

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРА КОНУСНОСТИ БЕССЕЛЕВА СВЕТОВОГО ПУЧКА ПОСРЕДСТВОМ ФУРЬЕ-АНАЛИЗА ДИАМЕТРАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ

А. А. РЫЖЕВИЧ<sup>1), 2)</sup>, И. В. БАЛЫКИН<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Институт физики НАН Беларуси, пр. Независимости, 68-2, 220072, г. Минск, Беларусь

<sup>2)</sup>Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Получены выражения, описывающие спектральную плотность мощности (СПМ) распределения интенсивности идеального бесселева светового пучка (БСП). Показано, что СПМ распределения интенсивности идеального БСП ограничена сверху и верхняя граница СПМ равна удвоенному параметру конусности (произведению волнового числа на синус половинного угла раствора конуса волновых векторов), а число нулей в СПМ идеального БСП, расположенных на интервале от нулевой частоты до верхней границы спектра, равно порядку пучка. Предложена методика оценки параметра конусности БСП посредством анализа оценок СПМ диаметральных распределений – одномерных распределений интенсивности, полученных в поперечной плоскости пучка вдоль линии, проходящей через ось пучка, из двумерных поперечных распределений интенсивности БСП, зафиксированных в виде цифровых компьютерных изображений. Исследовано влияние обрезки (окончания распределения на границе чувствительного сенсора), гауссовой и косинусной модуляций диаметрального распределения на форму спектра, а в случае обрезки и на ошибку оценки параметра конусности с использованием предложенной методики. Описанная методика протестирована на примере анализа экспериментальных БСП различных порядков (БСП<sub>*m*</sub>, *m* = 0, 1, 2). Она может применяться для оценки параметров качества БСП. Результаты анализа влияния косинусной модуляции на форму СПМ могут быть использованы для оценки величины скругления верхушки аксикона, формирующего БСП, в целях контроля качества изготовления аксикона.

**Ключевые слова:** бесселев световой пучок; угол конусности; параметр конусности; спектральная плотность мощности.

**Благодарность.** Работа выполнена в рамках задания 1.1.01 «Разработка физических основ распространения и преобразования квазибездифракционных вихревых световых пучков нового типа в анизотропных, неоднородных и рассеивающих средах и создание на этой основе инновационных диагностических оптико-электронных устройств» (№ гос. регистрации 20160091) государственной программы научных исследований «Фотоника, опто- и микроэлектроника» на 2016–2020 гг. и задания 1.1 «Разработка методов и устройств диагностики материалов, процессов и изделий в оптическом и терагерцевом диапазонах спектра и их применение для оптической связи, микроскопии и определения характеристик различных объектов» (№ гос. регистрации 20210300 от 23.03.2021 г.) государственной программы научных исследований «Фотоника и электроника для инноваций» на 2021–2025 гг.

### Образец цитирования:

Рыжевич АА, Балыкин ИВ. Определение параметра конусности бесселева светового пучка посредством фурье-анализа диаметрального распределения интенсивности. *Журнал Белорусского государственного университета. Физика.* 2022; 1:20–34.  
<https://doi.org/10.33581/2520-2243-2022-1-20-34>

### For citation:

Ryzhevich AA, Balykin IV. Determination of the Bessel light beam cone parameter by Fourier analysis of the diametral distribution of the intensity. *Journal of the Belarusian State University. Physics.* 2022;1:20–34. Russian.  
<https://doi.org/10.33581/2520-2243-2022-1-20-34>

### Авторы:

**Анатолий Анатольевич Рыжевич** – кандидат физико-математических наук; ведущий научный сотрудник центра «Диагностические системы»<sup>1)</sup>, доцент кафедры квантовой радиофизики и оптоэлектроники факультета радиофизики и компьютерных технологий<sup>2)</sup>.

**Игорь Валерьевич Балыкин** – младший научный сотрудник центра «Диагностические системы».

### Authors:

**Anatol A. Ryzhevich**, PhD (physics and mathematics); leading researcher at the center «Diagnostic systems»<sup>a</sup> and associate professor at the department of quantum radiophysics and optoelectronics, faculty of radiophysics and computer technologies<sup>b</sup>.

[tol@dragon.bas-net.by](mailto:tol@dragon.bas-net.by)

<https://orcid.org/0000-0002-5463-0054>

**Igor V. Balykin**, junior researcher at the center «Diagnostic systems».

[b97@dragon.bas-net.by](mailto:b97@dragon.bas-net.by)

<https://orcid.org/0000-0002-6763-1136>

## DETERMINATION OF THE BESSEL LIGHT BEAM CONE PARAMETER BY FOURIER ANALYSIS OF THE DIAMETRAL DISTRIBUTION OF THE INTENSITY

A. A. RYZHEVICH<sup>a, b</sup>, I. V. BALKIN<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Institute of Physics, National Academy of Sciences of Belarus,  
68-2 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220072, Belarus*

<sup>b</sup>*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

*Corresponding author: I. V. Balykin (b97@dragon.bas-net.by)*

Power spectral density (PSD) of the intensity distribution of an ideal Bessel light beam (BLB) expressions are obtained. It is shown that the PSD of the intensity distribution of an ideal BLB is limited and the upper boundary of the PSD is equal to the doubled cone parameter (the product of the wave number and the sine of the half angle of the cone of wave vectors), and the number of zeros in the PSD of an ideal BLB located in the interval from zero frequency to the upper boundary of the spectrum, is equal to the order of the beam. A technique is proposed for estimating the cone parameter of BLBs by analysing the PSD estimates of diametral distributions – one-dimensional intensity distributions obtained in the transverse plane of the beam along a line passing through the beam axis from transverse two-dimensional BLB intensity distributions recorded in the form of digital computer images. The influence of clipping (the end of the distribution at the boundary of the sensitive sensor), Gaussian and cosine modulations of the diametral distribution on the shape of the spectrum and, in case of clipping, the error in the cone parameter estimation using the proposed method is investigated. The technique is tested on the example of the analysis of experimental BLBs of different orders (BLB<sub>*m*</sub>, *m* = 0, 1, 2). The proposed technique can be used to assess the quality parameters of the BLB. The results of the analysis of the influence of cosine modulation on the shape of the PSD can be used to assess the magnitude of the rounding of the apex of the axicon forming the BLB for control the quality of the axicon manufacturing.

**Keywords:** Bessel light beam; cone angle; cone parameter; power spectral density.

**Acknowledgements.** The work was performed within the framework of task 1.1.01 «Development of the physical foundations of the propagation and transformation of quasi-diffraction-free vortex light beams of a new type in anisotropic, inhomogeneous and scattering media and the creation on this basis of innovative diagnostic optoelectronic devices» (state reg. No. 20160091) of state program of scientific research «Photonics, opto- and microelectronics» for 2016–2020 and task 1.1 «Development of methods and devices for diagnostics of materials, processes and products in the optical and terahertz ranges and their application for optical communication, microscopy and determination of the characteristics of various objects» (state reg. No. 20210300 dated 23.03.2021) of state program of scientific research «Photonics and electronics for innovations» for 2021–2025.

