциальный профиль стремится к строго ступенчатой форме.

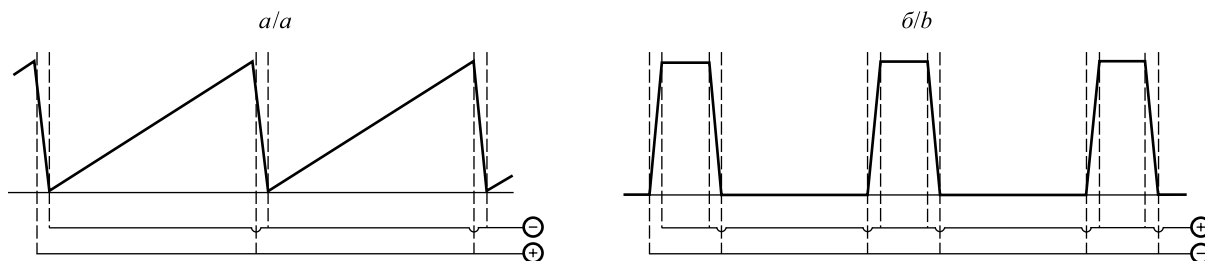


Рис. 1. Схематическое изображение последовательности электродов, служащих источником кусочно-линейных потенциалов:
 a – пилообразного; b – ступенчатого

Fig. 1. Schematic representation of a sequence of electrodes as a source of piecewise linear potentials: a – sawtooth; b – stepwise



Таким образом, определив в (6) функцию $u(x)$ как симметричную периодическую, выберем в качестве стационарной составляющей потенциальной энергии наночастицы ступенчатый потенциальный профиль $u(x)$ (рис. 2), задаваемый на периоде его изменения как

$$u(x) = \begin{cases} u_0, & 0 < x < \frac{l}{2}, \\ 0, & \frac{l}{2} < x < \frac{L}{2}, \end{cases} \quad (7)$$

$$u(-x) = u(x), \quad u(x+L) = u(x).$$

Тогда фигурирующие в (1) функции $\rho_{\pm}(x)$, являющиеся равновесными функциями распределения в потенциалах $\mp u(x)$, запишутся в виде

$$\rho_{\pm}(x) = \frac{1}{Z_{\pm}} \begin{cases} e^{\pm \beta u_0}, & 0 < x < \frac{l}{2}, \\ 1, & \frac{l}{2} < x < \frac{L}{2}, \end{cases} \quad (8)$$

$$Z_{\pm} = L \left[1 + \lambda (e^{\pm \beta u_0} - 1) \right], \quad \lambda = \frac{l}{L}.$$

Отметим, что ступенчатый потенциал также позволяет простейшим образом ввести в рассмотрение энергетические барьеры u_0 , конкуренция значений которых с тепловой энергией определяет многие свойства рэтчетов. Влияние тонкой структуры потенциального профиля, отличного от описываемого кусочно-линейными функциями, методик и сложностей численных расчетов в более реалистичных моделях обсуждалось в работах [3–5; 16–18].

В продолжение развития моделей из работ [5; 6] в качестве формы возмущения – функции $w(x)$ – выберем пространственно-гармонический сигнал (см. также [10] как обоснование выбора), характеризующийся фазовым сдвигом λ_0 :

$$w(x) = w_0 \cos \left[2\pi \left(\frac{x}{L} - \lambda_0 \right) \right]. \quad (9)$$

Одна из реализаций возмущения формы (9) – использование интерференции лазерных пучков, которые создают пространственно-периодический потенциал, широко применяемый в броуновских рэтчетах на оптических решетках [19; 20]. Добавление в (9) более высоких гармоник порождает сложные модели (решаемые численно) с флуктуирующим потенциальным профилем с двумя и более ямами, позволяющие описывать такие эффекты, как, например, температурное обращение направления движения рэтчета [17]. Однако эти эффекты более выражены все же вне приближения малых флуктуаций потенциальной энергии, когда изменение формы профиля при переключении состояний более существенно.

