

УДК 530.145.1,535.14

## АНАЛИТИЧЕСКАЯ ДИАГОНАЛИЗАЦИЯ ГАМИЛЬТониАНА КВАНТОВОЙ МОДЕЛИ РАБИ В КУЛОНОВСКОЙ КАЛИБРОВКЕ

А. В. ЛЕОНОВ<sup>1)</sup>, И. Д. ФЕРАНЧУК<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Рассматривается вопрос о приближенной аналитической диагонализации оператора Гамильтона квантовой модели Раби, полученного в кулоновской калибровке при учете калибровочной инвариантности модели. Показано, что гамильтониан модели с высокой точностью диагонализуются с помощью унитарного оператора калибровочного преобразования при использовании простого базисного набора векторов состояния. Существенно, что полученная аппроксимация не зависит от вариационных параметров и применима во всем диапазоне изменения параметров гамильтониана и квантовых чисел системы. Построены нулевое и равномерно пригодное приближения операторного метода для собственных состояний системы, а также проведено их сравнение с результатами численного расчета. Получено выражение для поправки второго порядка к нулевому приближению в рамках операторного метода и оценен ее вклад в итоговое значение энергии системы. Приведенные результаты могут представлять интерес при описании эволюции квантовой модели Раби, а также при исследовании состояний систем двухуровневых атомов в резонансном квантовом поле.

**Ключевые слова:** квантовая модель Раби; операторный метод; двухуровневая система; квантовое поле; резонанс; калибровочная инвариантность.

---

### Образец цитирования:

Леонов АВ, Феранчук ИД. Аналитическая диагонализация гамильтониана квантовой модели Раби в кулоновской калибровке. *Журнал Белорусского государственного университета. Физика.* 2022;1:44–51.  
<https://doi.org/10.33581/2520-2243-2022-1-44-51>

### For citation:

Leonau AU, Feranchuk ID. Analytical diagonalisation of the Hamiltonian of the quantum Rabi model in the Coulomb gauge. *Journal of the Belarusian State University. Physics.* 2022;1:44–51. Russian.  
<https://doi.org/10.33581/2520-2243-2022-1-44-51>

---

### Авторы:

**Александр Владимирович Леонов** – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры теоретической физики и астрофизики физического факультета.  
**Илья Давыдович Феранчук** – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры теоретической физики и астрофизики физического факультета.

### Authors:

**Aliaksandr U. Leonau**, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of theoretical physics and astrophysics, faculty of physics.  
[leonov.bsu@gmail.com](mailto:leonov.bsu@gmail.com)  
<https://orcid.org/0000-0002-4830-6856>  
**Ilya D. Feranchuk**, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of theoretical physics and astrophysics, faculty of physics.  
[feranchuk@bsu.by](mailto:feranchuk@bsu.by)  
<https://orcid.org/0000-0003-0476-8634>

ANALYTICAL DIAGONALISATION OF THE HAMILTONIAN  
OF THE QUANTUM RABI MODEL IN THE COULOMB GAUGEA. U. LEONAU<sup>a</sup>, I. D. FERANCHUK<sup>a</sup><sup>a</sup>Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: A. U. Leonau (leonov.bsu@gmail.com)

In the present paper we investigate the approximate analytical diagonalisation of the Hamiltonian of the quantum Rabi model written in the Coulomb gauge and taking into account the gauge invariance of the system. It is shown that the Hamiltonian of the model can be diagonalised with high accuracy on the basis of a unitary operator of the gauge transformation utilising a simple basis set of state vectors. It is essential that the obtained approximate expressions do not depend on the variational parameters and are valid within the whole range of the parameter values. The zeroth-order approximation and uniformly available approximation are derived for the eigenstates of the system, and their comparison with the results of the numerical simulation is elaborated. The second-order correction to the zeroth-order approximation is deduced and its contribution to the energy of the system is estimated. The obtained results could be useful for description of the evolution of the quantum Rabi model as well as for investigation of systems of two-level atoms in the resonant quantum field.