### Введение

Как известно, бesselовы световые пучки (БСП) представляют собой аксиально-симметричные световые поля, описываемые функциями Бесселя [1]. Наиболее простым примером этого класса пучков является скалярный БСП с поперечной компонентой поля

$$U_m(\rho, \varphi, z) = AJ_m(k \sin(\gamma)\rho) \exp(i(k_z z + m\varphi)),$$

где  $\rho$ ,  $\varphi$  и  $z$  – радиальная, азимутальная и осевая координаты соответственно;  $A$  – скалярная амплитуда;  $J_m$  – функция Бесселя 1-го рода  $m$ -го порядка;  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  ( $\lambda$  – длина волны светового излучения);  $\gamma$  – угол конусности БСП;  $k_z = k \cos \gamma$ . Далее в работе предполагается использование монохроматического лазерного источника излучения для формирования БСП.

На практике измеряемой величиной обычно выступает интенсивность светового пучка, пропорциональная квадрату амплитуды напряженности поля. Таким образом, вид поперечного распределения интенсивности БСП  $m$ -го порядка описывается функцией

$$I(\rho) = A^2 J_m^2(k \sin(\gamma)\rho).$$

Переходя к относительным единицам (нормируя максимум интенсивности на единицу и вводя обозначение для параметра конусности БСП  $q_0 = k \sin(\gamma) \approx k\gamma$  при  $\gamma < 10^\circ$ , что часто встречается на практике), получаем

$$I(x) = J_m^2(q_0 x), \quad (1)$$

где  $x$  – диаметральная координата, обозначающая положение вдоль линии, проходящей через ось пучка в поперечной плоскости пучка (при этом  $x = 0$  соответствует положению на оси пучка).

Формула (1) задает идеальный вид диаметрального распределения интенсивности БСП, в то время как ПЗС-матрицей, линейкой либо другим прибором может быть зарегистрировано внешне подобное, но неидеальное экспериментальное распределение интенсивности БСП. Оценка параметра конусности БСП  $q_0$  бывает необходима в качестве начального приближения при аппроксимации экспериментальных поперечных распределений точными математическими выражениями, а также для определения угла конусности БСП на основе зарегистрированного экспериментального распределения интенсивности в поперечном сечении БСП. В таком случае угол конусности БСП определяется как  $\gamma = \frac{q_0}{k}$ . Параметр  $q_0$  при анализе поперечных распределений интенсивности имеет размерность, обратную используемой размерности поперечной координаты. Для корректного выражения угла конусности параметр  $q_0$  следует рассчитывать в физических единицах длины, зная длину волны излучения  $\lambda$  используемого источника, точные размеры пикселей и коэффициент увеличения прибора, с помощью которого регистрируются экспериментальные распределения интенсивности. Для лаконичности повествования и упрощения формы математических выражений далее рассматривается только параметр  $q_0$ .

### Материалы и методы исследования

В работе изучены идеальные (теоретические) диаметральные распределения интенсивности БСП различных порядков в чистом виде и при наличии косинусной модуляции с использованием непрерывного преобразования Фурье и других методов математического анализа. Экспериментальные (в виде цифровых сигналов) диаметральные распределения интенсивности БСП, полученные авторами ранее, исследованы с применением дискретного преобразования Фурье. Влияние обрезки, а также косинусной и гауссовой модуляций на форму спектра рассмотрено с помощью средств численного моделирования. Качество предложенных алгоритмов оценки параметра конусности также исследовано в численном эксперименте.

### Результаты и их обсуждение

Для рассмотрения спектра диаметрального распределения интенсивности БСП было использовано общее выражение для преобразования Фурье произвольной функции:

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{j\omega t} dt,$$

где  $\mathcal{F}\{ \}$  обозначает оператор преобразования Фурье;  $t$  есть временная или пространственная координата;  $j$  – комплексная единица;  $\omega$  – циклическая частота.

В качестве исследуемой функции выступает (1). Рассмотрим преобразование Фурье квадрата функции Бесселя  $J_m^2(q_0 t)$  целого порядка ( $m \in \mathbb{Z}$ ), переходя от координатного пространства  $x$  в пространство поперечных волновых чисел  $q$ :

$$F(q) = \mathcal{F}\{J_m^2(q_0 x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} J_m^2(q_0 x) e^{jqx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} J_m^2(q_0 x) (\cos qx + j \sin qx) dx =$$

$$= \left[ \begin{array}{l} m \in \mathbb{Z} \rightarrow J_m(-x) = (-1)^m J_m(x), \\ J_m^2(-q_0 x) \sin(-qx) = (-1)^{2m} J_m^2(q_0 x) (-\sin qx) = -J_m^2(q_0 x) \sin qx \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} J_m^2(q_0 x) \sin qx dx = 0, \\ J_m^2(-q_0 x) \cos(-qx) = (-1)^{2m} J_m^2(q_0 x) \cos qx = J_m^2(q_0 x) \cos qx \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} J_m^2(q_0 x) \cos qx dx = 2 \int_0^{+\infty} J_m^2(q_0 x) \cos qx dx \end{array} \right] =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} J_m^2(q_0 x) \cos qx dx = \left[ m \in \mathbb{Z} \rightarrow J_{-m}(q_0 x) = (-1)^m J_m(q_0 x) \right] = (-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} J_{-m}(q_0 x) J_m(q_0 x) \cos qx dx.$$

В [2, с. 200] приводится следующее тождество для интеграла, входящего в полученное выражение:

$$\int_0^{+\infty} \cos ax J_{-\nu}(cx) J_{\nu}(cx) dx = \delta \frac{1}{2c} P_{\nu-1/2} \left( \frac{a^2}{2c^2} - 1 \right),$$

где  $\delta = 1$  при  $0 < a < 2c$  и  $\delta = 0$  при  $0 < 2c < a$ ;  $P_{\nu-1/2}$  – функция Лежандра  $(\nu - 1/2)$ -го порядка [2].

В силу того, что  $\cos((-a)x) = \cos(ax)$ , весь интеграл должен быть четной функцией по  $a$ , таким образом,  $\delta$  можно заменить на функцию Хевисайда вида  $\theta((2c)^2 - a^2)$ .