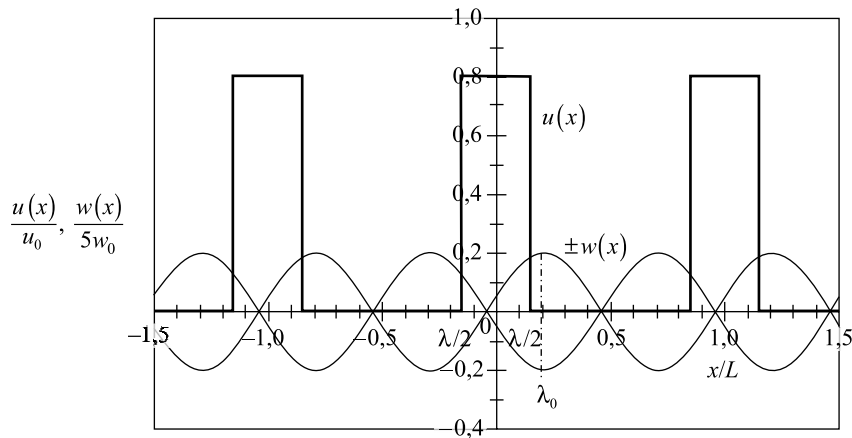


Рис. 2. Ступенчатый потенциальный профиль $u(x)$, возмущаемый дихотомными пространственно-гармоническими флуктуациями $w(x)$

Fig. 2. The stepwise potential profile $u(x)$ perturbed by dichotomous spatially harmonic fluctuations $w(x)$



Итак, симметричная $w_s(x)$ и антисимметричная $w_a(x)$ составляющие функции $w(x)$ запишутся в виде

$$w_s(x) = w_0 \cos(2\pi\lambda_0) \cos \frac{2\pi x}{L}, \quad w_a(x) = w_0 \sin(2\pi\lambda_0) \sin \frac{2\pi x}{L}. \quad (10)$$

Взятие интегралов в соотношениях (5) и (6) с подстановкой (8), (10) и упрощение полученных выражений приводят к следующему результату:

$$\Phi_{sa}\{u(x)\} = -\frac{L^2 w_0^2 \sin(4\pi\lambda_0)}{16\pi^2 Z_+ Z_-} \left[\pi + \frac{L}{Z_+} (e^{\beta u_0} - 1) \sin(2\pi\lambda) \right]. \quad (11)$$

Функционал $\Phi_{sa}\{u(x)\}$ здесь характеризуется зависимостями от высоты ступенчатого потенциала u_0 и амплитуды гармонического сигнала w_0 . Также он определяется фазовым сдвигом λ_0 и параметром $\lambda = \frac{l}{L}$, характеризующим относительную ширину «ступеньки» ступенчатого потенциала. Выражение для входящего в формулу (4) функционала $\Phi_{sa}\{-u(x)\}$ для данной модели получается из (11) заменой u_0 на $-u_0$ (и, соответственно, $Z_{\pm}$ на $Z_{\mp}$). В силу этого первое слагаемое в (11) не дает вклада в разность $\Phi_{sa}\{u(x)\} - \Phi_{sa}\{-u(x)\}$. Кроме того, имеет место тождество

$$L \frac{e^{\beta u_0} - 1}{Z_+} - L \frac{e^{-\beta u_0} - 1}{Z_-} = \frac{2 \sinh \beta u_0}{1 + 4\lambda(1-\lambda) \sinh^2 \frac{\beta u_0}{2}}. \quad (12)$$

Второе слагаемое в (11) при учете тождества (12) приведет к следующему окончательному выражению для средней скорости движения рассматриваемого адиабатического броуновского мотора:

$$v = v_0 \frac{\sinh(\beta u_0) \sin(2\pi\lambda) \sin(4\pi\lambda_0)}{\left[1 + 4\lambda(1-\lambda) \sinh^2 \frac{\beta u_0}{2} \right]^2}, \quad v_0 = \frac{L}{\pi^2 \tau} (\beta w_0)^2. \quad (13)$$

Аналитическое представление скорости броуновского мотора (13) является основным результатом данной статьи и будет анализироваться в следующем разделе.