**Keywords:** quantum Rabi model; operator method; two-level system; quantum field; resonance; gauge invariance.

## Введение

Квантовая модель Раби (КМР) описывает взаимодействие двухуровневой системы (ДУС) с одно-модовым квантовым полем в резонаторе [1; 2]. Она является одной из базовых моделей, которые используются для описания взаимодействия излучения с веществом, и имеет фундаментальное значение для многих задач квантовой оптики [3], квантовой информации [4] и физики конденсированных сред [5]. Различные приложения данной модели и ее обобщений и в настоящее время остаются весьма актуальными (см. [6–10] и цитированную в них литературу).

Для эффективного использования КМР при исследовании указанных проблем возникает необходимость вычисления собственных функций и собственных значений гамильтониана КМР. Недавно было показано [11], что КМР является точно интегрируемой системой, и задача о спектре ее стационарных состояний выражается через решения многочленных рекуррентных соотношений. Этот результат имеет принципиальное значение, однако собственные функции и собственные значения не представляются в замкнутой аналитической форме, что крайне затрудняет их использование для конкретных приложений при описании задач эволюции КМР, которые связаны с суммированием по всему спектру стационарных состояний системы. Разработке различных методов приближенного аналитического представления данных состояний в широком диапазоне изменения параметров системы посвящено большое количество работ (см. [12–15] и цитированную в них литературу). Существенным недостатком известных в настоящее время методов является то, что получаемый на их основе базисный набор функций имеет достаточно сложную форму, и это не позволяет аналитически оценить точность построенных приближений. Как правило, эффективность полученного приближения оценивается путем его визуального сравнения с результатами прямого численного решения задачи.

Еще одна проблема использования КМР в режиме сильной связи атомной системы с квантовым полем заключается в корректном обобщении этой модели при учете в гамильтониане нелинейных по полю операторов. Необходимым условием для такого обобщения является калибровочная инвариантность полученного гамильтониана. В ряде работ несоблюдение этого условия приводило к противоречивым предсказаниям и парадоксам. Данная проблема решена в недавней работе [16], где найден унитарный оператор, который осуществляет преобразование гамильтониана КМР из стандартной дипольной калибровки к кулоновской калибровке при корректном учете квадратичного по полю оператора.

Гамильтониан КМР в кулоновской калибровке имеет достаточно сложную форму, и численный расчет спектра его собственных состояний требует использования матриц большой размерности [16]. На первый взгляд кажется, что это затрудняет построение аналитического приближения. Однако в настоящей работе показано, что можно найти весьма простой набор базисных векторов состояний, в котором гамильтониан КМР в кулоновской калибровке с высокой точностью диагонализуется. Это дает аналитическую аппроксимацию для энергетических уровней системы и простые выражения для собственных функций во всем диапазоне изменения ее параметров. Предлагаемый подход к решению задачи основан на использовании операторного метода (ОМ) решения уравнения Шрёдингера [17], что позволяет не только найти нулевое приближение для энергетических уровней, но и оценить точность полученных результатов.

### КМР в кулоновской калибровке

Хорошо известно, что взаимодействие одномодового квантового поля с атомной системой имеет резонансный характер, когда частота поля близка к одной из частот перехода между атомными уровнями. Выделение этой пары состояний и лежит в основе КМР, в которой также используется дипольное приближение, когда взаимодействие атома с полем определяется оператором  $(\vec{d} \cdot \vec{E})$ , где  $\vec{d}$  – дипольный момент перехода, а  $\vec{E}$  – вектор напряженности электрического поля. Эти предположения приводят к так называемой дипольной калибровке КМР, которой соответствует следующий оператор Гамильтона в натуральной системе единиц ( $\hbar = c = 1$ ):

$$\hat{H} = \hat{a}^+ \hat{a} + \frac{\Delta}{2} \hat{\sigma}_z + f(\hat{a} + \hat{a}^+) \hat{\sigma}_x, \quad (1)$$

где  $\hat{a}^+$  и  $\hat{a}$  – операторы рождения и уничтожения квантов поля с частотой  $\omega$ , которая выбрана в качестве единицы измерения энергии, т. е.  $\omega = 1$ ;  $\Delta$  – частота резонансного перехода атома;  $f \sim |\vec{d}|$  – безразмерная константа связи атома с полем;  $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_z$  – матрицы Паули. Отметим, что оператор (1) отличается от определения, использованного в работе [16], каноническим преобразованием  $\hat{a} \rightleftharpoons -i\hat{a}, \hat{a}^+ \rightleftharpoons i\hat{a}^+$ .