Подставляя вместо  $\delta$  функцию Хевисайда и введенные ранее обозначения, получаем

$$F(q) = \mathcal{F}\{J_m^2(q_0x)\} = (-1)^m \frac{1}{q_0\sqrt{2\pi}} P_{m-1/2} \left( \frac{q^2}{2q_0^2} - 1 \right) \theta((2q_0)^2 - q^2). \quad (2)$$

В соответствии с [3, р. 3] функцию Лежандра можно представить в виде обобщенного гипергеометрического ряда следующим образом:

$$P_n(x) = {}_2F_1\left(-n, n+1; 1; \frac{1-x}{2}\right),$$

тогда в нашем случае

$$P_{m-1/2}\left(\frac{q^2}{2q_0^2} - 1\right) = {}_2F_1\left(\frac{1}{2} - m, \frac{1}{2} + m; 1; 1 - \frac{q^2}{4q_0^2}\right).$$

Таким образом, для выражения (2) также допустима следующая форма:

$$F(q) = \mathcal{F}\{J_m^2(q_0x)\} = (-1)^m \frac{1}{q_0\sqrt{2\pi}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2} - m, \frac{1}{2} + m; 1; 1 - \frac{q^2}{4q_0^2}\right) \theta((2q_0)^2 - q^2), \quad (3)$$

где  $q$  – волновое число;  ${}_2F_1(a, b; c; z)$  – гипергеометрический ряд с коэффициентами 2 и 1.

Квадрат модуля выражений (2) и (3) описывает спектральную плотность мощности (СПМ)  $P(q)$  диаметрального распределения идеального БСП и приводится в виде формул

$$P(q) = |F(q)|^2 = \left| \mathcal{F}\{J_m^2(q_0x)\} \right|^2 = \frac{1}{2\pi q_0^2} P_{m-1/2}^2 \left( \frac{q^2}{2q_0^2} - 1 \right) \theta((2q_0)^2 - q^2), \quad (4)$$

$$P(q) = \frac{1}{2\pi q_0^2} {}_2F_1^2\left(\frac{1}{2} - m, \frac{1}{2} + m; 1; 1 - \frac{q^2}{4q_0^2}\right) \theta((2q_0)^2 - q^2). \quad (5)$$

Важно отметить, что в формулу (4) входит функция Хевисайда вида  $\theta((2q_0)^2 - q^2)$ , которая равна единице, когда  $q \in (-2q_0, 2q_0)$ , и нулю в остальных случаях. Таким образом, величина  $2q_0$  является верхней границей интервала значений  $q$ , на котором СПМ (4) отлична от нуля, что можно видеть на спектрах идеальных диаметральных распределений интенсивности БСП различных порядков, приведенных далее (см. табл. 2). С другой стороны, имея спектр диаметрального распределения интенсивности БСП и определив в нем максимальное волновое число  $q_{\max}$ , для которого спектр отличен от нуля, можно легко получить параметр конусности пучка как  $q_0 = \frac{q_{\max}}{2}$ .

Из представленных ниже спектров диаметральных распределений (см. табл. 2) видно, что число нулей в СПМ на интервале от нулевой частоты до верхней границы спектра равно порядку пучка. Это можно объяснить следующим образом. Известно, что функции Лежандра  $P_\lambda(x)$  представляют собой случай присоединенных функций Лежандра  $P_\lambda^\mu(x)$  при  $\mu = 0$ . В [4, теорема V] показано, что функция Лежандра  $P_\lambda^\mu(x)$  для действительных  $\mu, \lambda$  на интервале  $x \in (-1, 1)$  имеет  $E(\lambda - |\mu| + 1) - E(-\lambda - |\mu|)$  корней, если  $\mu \leq 0$  или если  $\mu$  – положительное целое число, где  $E$  – операция округления к ближайшему меньшему целому числу для  $x > 1$  либо к нулю для  $x \leq 1$ . Таким образом, сомножитель  $P_{m-1/2}(x)$ , входящий в (4), для целого  $m \geq 0$  на отрезке  $x \in (-1, 1)$  будет иметь  $E\left(m + \frac{1}{2}\right) - E\left(-m + \frac{1}{2}\right) = E\left(m + \frac{1}{2}\right) = m$  нулей. С другой стороны, спектр, описываемый формулой (4), будет отличен от нуля только на интервале  $(-2q_0, 2q_0)$  за счет сомножителя в виде функции Хевисайда, при этом функция в аргументе  $x = \frac{q^2}{2q_0^2} - 1$

взаимно однозначно отображает интервал  $q \in (0, 2q_0)$  на интервал  $x \in (-1, 1)$ . Следовательно, спектр идеального диаметрального распределения интенсивности БСП<sub>*m*</sub> будет иметь *m* нулей на интервале от нулевой частоты до верхней границы спектра.

Полученные спектры представляют собой действительные функции. Это обусловлено четностью функций Бесселя. При анализе реальных сигналов (распределений интенсивности) выборки не обладают таким свойством, поэтому соответствующие им спектры (преобразования Фурье) будут содержать комплексную часть. Также следует отметить, что реальные сигналы являются дискретными, это не позволяет применить рассмотренное непрерывное преобразование Фурье, ввиду чего в расчетах необходимо использовать другую характеристику реальных сигналов в спектральной области – оценку СПМ. Периодограммную оценку СПМ для дискретного сигнала можно ввести следующим образом:

$$S(k) = \left| \frac{\Delta x}{N} \sum_{n=1}^{N-1} I(n) e^{-\frac{2\pi}{\Delta x} jkn} \right|^2,$$

где  $\Delta x$  – интервал дискретизации;  $N$  – объем выборки;  $I(n)$  – интенсивность в *n*-м пикселе.

Поскольку преобразование дискретное,  $S(k)$  – периодическая функция с периодом  $N$ , где  $N$  – объем исходной выборки. Интервал между отсчетами СПМ в таком случае составляет величину  $\Delta q = \frac{2\pi}{N}$  рад на пиксел (далее – рад/пк). Можно также отметить, что число отсчетов спектра *l*, лежащих в области  $q < 2q_0$ , будет зависеть от соотношения длины сигнала, т. е. физического размера матрицы светочувствительного элемента и параметра конусности  $q_0$ :

$$l = \frac{2q_0}{\Delta q} = \frac{2q_0 \Delta x N}{2\pi} = \frac{1}{\pi} q_0 d,$$

где *d* – физическая длина сенсора.

Произведение  $q_0 d$  пропорционально числу видимых на светочувствительном сенсоре колец. Таким образом, чем больше колец попадает на сенсор, тем больше число отсчетов спектра *l* и тем более детальным является спектр в области  $q < 2q_0$ . Такой вывод верен лишь в случае, если верхняя частота спектра не превышает половины частоты дискретизации для предотвращения эффекта алиасинга (или наложения) [5]. Иначе говоря, должно выполняться условие  $2q_0 < \frac{\pi}{\Delta x}$ . С учетом того что в сигнале могут присутствовать высокочастотные шумы, это условие можно усилить:  $2q_0 \ll \frac{\pi}{\Delta x}$ .