Обсуждение результатов и выводы

Начнем с анализа свойств симметрии, следующих из структуры функции (13). Одна из двух осей симметрии ступенчатого потенциала проходит через начало координат. Ось симметрии возмущающего гармонического сигнала (9) имеет координату $L\lambda_0$. Сомножитель $\sin(4\pi\lambda_0)$ в выражении (13) обращает последнее в нуль при $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 = \frac{1}{2}$, т. е. когда оси симметрии функций $u(x)$ и $w(x)$ совпадают или сдвинуты на полпериода. Средняя скорость движения также обращается в нуль (рэтчет-эффект отсутствует), если «ступеньки» отстоят друг от друга на расстояние, равное их ширине: $\lambda = \frac{l}{L} = \frac{1}{2}$. В этом случае функция $u(x)$, кроме того, что она относится к классу симметричных функций, становится также сдвигово-симметричной, $u\left(x + \frac{L}{2}\right) = -u(x)$. Поскольку такому же свойству удовлетворяет функция $w(x)$ координатной зависимости возмущения, то полная потенциальная энергия рэтчет-частицы, испытывающая дихотомные флуктуации во времени $U(x, t) = u(x) \pm w(x)$, характеризуется пространственной сдвиговой симметрией и принадлежит к суперсимметричным пространственно-временным зависимостям, для которых рэтчет-эффект отсутствует [8]. Случаи $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ означают отсутствие ступенчатого потенциала, что при учете свойства симметрии (2) с $u(x) = 0$ также означает и отсутствие рэтчет-эффекта. Аналогичный результат следует из выражения (13) ввиду обращения в нуль фактора $\sin(2\pi\lambda)$. Все перечисленные здесь выводы находятся в соответствии с общими результатами работы [10].



Направление движения рассматриваемого броуновского мотора определяется значениями параметров λ и λ_0 . На рис. 3 показаны области значений этих величин, при которых броуновский мотор движется направо или налево. Горизонтальные и вертикальные разделяющие линии соответствуют обращению скорости в нуль, т. е. отображают возникновение так называемых точек остановки мотора. Положения точек остановки следуют из отмеченных выше свойств симметрии и являются важными характеристиками функционирования броуновского мотора. Важно подчеркнуть, что для определения точек остановки представленная здесь аналитически решаемая модель имеет большие преимущества перед соответствующими численными процедурами, которые для рэтчетов, имеющих скачкообразное поведение в пространственных зависимостях потенциальных профилей, вызывают значительные затруднения в их реализации.

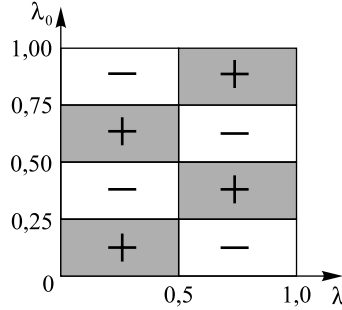


Рис. 3. Области значений параметров λ и λ_0 , соответствующие движению броуновского мотора направо (знак +, серый фон) и налево (знак -, белый фон)

Fig. 3. Ranges of λ and λ_0 values which correspond to the rightward (+ sign, grey colour) and leftward (- sign, white colour) motion of the Brownian motor

Скорость (13) является нечетной функцией параметра u_0 , что есть следствие нечетности функционала $\Phi\{u(x)\}$ по $u(x)$ (соотношение (2)). Пропорциональность выражения (13) фактору $(\beta w_0)^2$ отражает тот факт, что оно получено в приближении малых флуктуаций $\beta w_0 \ll 1$. Если же дополнительно использовать и высокотемпературное приближение $\beta u_0 \ll 1$, то соотношение (13) принимает простой вид:

$$v = \frac{L}{\pi^2 \tau} \beta^3 u_0 w_0^2 \sin(2\pi\lambda) \sin(4\pi\lambda_0). \quad (14)$$