Кулоновская калибровка КМР возникает при замене в операторе кинетической энергии атома оператора импульса  $\vec{p} \rightarrow (\vec{p} - e\vec{A})$ , где  $e$  – заряд электрона, а  $\vec{A}$  – векторный потенциал поля, при этом оператор потенциальной энергии  $V(\vec{r})$  остается неизменным. При такой замене взаимодействие атома с полем пропорционально величине  $(\vec{p} \cdot \vec{A})$ , и в гамильтониане возникает так называемый диамагнитный член  $A^2$ , что приводит к модификации оператора КМР. Однако поскольку электромагнитное взаимодействие инвариантно относительно калибровочного преобразования, то оба гамильтониана должны быть эквивалентны. В рамках теории возмущений по полю это показано в книге [18], но строгое доказательство эквивалентности обоих представлений получено в работе [16]. Основная идея этого доказательства связана с тем, что выделение в системе только двух состояний приводит к нелокальности потенциала  $V(\vec{r})$ , в результате чего он не коммутирует с оператором калибровочного преобразования, который в рамках дипольного приближения определяется следующим унитарным оператором:

$$\hat{U} = e^{f\hat{\sigma}_x(\hat{a}^+ - \hat{a})}$$

Применяя данное преобразование к оператору (1), можно получить выражение для гамильтониана КМР в кулоновской калибровке:

$$\hat{H}_C = \hat{a}^+ \hat{a} + \frac{\Delta}{2} \left\{ \hat{\sigma}_z \cosh \left[ 2f(\hat{a} - \hat{a}^+) \right] - i \hat{\sigma}_y \sinh \left[ 2f(\hat{a} - \hat{a}^+) \right] \right\}, \quad (2)$$

где по аналогии с работой [16] опущено слагаемое  $f^2$ , которое возникает в результате проецирования оператора  $\hat{x}^2$  на двумерное гильбертово пространство.

Как и гамильтониан (1), гамильтониан (2) коммутирует с оператором комбинированной четности

$$\hat{P} = \hat{\sigma}_z e^{i\pi \hat{a}^+ \hat{a}}, \quad (3)$$

что должно учитываться при построении различных приближений.

### Нулевое приближение ОМ для собственных состояний оператора $\hat{H}_C$

Как уже отмечалось выше, во многих работах (см., например, [12–15] и цитированную в них литературу) были предложены методы приближенного аналитического решения уравнения Шрёдингера с гамильтонианом (1) в широком диапазоне изменения константы связи. В большинстве случаев это сопряжено с использованием довольно сложных векторов состояния и преобразований. Достаточно привести в качестве примера недавнюю работу [15], в которой описание метода получения приближенного решения занимает 10 страниц журнала. Существенно, что сложная форма базисного набора собственных векторов состояния в нулевом приближении не позволяет вычислять поправки к данным решениям.

На этом фоне представляется удивительным то обстоятельство, что более сложный по форме, но эквивалентный гамильтониану (1) гамильтониан (2) с высокой степенью точности диагонализует с помощью простейшего базисного набора состояний

$$|\Psi_{ns}\rangle = |n\rangle \chi_s, \quad n = 0, 1, \dots, s = \uparrow, \downarrow, \quad (4)$$

где  $|n\rangle$  – фоковские состояния поля;  $\chi_s$  – собственные векторы оператора  $\hat{\sigma}_z$ , при этом спиновые и полевые переменные разделяются. Кроме того, состояния (4) являются собственными и для оператора четности (3).

Простой базисный набор (4) позволяет использовать для решения уравнения Шрёдингера ОМ, описанный в книге [17]. В рамках данного подхода решение уравнения

$$\hat{H}_C |\Psi_v\rangle = E_v |\Psi_v\rangle, \quad (5)$$

где индекс  $v = (n, s)$  означает совокупность квантовых чисел состояния, вычисляется с помощью итерационной схемы, которая обеспечивает сходимость последовательных приближений.