Существует способ повысить число отсчетов СПМ в области  $q < 2q_0$  для того, чтобы рассмотреть спектр более детально с помощью дополнения исходного распределения интенсивности нулями. Такая методика может быть полезна для более точного определения границы спектра. Тем не менее важно отметить, что при ее использовании в спектре возникают осцилляции, которые можно объяснить как результат интерполяции исходного спектра с помощью ядра вида  $\frac{\sin q}{q}$ , являющегося фурье-образом прямоугольного окна, имитирующего дополнение нулями. Экспериментально установлено, что дополнение выборки нулями до объема  $K \approx 10N$  позволяет получить удовлетворительные результаты при определении верхней границы СПМ.

В табл. 1 приводятся смоделированные диаметральные распределения БСП различных порядков и оценки СПМ для  $d = 10$  мм,  $\Delta x = 0,01$  мм, что соответствует сенсору с поперечным размером 10 мм и расстоянием между пикселями 10 мкм. Точками обозначены отсчеты СПМ, полученные на основе исходной выборки, линиями – СПМ для выборки, дополненной нулями до  $K = 10N$ , вертикальными прямыми – граница спектра идеального БСП.

По диаметральным распределениям интенсивности, приведенным в табл. 1, можно понять влияние параметра  $q_0$  на вид поперечного распределения интенсивности. Так, при увеличении  $q_0$  и фиксированном *d* число видимых максимумов интенсивности (или колец в случае двумерного распределения) увеличивается, а ширина максимумов (колец) уменьшается.

Ограниченность спектра квадрата функции Бесселя, вытекающая из наличия в выражении для спектра множителя в виде функции Хевисайда  $\theta((2q_0)^2 - q^2)$ , позволяет построить метод быстрого определения параметра  $q_0$  на основе оценок СПМ экспериментальных распределений интенсивности БСП. Идея метода состоит в следующем: по экспериментальному диаметральному распределению интенсивности



БСП строится оценка СПМ с применением дискретного преобразования Фурье, затем СПМ нормируется на максимальное значение и производится оценка верхней частоты спектра  $q_{\max}$  с использованием порогового критерия  $q_{\max} = \max \left\{ q_i : P(q_i) > \theta \max_{q_i} P(q) \right\}$ , т. е. это максимальное значение частоты отсчета СПМ  $q_i$ , для которого значение СПМ в данном отсчете  $P(q_i)$  больше максимального значения СПМ  $\max P(q)$ , умноженного на порог  $\theta < 1$ .

Помимо применения порогового критерия непосредственно к СПМ, можно использовать критерий на основе анализа производной СПМ по волновому числу (частоте), согласно которому граница спектра определяется как место перехода графика на близкое к нулю горизонтальное плато. Для получения координаты этого места следует проанализировать производную сглаженной СПМ: волновое число, для которого производная стабильно станет равной нулю, можно считать началом плато, обозначив его как  $q_{\max}$ . Таким образом, алгоритм определения  $q_{\max}$  имеет следующий вид:

- 1) получение оценки СПМ на основе дискретного преобразования Фурье диаметального распределения интенсивности;
- 2) сглаживание оценки СПМ с помощью фильтра (например, фильтра Савицкого – Голея или фильтра Гаусса);
- 3) применение разностного оператора для получения оценки производной СПМ, в простейшем случае

$$\frac{dP}{dq}(q_i) = \frac{P(q_{i+1}) - P(q_i)}{q_{i+1} - q_i};$$

- 4) поиск значения  $q_{\max}$ , для которого все дальнейшие значения производной  $\frac{dP}{dq}$  будут меньше заданного малого числа  $\kappa$ .

На основании найденного значения  $q_{\max}$  легко получить оценку параметра  $q_0$ , исходя из уравнения

$$\begin{aligned} (2\hat{q}_0)^2 - q_{\max}^2 &= 0, \\ \hat{q}_0 &= \frac{q_{\max}}{2}, \end{aligned} \tag{6}$$

где  $\hat{q}_0$  – оценка параметра  $q_0$ .

Применение описанного метода позволяет достаточно быстро получить оценку параметра  $q_0$ , поскольку наиболее трудоемкая процедура – вычисление оценки СПМ – может быть реализована с использованием алгоритмов быстрого преобразования Фурье, обладающих высокой вычислительной эффективностью. Тем не менее смещение, мощность и состоятельность такой оценки требуют уточнения для неидеальных пучков.

Полученное выражение (4) для СПМ диаметального распределения интенсивности справедливо лишь для идеального БСП, поскольку пределы интегрирования бесконечны, а само диаметальное распределение интенсивности описывается квадратом функции Бесселя, которая не является квадратично интегрируемой в бесконечных пределах, что приводит к стремлению СПМ к бесконечности при  $q \rightarrow 0$ .

Очевидно, что регистрируемое чувствительным сенсором распределение интенсивности будет иметь конечную длину и в соответствии с теорией преобразования Фурье бесконечный спектр.

Примечательно, что у пучков высших порядков на границе спектра наблюдается максимум, который также возможно использовать для оценки параметра конусности  $q_0$ . Такая оценка может оказаться более точной, однако она имеет два потенциальных недостатка. Во-первых, подобная оценка неуместна для БСП<sub>0</sub>, поскольку в нем максимум на границе отсутствует. Во-вторых, поиск максимума требует более сложной статистической процедуры, чем просто отсечение границы спектра по заданному уровню, что может сказаться на скорости получения оценки при анализе световых пучков в режиме реального времени.

Примеры экспериментальных поперечных и диаметальных распределений интенсивности БСП различных порядков, экспериментальные оценки СПМ приведенных диаметальных распределений, полученные на основе дискретного преобразования Фурье, а также теоретические СПМ, задаваемые выражениями (4) и (5), представлены в табл. 2. Для того чтобы пронормировать волновое число  $q$  в столбце с экспериментальными СПМ, экспериментальное диаметальное распределение интенсивности было аппроксимировано функцией вида  $I(r) = aJ_0^2((x-c)b) + d$  (график аппроксимации приведен в табл. 2 вместе с экспериментальными диаметральными распределениями). В результате получена оценка параметра  $b$ , имеющего смысл  $q_0$ . На значение  $b$  нормирована частотная шкала экспериментального СПМ.