Отметим, что формула (14) также следует из полученного в работе [5] высокотемпературного соотношения (39), если в нем использовать выражение $u_2 = (2\pi)^{-1} u_0 \sin(2\pi\lambda)$ для второй гармоники стационарной компоненты потенциала (здесь – ступенчатой функции (7)) и выражение $\tilde{\Psi}_2 = \pi^{-2} \frac{\tau_D}{\tau}$, следующее из формулы (52) той же работы в адиабатическом приближении $\frac{\tau_D}{\tau} \ll 1$. Приведенные сопоставления свидетельствуют о достоверности полученного результата (13).

Средняя скорость рассматриваемого броуновского мотора является немонотонной функцией высоты u_0 потенциального барьера ступенчатого потенциала $u(x)$ (рис. 4). По мере уменьшения значений относительных ширин «ступеньки» λ от $\frac{1}{2}$ до 0 максимумы зависимостей $\frac{v}{v_0}$ от u_0 сначала возрастают, причем возникая при близких значениях u_0 , а затем стремятся к величине $0,785$ ($\lambda_0 = \frac{1}{8}$), сдвигаясь при этом вправо, т. е. соответствуя все большим значениям u_0 .

Чтобы объяснить наблюдаемое поведение средней скорости мотора $\frac{v}{v_0}$, найдем асимптотику выражения (13) при $\beta u_0 \gg 1$ и $\lambda \ll 1$. В области справедливости данных неравенств $\sinh(\beta u_0) \sin(2\pi\lambda) \approx \pi\lambda \exp(\beta u_0)$, $4\lambda(1-\lambda) \sinh^2 \frac{\beta u_0}{2} \approx \lambda \exp(\beta u_0)$. Тогда, вводя новую переменную $\alpha = \lambda \exp(\beta u_0)$, получаем

$$\frac{v}{v_0} = \pi \frac{\alpha}{(1+\alpha)^2} \sin(4\pi\lambda_0). \quad (15)$$

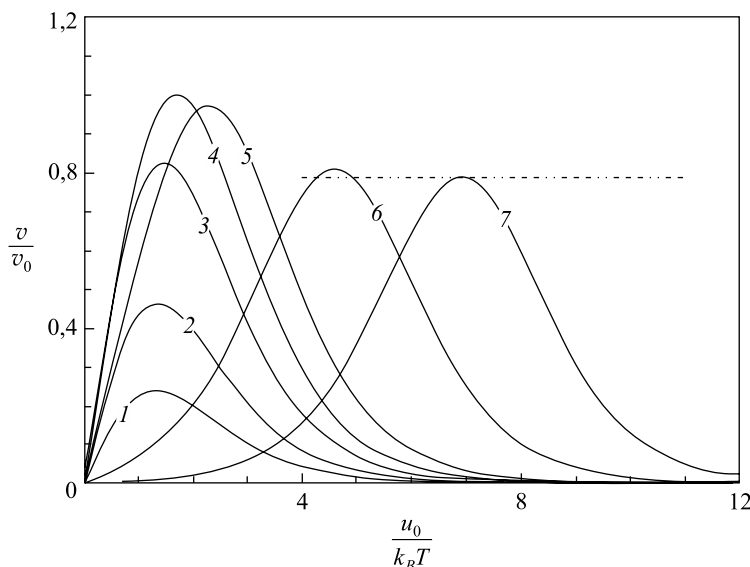


Рис. 4. Зависимость средней скорости адиабатического броуновского мотора (в единицах размерного параметра $v_0 = \frac{L(\beta w_0)^2}{\pi^2 \tau}$) от высоты «ступеньки» u_0 (в единицах $k_B T$) при $\lambda_0 = \frac{1}{8}$ и различных значениях безразмерных ширины «ступеньки» $\lambda = \frac{l}{L}$: 1 – 0,45; 2 – 0,4; 3 – 0,3; 4 – 0,2; 5 – 0,1; 6 – 0,01; 7 – 0,001.