Приведем формулу нулевого приближения для энергетических уровней, получаемую в рамках этого подхода при разложении собственного вектора по базисным функциям  $|\psi_v\rangle$  полного набора, в качестве которых используются функции (4):

$$E_{n,s}^{(0)} = \langle \psi_{ns} | \hat{H}_C | \psi_{ns} \rangle = n + s \frac{\Delta}{2} S_m(f), \quad (6)$$

$$S_{kn}(f) = (-1)^n \sqrt{\frac{n!}{k!}} (2f)^{k-n} L_n^{k-n}(4f^2) e^{-2f^2}, \quad k \geq n, S_{kn} = S_{nk},$$

где  $L_n^k(x)$  есть обобщенные полиномы Лагерра, а спиновым индексам  $\uparrow, \downarrow$  сопоставлены численные значения  $+1$  и  $-1$  соответственно.

На рис. 1 приведены результаты вычислений по формуле (6) при различных значениях параметров системы. Сравнение нулевого приближения с результатами численных расчетов показывает, что простая формула (6) обеспечивает точность не хуже 5 % во всем диапазоне изменения параметров. Также отметим, что расстояние между уровнями уменьшается при увеличении константы связи (дипольного момента) за счет возрастания энергии связи двухуровневого атома с полем.

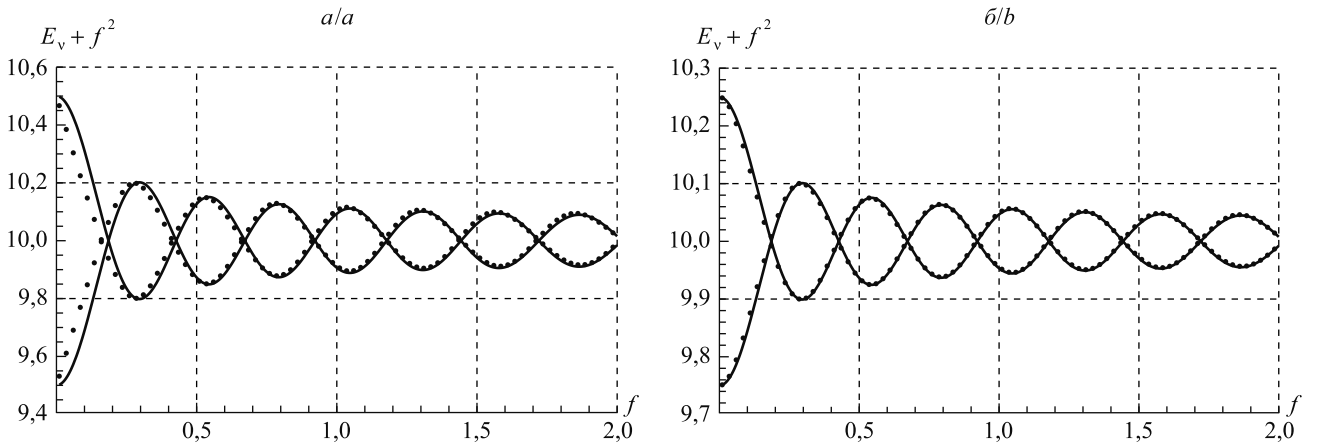


Рис. 1. Энергетические уровни КМР при  $n = 10, s = \pm 1$  в зависимости от константы связи:  $a - \Delta = 1,0$ ;  $b - \Delta = 0,5$ . Сплошной линии соответствует решение по формуле (6), точками обозначены результаты численного расчета

Fig. 1. Energy levels of QRM for  $n = 10, s = \pm 1$  depending on the coupling constant:  $a - \Delta = 1.0$ ;  $b - \Delta = 0.5$ . The solid line corresponds to the solution by formula (6), the dotted line shows the results of numerical calculation

### Равномерно пригодное приближение ОМ

Несмотря на то что простейший базис (4) обеспечивает достаточно высокую точность вычисления энергетических уровней системы, имеет место заметное отклонение от точного решения в области малой константы связи при резонансе ( $\Delta = 1,0$ ). Однако можно улучшить нулевое приближение с помощью незначительного усложнения базисного набора. Для этого следует учесть, что в области слабой связи, как и в приближении вращающейся волны [19; 20], имеет место вырождение уровней одинаковой четности. Как известно, в данном случае необходимо использовать правильную линейную комбинацию вырожденных состояний, которая в схеме ОМ называется равномерно пригодным приближением (РПП).