Диаметральные распределения интенсивности и оценки СПМ идеальных БСП<sub>м</sub> для различных значений параметра  $q_0 d$

Table 1

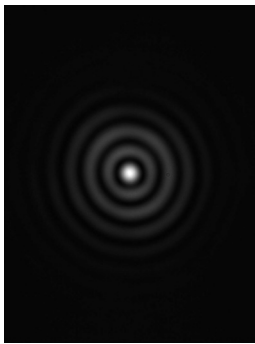
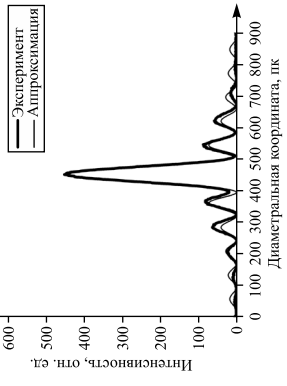
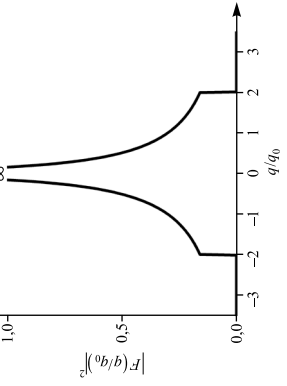
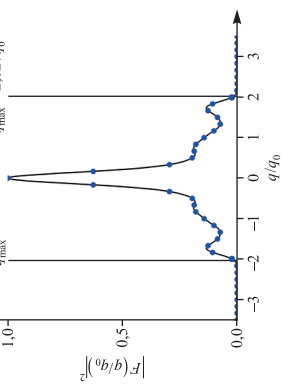
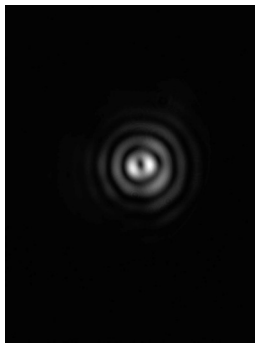
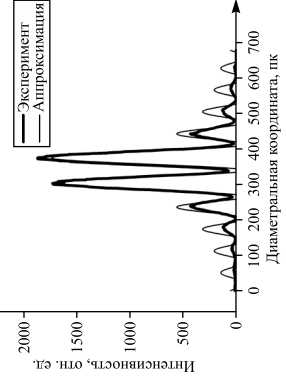
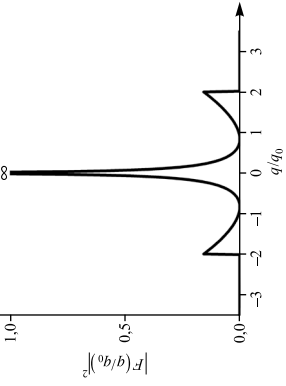
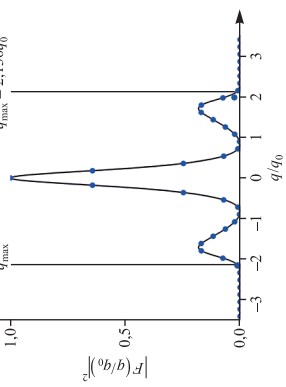
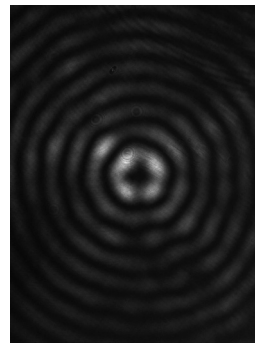
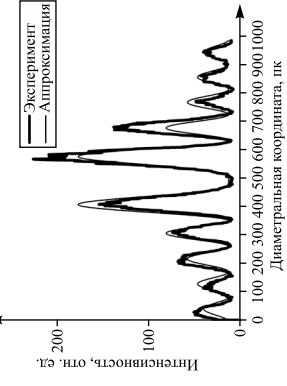
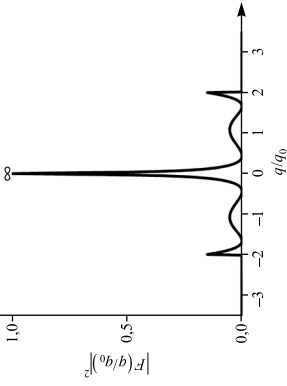
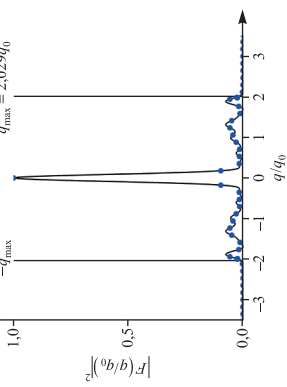
Diametral intensity distributions and power spectral density estimates for ideal BLB<sub>м</sub> with different values of  $q_0 d$  parameter

$q_0 d$	БСП <sub>0</sub>	БСП <sub>1</sub>	БСП <sub>2</sub>
10			
50			
100			

Примеры экспериментальных двумерных поперечных и диаметральных распределений интенсивности БСП различных порядков и спектров идеальных и экспериментальных диаметральных распределений

Table 2

Examples of experimental two-dimensional transversal and diametral intensity distributions of BLBs of different orders and ideal and experimental spectrums of diametral intensity distributions

$m$	Двумерное поперечное распределение интенсивности	Диаметральное распределение интенсивности	СПМ идеального распределения интенсивности	Оценка СПМ экспериментального диаметрального распределения интенсивности
0				
1				
2				



Оценки  $q_{\max}$ , полученные на основе порогового критерия с  $\theta = 0,01$ , обозначены вертикальными линиями на графиках СПМ экспериментального диаметрального распределения в табл. 2. Видно, что они лежат в окрестности значений по оси абсцисс  $\frac{q}{q_0} = 2$ . Это соответствует выражению (6), указывающему, что граница спектра задается как  $q_{\max} = 2q_0$ . По графикам в табл. 2 также видно, что экспериментальные СПМ по структуре похожи на теоретические, но обладают осцилляциями, предполагаемой причиной возникновения которых являются отклонение формы экспериментального диаметрального распределения от формы идеального и его ограниченность в пространстве.

### Анализ влияния гауссовой модуляции пучка на форму СПМ

Для рассмотрения влияния гауссовой модуляции поперечного распределения интенсивности пучка, обусловленной ограниченностью его мощности, были построены оценки СПМ для случаев модуляции диаметрального распределения интенсивности функцией Гаусса, или так называемого бessel-гауссова пучка [6].

В табл. 3 приведены примеры выборок, взвешенных функцией Гаусса  $I = \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right]$  с различными значениями среднеквадратичного отклонения  $\sigma$ , а также соответствующие им оценки СПМ. Искажения подобного рода часто встречаются на практике.

Видно, что модуляция диаметрального распределения интенсивности гауссовым окном при разумной длине окна не оказывает существенного влияния на ограниченность спектра, а следовательно, не создает препятствий для применения предложенной методики, это свидетельствует об уместности ее использования для бessel-гауссовых пучков. Форма спектра при уменьшении параметра  $\sigma$  сглаживается, но число локальных минимумов при  $\sigma > 0,5$  мм сохраняется, что позволяет оценить порядок пучка по СПМ.

### Анализ влияния косинусной модуляции пучка на форму СПМ

В [7; 8] было показано, что при формировании БСП неидеальным аксиконом, имеющим скругленную верхушку, в формируемом БСП присутствует периодическая модуляция как осевого, так и поперечного распределения интенсивности. Таким образом, интерес представляет вопрос влияния обозначенной модуляции на форму спектра диаметрального распределения интенсивности в БСП.