Штриховая линия показывает положения максимумов при $\lambda \rightarrow 0$

Fig. 4. Dependence of the average velocity of the adiabatic Brownian motor (in units of the dimensional parameter $v_0 = \frac{L(\beta w_0)^2}{\pi^2 \tau}$) on the step height u_0 (in $k_B T$ units) at $\lambda_0 = \frac{1}{8}$ and various values of the dimensionless step widths

$\lambda = \frac{l}{L}$: 1 – 0.45; 2 – 0.4; 3 – 0.3; 4 – 0.2; 5 – 0.1; 6 – 0.01; 7 – 0.001.

The dashed line shows the maxima positions at $\lambda \rightarrow 0$

Максимальное значение средней скорости (15) равно $\frac{\pi}{4} \sin(4\pi\lambda_0)$ (см. пунктирную линию на рис. 3) и соответствует $\alpha = 1$, т. е. достигается при амплитудах стационарной части потенциала $\frac{u_0}{k_B T} = -\ln \lambda$.

Описанное асимптотическое (логарифмическое) поведение объясняет наблюдаемые на рис. 4 сдвиги максимумов в области значений параметров мотора $\beta u_0 \gg 1$ и $\lambda \ll 1$. Отметим, что введенный здесь параметр α имеет смысл «мощности» бесконечно высокого и бесконечно узкого, так называемого сингулярного, потенциального барьера. Такая величина вводилась в работах [21–23].

Заключение

Рассмотренная модель адиабатического броуновского мотора, функционирующего за счет малых дихотомных пространственно-гармонических флуктуаций ступенчатого потенциала, позволила получить аналитическое выражение для средней скорости движения мотора. С помощью этого результата удалось исследовать свойства симметрии модели, области значений параметров, определяющих направление движения мотора, и немонотонный характер зависимости средней скорости от высоты ступенчатого потенциала. Показано, что в случае бесконечно высокого и бесконечно узкого ступенчатого потенциала (сингулярного потенциального барьера) средняя скорость немонотонно зависит от «мощности» этого барьера (произведения ширины барьера на экспоненту отношения его высоты к тепловой энергии).

Библиографические ссылки

1. Bressloff PC, Newby JM. Stochastic models of intracellular transport. *Reviews of Modern Physics*. 2013;85(1):135–196. DOI: 10.1103/RevModPhys.85.135.
2. Cubero D, Renzoni F. *Brownian ratchets: from statistical physics to bio and nano-motors*. Cambridge: Cambridge University Press; 2016. 200 p.