В рассматриваемой задаче такие модифицированные волновые функции строятся из двух состояний (4) с одинаковой четностью и имеют следующий вид:

$$|\Psi_n\rangle = A|n\rangle\chi_\uparrow + B|n+1\rangle\chi_\downarrow. \quad (7)$$

Коэффициенты  $A$  и  $B$ , а также энергии уровней определяются из системы линейных алгебраических уравнений, получающихся при подстановке разложения (7) в уравнение (5) и его последующем проецировании на векторы состояния  $|n\rangle\chi_\uparrow$  и  $|n+1\rangle\chi_\downarrow$  соответственно и использовании условия нормировки для вектора (7). Приведем их итоговые выражения:

$$E_{n,\pm} = n + \frac{1}{2} + \frac{\Delta}{4}(-1)^n(S_m + S_{n+1,n+1}) \pm \frac{M}{2}, \quad (8)$$

$$M = \left\{ \left[ 1 - \frac{\Delta}{2}(-1)^n(S_m - S_{n+1,n+1}) \right]^2 + \Delta^2 S_{n,n+1}^2 \right\}^{1/2},$$

$$A_{n,\pm} = -\frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}}, \quad B_{n,\pm} = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}, \quad \gamma = \frac{\frac{\Delta}{2}(-1)^n S_{n,n+1}}{n + \frac{\Delta}{2}(-1)^n S_{n,n} - E_{n,\pm}}.$$

На рис. 2 представлены результаты сравнения энергии, вычисленной в рамках РПП, с численным решением, которые демонстрируют высокую точность этого приближения во всем диапазоне изменения параметров КМР.

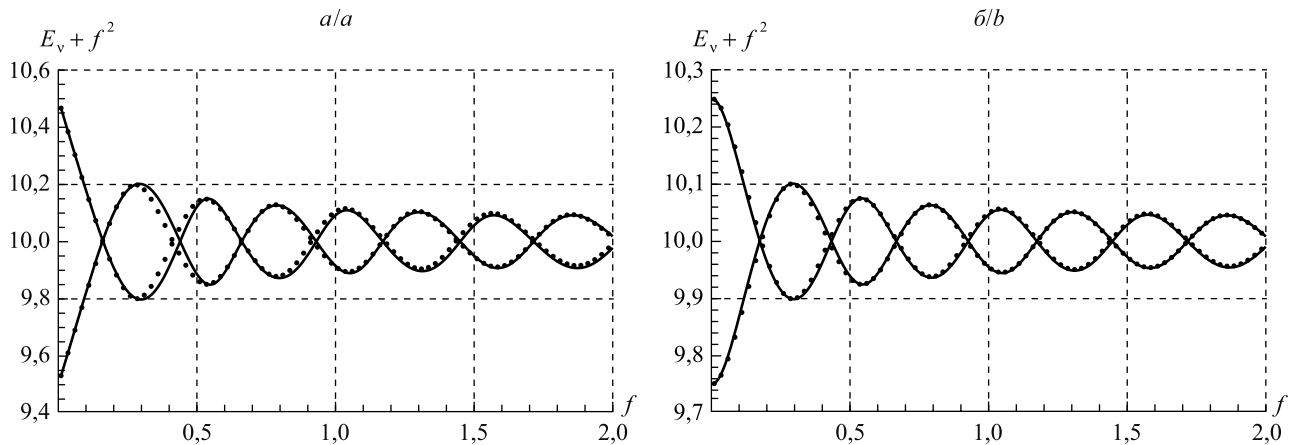


Рис. 2. Энергетические уровни КМР при  $n = 10$ ,  $s = \pm 1$  в зависимости от константы связи:  $a - \Delta = 1,0$ ;  $b - \Delta = 0,5$ . Сплошной линии соответствует решение по формуле (8), точками обозначены результаты численного расчета

Fig. 2. Energy levels of QRM for  $n = 10$ ,  $s = \pm 1$  depending on the coupling constant:  $a - \Delta = 1.0$ ;  $b - \Delta = 0.5$ . The solid line corresponds to the solution by formula (8), the dotted line shows the results of numerical calculation