Предположим, что на распределение поля в идеальном БСП наложена косинусная модуляция, определяемая выражением

$$g(x) = B \cos(q_M x),$$

где  $B$  – амплитуда модуляции;  $q_M$  – пространственная частота модуляции.

Поле идеального БСП вдоль заданной диаметральной линии обозначим как  $U(x)$ . Тогда модулированное поле

$$U_M(x) = g(x)U(x).$$

Для интенсивности получаем выражение

$$I_M(x) = g^2(x)U^2(x) = g^2(x)I(x).$$

Преобразование Фурье имеет вид

$$F_M(q) = \mathcal{F}\{g^2(x)I(x)\} = [\text{теорема свертки}] = \mathcal{F}\{g^2(x)\} * \mathcal{F}\{I(x)\} = \mathcal{F}\{g^2(x)\} * F(q),$$

где знак  $*$  обозначает свертку.

Таким образом, спектр Фурье для модулированного распределения интенсивности будет равен свертке спектра распределения интенсивности без модуляции и спектра самой модуляции.

Выражение для спектра без модуляции получено выше. Рассмотрим спектр самой модуляции.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{g^2(x)\} &= \mathcal{F}\{B^2 \cos^2(q_M x)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2} B^2 (1 + \cos(2q_M x))\right\} = \\ &= \frac{B^2}{2} (\mathcal{F}\{1\} + \mathcal{F}\{\cos(2q_M x)\}) = \frac{B^2}{2} \left( \delta(q) + \frac{1}{2} [\delta(q - 2q_M) + \delta(q + 2q_M)] \right), \end{aligned}$$

где  $\delta(q)$  обозначает дельта-функцию. Используя известное тождество

$$\delta(x - x_0) * f(x) = f(x - x_0),$$

получаем спектр модулированного поперечного распределения интенсивности

$$\begin{aligned} F_M(q) &= \frac{B^2}{2} \left( \delta(q) + \frac{1}{2} [\delta(q - 2q_M) + \delta(q + 2q_M)] \right) * F(q) = \\ &= \frac{B^2}{2} \left( F(q) + \frac{1}{2} [F(q - 2q_M) + F(q + 2q_M)] \right). \end{aligned}$$

Как видно, спектр модулированного диаметального распределения интенсивности с точностью до множителя будет представлять собой сумму исходного спектра  $F(q)$  с полусуммой исходного спектра, сдвинутого вправо и влево на  $2q_M$ .

Поскольку при  $q = 0$  исходный спектр  $F(q)$  имеет максимум, спектр модулированного распределения интенсивности  $F_M(q)$  будет иметь пик при  $q = 0$ , а также пики при  $q = \pm 2q_M$ , соответствующие сдвинутым компонентам, но меньшей амплитуды, поскольку сдвинутые части спектров входят в  $F_M(q)$  с множителем  $\frac{1}{2}$ . Следует отметить, что и верхняя граница спектра при этом должна увеличиться на  $2q_M$ .

Можно выделить несколько характерных ситуаций в зависимости от соотношения  $q_M$  и  $q_0$ , приведенных в табл. 4. При разумных значениях частоты модуляции, когда  $q_M \ll q_0$ , сдвиг верхней частоты спектра, учитывая множитель  $\frac{1}{2}$ , можно нивелировать за счет правильно подобранного значения порога, по которому определяется  $q_{\max}$ . При  $q_M \approx q_0$  ситуация ухудшается, поскольку существенным становится влияние дополнительного максимума на частоте  $2q_M$ , а также следующего за ним опадающего «хвоста» спектра, в таком случае точное определение верхней границы спектра, соответствующей немодулированному пучку, является затруднительным. Кроме того, будут возникать дополнительные осцилляции в спектре в окрестности  $q = 0$  за счет обрыва сдвинутых спектров в точках  $\pm(q_M - q_0)$ . Случай  $q_M \gg q_0$  соответствует ситуации, когда распределение интенсивности описывается быстро осциллирующим косинусом, модулированным медленно меняющейся функцией Бесселя, и не представляет интереса.

Поскольку модуляция диаметального распределения интенсивности связана с округлостью верхушки аксикона, анализ структуры спектра диаметального распределения интенсивности потенциально может использоваться для оценки степени округлости верхушки аксикона.

### Определение качества оценки параметра конусности БСП и быстродействия алгоритма ее вычисления

Для исследования качества введенной оценки рассмотрена зависимость времени выполнения и относительной ошибки  $\epsilon$  оценки параметра  $q_0$  от параметра  $q_0 d$ , характеризующего видимое число колец, для алгоритмов с рабочими названиями «спектр», «комбинированный», «аппроксимация».

1. Алгоритм «спектр» – определение параметра  $q_0$  по спектру (с порогом 0,1 и 10-кратным дополнением выборки нулями).
2. Алгоритм «комбинированный» – выполнение алгоритма «спектр», использование его результатов в качестве начального приближения в аппроксимации методом наименьших квадратов (МНК).
3. Алгоритм «аппроксимация» – МНК в чистом виде (начальное приближение для центра распределения определяется методом моментов, для высоты распределения – по максимальному значению интенсивности, начальное приближение параметра  $q_0$  фиксировано, предполагается, что оно может быть известно на основе иных эвристик).

В качестве исходных данных для тестирования алгоритмов использовались идеальные сгенерированные численно распределения интенсивности в БСП<sub>0</sub>, имитирующие измерение сенсором с длиной  $d = 10$  мм и расстоянием между пикселями  $\Delta x = 0,01$  мм. Таким образом, объем выборки составлял  $\frac{d}{\Delta x} = 1000$  пк. Параметр конусности  $q_0$  варьировался в пределах от 1 до 30 рад/мм с шагом 0,1 рад/мм. Выборки формировались симметричным образом так, чтобы центр распределения совпадал с нулем аргумента функции Бесселя.

**Взвешенные функции Гаусса (бессель-гауссовы)  
диаметральные распределения интенсивности и соответствующие им оценки СПМ**

Table 3

**Weighted with Gauss function (Bessel-Gauss)  
diametral intensity distributions and corresponding PSD estimates**

$\sigma, \text{ мм}$	БСП <sub>0</sub>		БСП <sub>1</sub>		БСП <sub>2</sub>	
0,1						
0,5						
2,0						