3. Розенбаум ВМ, Шапочкина ИВ, Трахтенберг ЛИ. Метод функций Грина в теории броуновских моторов. *Успехи физических наук*. 2019;189(5):529–543. DOI: 10.3367/UFNr.2018.04.038347.
4. Гуляев ЮВ, Бугаев АС, Розенбаум ВМ, Трахтенберг ЛИ. Управление нанотранспортом с помощью рэтчет-эффекта. *Успехи физических наук*. 2020;190(4):337–354. DOI: 10.3367/UFNr.2019.05.038570.
5. Rozenbaum VM, Shapochkina IV, Teranishi Y, Trakhtenberg LI. High-temperature ratchets driven by deterministic and stochastic fluctuations. *Physical Review E*. 2019;99(1):012103. DOI: 10.1103/PhysRevE.99.012103.
6. Шапочкина ИВ, Савина АД, Розенбаум ВМ, Корочкова ТЕ. Свойства симметрии броуновского мотора с пилообразным потенциалом, возмущаемым гармоническими флуктуациями. *Журнал Белорусского государственного университета. Физика*. 2021;1:41–49. DOI: 10.33581/2520-2243-2021-1-41-49.
7. Розенбаум ВМ, Шапочкина ИВ, Тераниши Ё, Трахтенберг ЛИ. Симметрия пульсирующих рэтчетов. *Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 2018;107(7–8):525–531. DOI: 10.7868/S0370274X18080118.
8. Reimann P. Supersymmetric ratchets. *Physical Review Letters*. 2001;86(22):4992–4995. DOI: 10.1103/PhysRevLett.86.4992.
9. Denisov S, Flach S, Hänggi P. Tunable transport with broken space – time symmetries. *Physics Reports*. 2014;538(3):77–120. DOI: 10.1016/j.physrep.2014.01.003.
10. Rozenbaum VM, Shapochkina IV, Teranishi Y, Trakhtenberg LI. Symmetry of deterministic ratchets. *Physical Review E*. 2019;100(2):022115. DOI: 10.1103/PhysRevE.100.022115.
11. Rozenbaum VM, Makhnovskii YuA, Shapochkina IV, Sheu S-Y, Yang D-Y, Lin SH. Adiabatically slow and adiabatically fast driven ratchets. *Physical Review E*. 2012;85(4):041116. DOI: 10.1103/PhysRevE.85.041116.
12. Rozenbaum VM, Shapochkina IV, Sheu S-Y, Yang D-Y, Lin SH. High-temperature ratchets with saw-tooth potentials. *Physical Review E*. 2016;94(5):052140. DOI: 10.1103/PhysRevE.94.052140.
13. Astumian RD. Thermodynamics and kinetics of a Brownian motor. *Science*. 1997;276(5314):917–922. DOI: 10.1126/science.276.5314.917.
14. Lau B, Kedem O, Schwabacher J, Kwasniewski D, Weiss EA. An introduction to ratchets in chemistry and biology. *Materials Horizons*. 2017;4(3):310–318. DOI: 10.1039/c7mh00062f.
15. Germs WC, Roeling EM, van IJendoorn LJ, Smalbrugge B, de Vries T, Geluk EJ, et al. High-efficiency dielectrophoretic ratchet. *Physical Review E*. 2012;86(4):041106. DOI: 10.1103/PhysRevE.86.041106.
16. Rozenbaum VM, Makhnovskii YuA, Shapochkina IV, Sheu S-Y, Yang D-Y, Lin SH. Diffusion of a massive particle in a periodic potential: application to adiabatic ratchets. *Physical Review E*. 2015;92(6):062132. DOI: 10.1103/PhysRevE.92.062132.
17. Швед НЮ, Шапочкина ИВ, Розенбаум ВМ. Температурное обращение движения адиабатического броуновского мотора. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика*. 2014;2:27–32.
18. Высоцкая ВА, Шапочкина ИВ, Розенбаум ВМ, Трахтенберг ЛИ. Диффузия броуновских частиц в пространственно-периодическом потенциале с конечным временем жизни. *Журнал Белорусского государственного университета. Физика*. 2017;3:33–40.
19. Faucheux LP, Bourdieu LS, Kaplan PD, Libchaber AJ. Optical thermal ratchet. *Physical Review Letters*. 1995;74(9):1504–1507. DOI: 10.1103/physrevlett.74.1504.
20. Robilliard C, Lucas D, Grynberg G. Modelling a ratchet with cold atoms in an optical lattice. *Applied Physics A*. 2002;75(2):213–216. DOI: 10.1007/s003390201333.
21. Розенбаум ВМ. Механизм возникновения высокой эффективности броуновского мотора с флуктуирующим потенциалом. *Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 2004;79(8):475–479.
22. Rozenbaum VM, Korochkova TYe, Liang KK. Conventional and generalized efficiencies of flashing and rocking ratchets: analytical comparison of high-efficiency limits. *Physical Review E*. 2007;75(6):061115. DOI: 10.1103/PhysRevE.75.061115.
23. Rozenbaum VM, Makhnovskii YuA, Shapochkina IV, Sheu S-Y, Yang D-Y, Lin SH. Adiabatically driven Brownian pumps. *Physical Review E*. 2013;88(1):012104. DOI: 10.1103/PhysRevE.88.012104.