### Вычисление поправки второго порядка ОМ

Простая форма базисного набора (4) позволяет выполнить суммирование по промежуточным состояниям при вычислении поправки второго порядка к энергетическим уровням, чтобы оценить точность ОМ (поправка первого порядка в рамках данного метода тождественно равна нулю). В силу изменения функций нулевого приближения при учете вырождения в области малой константы связи при резонансе выражение для этой поправки принимает вид

$$E_{nr}^{(2)} = \frac{|F_{nr}|^2}{E_{nr} - E_{n,-r}} + \sum_{ks \neq \nu_1, \nu_2} \frac{|\tilde{H}_{kn}^{sr}|^2}{E_{nr} - H_{kk}^{ss}},$$

где  $\nu_1 = (n, \uparrow)$ ,  $\nu_2 = (n+1, \downarrow)$  и матричные элементы вычисляются в соответствии со следующими выражениями:

$$H_{kn}^{ss'} = \langle k, \chi_s | \hat{H}_C | n, \chi_{s'} \rangle = n\delta_{kn}\delta_{ss'} + \frac{\Delta}{2} S_{kn} \left[ \frac{(-1)^n + (-1)^k}{2} s\delta_{ss'} - \frac{(-1)^n - (-1)^k}{2} s\delta_{s,-s'} \right],$$

$$F_{nr} = \langle \Psi_{n,-r} | \hat{H}_C | \Psi_{nr} \rangle = A_{n,-r} A_{nr} H_{nn}^{\uparrow\uparrow} + A_{n,-r} B_{nr} H_{n,n+1}^{\uparrow\downarrow} + B_{n,-r} A_{nr} H_{n+1,n}^{\downarrow\uparrow} + B_{n,-r} B_{nr} H_{n+1,n+1}^{\downarrow\downarrow},$$

$$\tilde{H}_{kn}^{sr} = \langle k, \chi_s | \hat{H}_C | \Psi_{nr} \rangle = A_{nr} H_{kn}^{s\uparrow} + B_{nr} H_{k,n+1}^{s\downarrow}. \quad (9)$$

Результаты вычисления данной поправки показаны на рис. 3. Как видим, ее величина не превышает 4 %, что демонстрирует быструю сходимость рассматриваемого метода. Отметим, что, в отличие от стандартной теории возмущений, матричные элементы в (9) вычисляются с полным гамильтонианом системы, а не только с оператором возмущения.

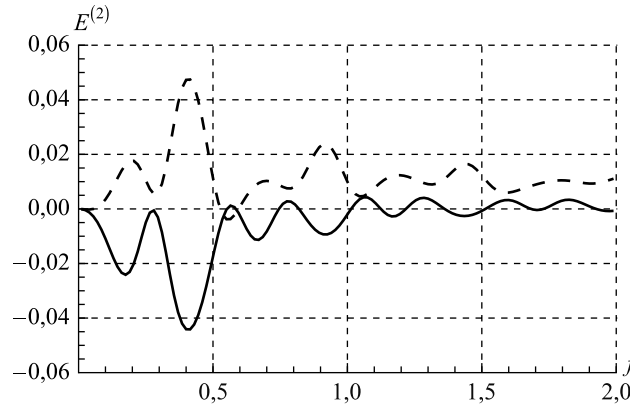


Рис. 3. Величина поправки второго порядка в зависимости от константы связи. Штриховой линии соответствует поправка к уровню  $n = 10, s = +1$ , сплошной линии – поправка к уровню  $n = 10, s = -1$

Fig. 3. Second order correction value depending on the coupling constant. The dashed line shows the correction for the level  $n = 10, s = +1$ , the solid line – the correction for the level  $n = 10, s = -1$

## Заключение

Таким образом, в настоящей работе построено приближение для собственных функций и собственных значений гамильтониана КМР в кулоновской калибровке. Отметим, что аналогичные результаты были получены ранее для случая дипольной калибровки [12; 13; 21]. Однако в указанных работах использованы достаточно сложные вариационные волновые функции нулевого приближения, зависящие от вариационного параметра, выбор которого неоднозначен. Нами показано, что гамильтониан КМР диагонализуются с высокой точностью с помощью унитарного оператора калибровочного преобразования при использовании простого базисного набора векторов состояния, которые позволяют находить поправки к нулевому приближению и могут использоваться для описания эволюции системы. Представленный в работе подход можно обобщить для исследования состояний системы двухуровневых атомов в квантовом поле (модель Дике).