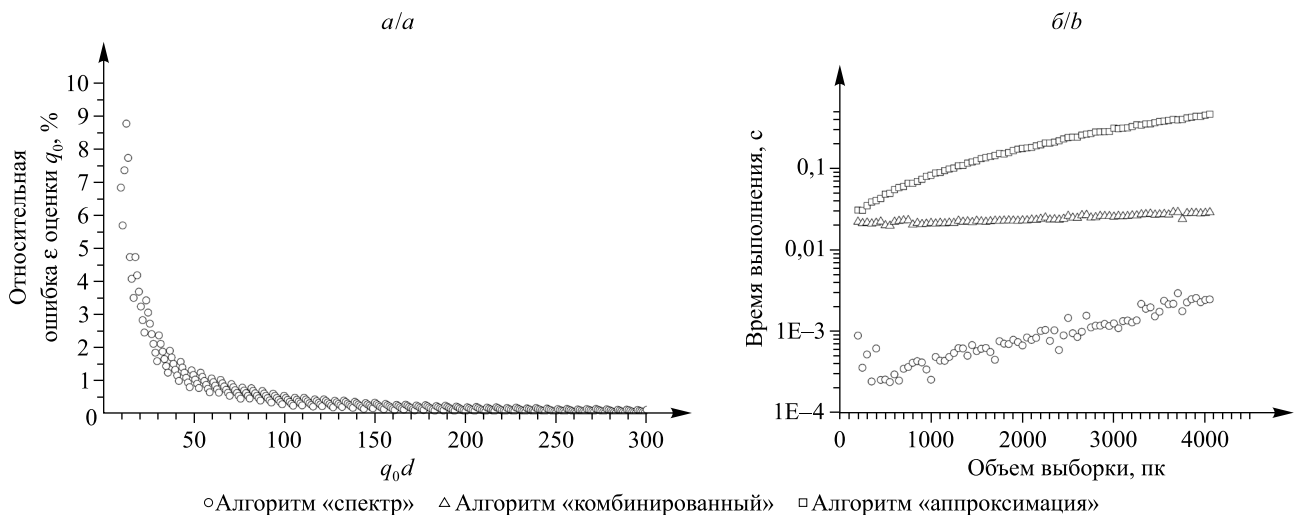
Спектры идеальных модулированных диаметральных распределений БСП<sub>0</sub> при различных значениях периода косинусной модуляции

Table 4

Spectrums of ideal modulated diametral distributions of BLB<sub>0</sub> for different values of period of cosine modulation

$q_M$	$q_M \ll q_0$	$q_M < q_0$	$q_M < q_0$	$q_M < q_0$	$q_M = q_0$	$q_M > q_0$
Диаметральное распределение						
СПМ						

На рисунке *a* приведена зависимость относительной ошибки  $\varepsilon$  оценки параметра  $q_0$  от величины  $q_0d$ , характеризующей число видимых на диаметральном распределении интенсивности колец, для алгоритма «спектр». Как видно, ошибка оценки при малом числе колец может превышать 5 %, однако с увеличением числа видимых колец стремится к нулю, достигая величин  $<1,5$  % при  $q_0d > 50$  (вид диаметального распределения при  $q_0d = 50$  показан в табл. 1). Разброс относительной ошибки обусловлен дискретностью оценки СПМ, поскольку  $q_{\max}$  определяется конкретным отсчетом СПМ, поэтому при непрерывном изменении априорного  $q_0$  оценка  $\hat{q}_0$  будет пробегать набор дискретных значений с шагом  $\Delta q = \frac{2\pi}{N}$ , при этом близким значениям  $q_0$  могут соответствовать строго одинаковые значения оценки  $\hat{q}_0$ , а это приводит к тому, что график абсолютной ошибки имеет пилообразный вид, поскольку разность  $q_0 - \hat{q}_0$  будет линейно зависеть от  $q_0$ , пока  $\hat{q}_0 = \text{const}$ , а затем скачкообразно изменится, когда увеличение  $q_0$  вызовет переход к новому отсчету  $\hat{q}_0$  с увеличением  $\hat{q}_0$  на  $\Delta q$ . Этот пилообразный график имеет очень малый период, равный  $\Delta q$ , поэтому на графике относительной ошибки он представляется равномерным нагромождением точек. Этого можно избежать, уменьшив  $\Delta q$  через увеличение  $N$  путем дополнения выборки нулями. При этом следует учитывать, что увеличение  $N$  приводит к увеличению времени выполнения алгоритма и не всегда уместно на практике.



Зависимости, характеризующие качество предложенных алгоритмов:  
*a* – зависимость величины относительной ошибки  $\varepsilon$  оценки параметра  $q_0$  от произведения  $q_0d$  при анализе идеального диаметального распределения алгоритмом «спектр» ( $d = 10$  мм,  $\Delta x = 0,01$  мм);  
*b* – зависимость времени выполнения алгоритмов оценки параметра  $q_0$  от объема выборки в логарифмическом масштабе

Dependencies, characterising quality of proposed algorithms:  
*a* – dependency of relative error  $\varepsilon$  of  $q_0$  parameter estimate on  $q_0d$  product in case of analysis of ideal diametral distribution with «spectrum» algorithm ( $d = 10$  mm,  $\Delta x = 0.01$  mm);  
*b* – dependency of execution time of algorithms of  $q_0$  parameter estimation on volume of sample in logarithmic scale

Для алгоритмов «комбинированный» и «аппроксимация» относительная ошибка была близка к нулю ( $<10^{-7}$  %) при любом значении  $q_0d$ , что соответствует ожиданиям, поскольку исходные распределения интенсивности сгенерированы искусственно и точно соответствуют аппроксимирующей функции.

Для практического применения алгоритма большое значение имеет время его выполнения. Очевидно, что в нашем случае время выполнения будет зависеть от объема выборки диаметального распределения интенсивности (и начального приближения в случае алгоритма «аппроксимация»). Зависимость времени выполнения от объема выборки приведена на рисунке *b*. Параметры распределения:  $q_0 = 0,1$  рад/пк,  $\Delta x = 1$  пак,  $d$  варьировалось в пределах от 201 до 4095 пак с шагом 50 пак. Начальное приближение для параметра  $q_0$  в алгоритме «аппроксимация» было установлено равным 0,15 рад/пк. Вычисления производились на ПЭВМ с четырехъядерным процессором Intel® Core™ i5-4460 с тактовой частотой 3,2 ГГц и оперативной памятью 16 Гб под управлением 64-разрядной операционной системы Windows 7 в среде MATLAB R2016a.

Как видно из рисунка *b*, даже небольшое отклонение начального приближения от истинного значения параметра приводит к близкой к линейной зависимости времени выполнения от объема выборки



в алгоритме «аппроксимация». Время выполнения алгоритмов «спектр» и «комбинированный» мало зависит от объема выборки при  $N < 4000$  пк. Наиболее быстрым является алгоритм «спектр», требующий для выполнения как минимум в 10 раз меньше времени, чем алгоритмы «аппроксимация» и «комбинированный».

Из рисунка *a* следует, что алгоритм «спектр» при малом  $q_0 d$  не позволяет достаточно качественно оценить параметр  $q_0$ . Таким образом, компромиссным вариантом, обеспечивающим как высокую скорость получения, так и удовлетворительное качество оценки, является алгоритм «комбинированный».