References

1. Bressloff PC, Newby JM. Stochastic models of intracellular transport. *Reviews of Modern Physics*. 2013;85(1):135–196. DOI: 10.1103/RevModPhys.85.135.
2. Cubero D, Renzoni F. *Brownian ratchets: from statistical physics to bio and nano-motors*. Cambridge: Cambridge University Press; 2016. 200 p.
3. Rozenbaum VM, Shapochkina IV, Trakhtenberg LI. Green’s function method in the theory of Brownian motors. *Uspekhi fizicheskikh nauk*. 2019;189(5):529–543. Russian. DOI: 10.3367/UFNr.2018.04.038347.
4. Gulyaev YuV, Bugaev AS, Rozenbaum VM, Trakhtenberg LI. Nanotransport controlled by the ratchet effect. *Uspekhi fizicheskikh nauk*. 2020;190(4):337–354. Russian. DOI: 10.3367/UFNr.2019.05.038570.
5. Rozenbaum VM, Shapochkina IV, Teranishi Y, Trakhtenberg LI. High-temperature ratchets driven by deterministic and stochastic fluctuations. *Physical Review E*. 2019;99(1):012103. DOI: 10.1103/PhysRevE.99.012103.
6. Shapochkina IV, Savina ND, Rozenbaum VM, Korochkova TYe. Symmetry properties of a Brownian motor with a sawtooth potential perturbed by harmonic fluctuations. *Journal of the Belarusian State University. Physics*. 2021;1:41–49. Russian. DOI: 10.33581/2520-2243-2021-1-41-49.
7. Rozenbaum VM, Shapochkina IV, Teranishi Y, Trakhtenberg LI. [Symmetry of pulsating ratchets]. *Pis’ma v Zhurnal eksperimental’noi i teoreticheskoi fiziki*. 2018;107(7–8):525–531. Russian. DOI: 10.7868/S0370274X18080118.
8. Reimann P. Supersymmetric ratchets. *Physical Review Letters*. 2001;86(22):4992–4995. DOI: 10.1103/PhysRevLett.86.4992.
9. Denisov S, Flach S, Hänggi P. Tunable transport with broken space – time symmetries. *Physics Reports*. 2014;538(3):77–120. DOI: 10.1016/j.physrep.2014.01.003.
10. Rozenbaum VM, Shapochkina IV, Teranishi Y, Trakhtenberg LI. Symmetry of deterministic ratchets. *Physical Review E*. 2019;100(2):022115. DOI: 10.1103/PhysRevE.100.022115.
11. Rozenbaum VM, Makhnovskii YuA, Shapochkina IV, Sheu S-Y, Yang D-Y, Lin SH. Adiabatically slow and adiabatically fast driven ratchets. *Physical Review E*. 2012;85(4):041116. DOI: 10.1103/PhysRevE.85.041116.