### Заключение

Рассмотрены диаметральные распределения интенсивности идеального БСП. Показано, что спектр Фурье идеального распределения интенсивности ограничен сверху и его граница равна удвоенному параметру конусности  $q_0 = k \sin(\gamma)$ , а число нулей в спектре на интервале  $(0, 2q_0)$  равно порядку пучка. Продемонстрировано, что на основе анализа оценки СПМ, полученной с использованием дискретного преобразования Фурье экспериментального распределения интенсивности, можно оценить параметр конусности БСП. Также показано, что такая оценка устойчива к модуляции пучка прямоугольным и гауссовым окном, а обеспечивающие ее вычислительные процедуры позволяют достичь реального масштаба времени (не более  $10^{-3}$  с на кадр при распределении длиной до 2000 пк) при анализе световых пучков, например, при оценке их качества [9; 10]. Рассмотрено влияние косинусной модуляции на СПМ диаметального распределения интенсивности, отмечено, что граница спектра при косинусной модуляции повышается на величину, равную удвоенной частоте модуляции амплитуды  $2q_M$ . Учитывая, что косинусная модуляция может быть обусловлена скруглением верхушки аксикона, формирующего БСП, анализ СПМ диаметального распределения интенсивности БСП может использоваться для оценки качества изготовления аксиконов. Предложен алгоритм оценки параметров диаметальных распределений интенсивности БСП, применяющий описанный метод. Показано, что использование оценки параметра  $q_0$ , полученного из СПМ, в качестве начального приближения позволяет ускорить процедуру аппроксимации диаметального распределения интенсивности без потери точности.

### Библиографические ссылки

1. Durmin J. Exact solution for nondiffracting beams. I. The scalar theory. *Journal of the Optical Society of America A*. 1987;4(4): 651–654. DOI: 10.1364/JOSAA.4.000651.
2. Прудников АП, Брычков ЮА, Маричев ОИ. *Интегралы и ряды. Том 2. Специальные функции*. 2-е издание. Москва: Физматлит; 2003. 664 с.
3. Koepf W. *Hypergeometric summation. An algorithmic approach to summation and special function identities*. Vieweg: Wiesbaden; 1998. 230 p. (Universitext). Co-published by the Teubner Verlag. DOI: 10.1007/978-1-4471-6464-7.
4. Gormley PG. The zeros of Legendre functions. *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences*. 1937;44:29–43.
5. Лайонс Р. *Цифровая обработка сигналов*. 2-е издание. Бритова АА, редактор. Москва: Бином-Пресс; 2006. 656 с.
6. Gori F, Guattari G, Padovani C. Bessel-Gauss beams. *Optics Communications*. 1987;64(6):491–494. DOI: 10.1016/0030-4018(87)90276-8.
7. Akturk S, Zhou B, Pasquiou B, Franco M, Mysyrowicz A. Intensity distribution around the focal regions of real axicons. *Optics Communications*. 2008;281(17):4240–4244. DOI: 10.1016/j.optcom.2008.05.027.
8. Brzobohatý O, Cizmár T, Zemánek P. High quality quasi-Bessel beam generated by round-tip axicon. *Optics Express*. 2008; 16(17):12688–12700. DOI: 10.1364/OE.16.012688.
9. Рыжевич АА, Балыкин ИВ, Железнякова ТА. Параметры качества бесселевых световых пучков нулевого порядка. *Журнал прикладной спектроскопии*. 2018;85(1):144–153.
10. Рыжевич АА, Балыкин ИВ. Программное средство для определения параметров качества бесселевых световых пучков нулевого порядка. В: Килин СЯ, Курочкин ЮА, Анищик ВМ, Ануфрик СС, Апанасевич ПА, Гапоненко СВ и др., редакторы. *VI Конгресс физиков Беларуси, посвященный Году науки в Республике Беларусь. Сборник научных трудов; 20–23 ноября 2017 г.; Минск, Беларусь*. Минск: Институт физики имени Б. И. Степанова НАН Беларуси; 2017. с. 371–372.

### References

1. Durmin J. Exact solution for nondiffracting beams. I. The scalar theory. *Journal of the Optical Society of America A*. 1987;4(4): 651–654. DOI: 10.1364/JOSAA.4.000651.
2. Prudnikov AP, Brychkov YuA, Marichev OI. *Integraly i ryady. Tom 2. Spetsial'nye funktsii* [Integrals and series. Volume 2. Special functions]. 2<sup>nd</sup> edition. Moscow: Fizmatlit; 2003. 664 p. Russian.
3. Koepf W. *Hypergeometric summation. An algorithmic approach to summation and special function identities*. Vieweg: Wiesbaden; 1998. 230 p. (Universitext). Co-published by the Teubner Verlag. DOI: 10.1007/978-1-4471-6464-7.
4. Gormley PG. The zeros of Legendre functions. *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences*. 1937;44:29–43.

5. Lyons RG. *Understanding digital signal processing*. 2<sup>nd</sup> edition. Upper Saddle River: Prentice Hall; 2004. 689 p. Russian edition: Lyons R. *Tsifrovaya obrabotka signalov*. 2<sup>nd</sup> edition. Britova AA, editor. Moscow: Binom-Press; 2006. 656 p.
6. Gori F, Guattari G, Padovani C. Bessel-Gauss beams. *Optics Communications*. 1987;64(6):491–494. DOI: 10.1016/0030-4018(87)90276-8.
7. Akturk S, Zhou B, Pasquiou B, Franco M, Mysyrowicz A. Intensity distribution around the focal regions of real axicons. *Optics Communications*. 2008;281(17):4240–4244. DOI: 10.1016/j.optcom.2008.05.027.
8. Brzobohatý O, Cižmár T, Zemánek P. High quality quasi-Bessel beam generated by round-tip axicon. *Optics Express*. 2008;16(17):12688–12700. DOI: 10.1364/OE.16.012688.
9. Ryzhevich AA, Balykin IV, Zheleznyakova TA. Quality parameters of zero order Bessel light beams. *Journal of Applied Spectroscopy*. 2018;85(1):144–153. Russian.
10. Ryzhevich AA, Balykin IV. [A software tool for determining the quality parameters of zero-order Bessel light beams]. In: Kulin SYa, Kurochkin YuA, Anishchik VM, Anufrik SS, Apanasevich PA, Gaponenko SV, et al., editors. *VI Kongress fizikov Belarusi, posvyashchennyi Godu nauki v Respublike Belarus' . Sbornik nauchnykh trudov; 20–23 noyabrya 2017 g.; Minsk, Belarus' [VI Congress of physicists of Belarus, dedicated to the Year of science in the Republic of Belarus. Collection of scientific papers; 2017 November 20–23; Minsk, Belarus]*. Minsk: B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus; 2017. p. 371–372. Russian.

Получена 14.09.2021 / исправлена 01.11.2021 / принята 14.11.2021.  
Received 14.09.2021 / revised 01.11.2021 / accepted 14.11.2021.