12. Rozenbaum VM, Shapochkina IV, Sheu S-Y, Yang D-Y, Lin SH. High-temperature ratchets with saw-tooth potentials. *Physical Review E*. 2016;94(5):052140. DOI: 10.1103/PhysRevE.94.052140.
13. Astumian RD. Thermodynamics and kinetics of a Brownian motor. *Science*. 1997;276(5314):917–922. DOI: 10.1126/science.276.5314.917.
14. Lau B, Kedem O, Schwabacher J, Kwasniewski D, Weiss EA. An introduction to ratchets in chemistry and biology. *Materials Horizons*. 2017;4(3):310–318. DOI: 10.1039/c7mh00062f.
15. Germs WC, Roeling EM, van IJendoorn LJ, Smalbrugge B, de Vries T, Geluk EJ, et al. High-efficiency dielectrophoretic ratchet. *Physical Review E*. 2012;86(4):041106. DOI: 10.1103/PhysRevE.86.041106.
16. Rozenbaum VM, Makhnovskii YuA, Shapochkina IV, Sheu S-Y, Yang D-Y, Lin SH. Diffusion of a massive particle in a periodic potential: application to adiabatic ratchets. *Physical Review E*. 2015;92(6):062132. DOI: 10.1103/PhysRevE.92.062132.
17. Shved NYu, Shapochkina IV, Rozenbaum VM. [Temperature-induced reversal of the motion direction of an adiabatic Brownian motor]. *Vestnik BGU. Seriya I. Fizika. Matematika. Informatika*. 2014;2:27–32. Russian.
18. Vysotskaya UA, Shapochkina IV, Rozenbaum VM, Trakhtenberg LI. Diffusion of Brownian particles in a spatially periodic potential with a finite life-time. *Journal of the Belarusian State University. Physics*. 2017;3:33–40. Russian.
19. Faucheux LP, Bourdieu LS, Kaplan PD, Libchaber AJ. Optical thermal ratchet. *Physical Review Letters*. 1995;74(9):1504–1507. DOI: 10.1103/physrevlett.74.1504.
20. Robilliard C, Lucas D, Grynberg G. Modelling a ratchet with cold atoms in an optical lattice. *Applied Physics A*. 2002;75(2):213–216. DOI: 10.1007/s003390201333.
21. Rozenbaum VM. [Mechanism for the appearance of a high-efficiency Brownian motor with fluctuating potential]. *Pis'ma v Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki*. 2004;79(8):475–479. Russian.
22. Rozenbaum VM, Korochkova TYe, Liang KK. Conventional and generalized efficiencies of flashing and rocking ratchets: analytical comparison of high-efficiency limits. *Physical Review E*. 2007;75(6):061115. DOI: 10.1103/PhysRevE.75.061115.
23. Rozenbaum VM, Makhnovskii YuA, Shapochkina IV, Sheu S-Y, Yang D-Y, Lin SH. Adiabatically driven Brownian pumps. *Physical Review E*. 2013;88(1):012104. DOI: 10.1103/PhysRevE.88.012104.

Получена 18.02.2021 / исправлена 01.03.2021 / принята 26.03.2021.
Received 18.02.2021 / revised 01.03.2021 / accepted 26.03.2021.

Авторы:

Ирина Викторовна Шапочкина – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры компьютерного моделирования физического факультета.

Анастасия Дмитриевна Савина – студентка физического факультета. Научный руководитель – И. В. Шапочкина.

Елена Михайловна Зайцева – кандидат физико-математических наук, доцент; профессор кафедры информационных технологий в образовании.

Виктор Михайлович Розенбаум – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий отделом теоретической и экспериментальной физики наносистем.

Мария Ильинична Иким – кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник лаборатории функциональных нанокompозитов отдела кинетики и катализа.

Александр Степанович Бугаев – академик РАН, доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник лаборатории функциональных нанокompозитов отдела кинетики и катализа.

Authors:

Irina V. Shapochkina, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of computer modelling, faculty of physics.

shapoch@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-6962-7931>

Nastassia D. Savina, student at the faculty of physics.

sadfiz@mail.ru

Elena M. Zaytseva, PhD (physics and mathematics), docent; professor at the department of information technologies in education.

helena-zay@yandex.by

Viktor M. Rozenbaum, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of theoretical and experimental physics of nanosystems.

vik-roz@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0003-2889-3915>

Maria I. Ikim, PhD (physics and mathematics); senior researcher at the laboratory of functional nanocomposites, department of kinetics and catalysis.

ikim1104@rambler.ru

<https://orcid.org/0000-0003-4411-1119>

Aleksander S. Bugaev, academician of the Russian Academy of Sciences, doctor of science (physics and mathematics), full professor; chief researcher at the laboratory of functional nanocomposites, department of kinetics and catalysis.

bugaev@cplire.ru