## Библиографические ссылки

1. Rabi I. On the process of space quantization. *Physical Review*. 1936;49(4):324–328. DOI: 10.1103/PhysRev.49.324.
2. Rabi I. Space quantization in a gyrating magnetic field. *Physical Review*. 1937;51(8):652–654. DOI: 10.1103/PhysRev.51.652.
3. Walther H, Varcoe BTH, Englert B-G, Becker T. Cavity quantum electrodynamics. *Reports on Progress in Physics*. 2006;69(5):1325–1382. DOI: 10.1088/0034-4885/69/5/R02.
4. Raimond JM, Brune M, Haroche S. Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity. *Reviews of Modern Physics*. 2001;73(3):565–582. DOI: 10.1103/RevModPhys.73.565.
5. Holstein T. Studies of polaron motion: part I. The molecular-crystal model. *Annals of Physics*. 1959;8(3):325–342. DOI: 10.1016/0003-4916(59)90002-8.
6. Feranchuk ID, Leonov AV, Skoromnik OD. Physical background for parameters of the quantum Rabi model. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2016;49(45):454001. DOI: 10.1088/1751-8113/49/45/454001.



7. Kockum AF, Miranowicz A, Macrì V, Savasta S, Nori F. Deterministic quantum nonlinear optics with single atoms and virtual photons. *Physical Review A: Covering Atomic, Molecular, and Optical Physics and Quantum Information*. 2017;95(6):063849. DOI: 10.1103/PhysRevA.95.063849.
8. Felicetti S, Rossatto DZ, Rico E, Solano E, Forn-Díaz P. Two-photon quantum Rabi model with superconducting circuits. *Physical Review A: Covering Atomic, Molecular, and Optical Physics and Quantum Information*. 2018;97(1):013851. DOI: 10.1103/PhysRevA.97.013851.
9. Stassi R, Macrì V, Kockum AF, Di Stefano O, Miranowicz A, Savasta S, et al. Quantum nonlinear optics without photons. *Physical Review A: Covering Atomic, Molecular, and Optical Physics and Quantum Information*. 2017;96(2):023818. DOI: 10.1103/PhysRevA.96.023818.
10. Forn-Díaz P, Lamata L, Rico E, Kono J, Solano E. Ultrastrong coupling regimes of light-matter interaction. *Reviews of Modern Physics*. 2019;91(2):025005. DOI: 10.1103/RevModPhys.91.025005.
11. Braak D. Integrability of the Rabi model. *Physical Review Letters*. 2011;107(10):100401. DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.100401.
12. Feranchuk ID, Komarov LI, Ulyanenko AP. Two-level system in a one-mode quantum field: numerical solution on the basis of the operator method. *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 1996;29(14):4035–4047. DOI: 10.1088/0305-4470/29/14/026.
13. Irish EK. Generalized rotating-wave approximation for arbitrarily large coupling. *Physical Review Letters*. 2007;99(17):173601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.99.173601.
14. Yu-Yu Zhang, Qing-Hu Chen, Yang Zhao. Generalized rotating-wave approximation to biased qubit-oscillator systems. *Physical Review A: Covering Atomic, Molecular, and Optical Physics and Quantum Information*. 2013;87(3):033827. DOI: 10.1103/PhysRevA.87.033827.
15. Zi-Min Li, Batchelor MT. Generalized adiabatic approximation to the quantum Rabi model. *Physical Review A: Covering Atomic, Molecular, and Optical Physics and Quantum Information*. 2021;104(3):033712. DOI: 10.1103/PhysRevA.104.033712.
16. Di Stefano O, Settineri A, Macrì V, Garziano L, Stassi R, Savasta S, et al. Resolution of gauge ambiguities in ultrastrong-coupling cavity quantum electrodynamics. *Nature Physics*. 2019;15(8):803–808. DOI: 10.1038/s41567-019-0534-4.
17. Feranchuk I, Ivanov A, Van-Hoang Le, Ulyanenko A. *Non-perturbative description of quantum systems*. Cham: Springer International Publishing; 2015. xv, 362 p. (Lecture notes in physics; volume 894). DOI: 10.1007/978-3-319-13006-4.
18. Scully MO, Zubairy MS. *Quantum optics*. Cambridge: Cambridge University Press; 1997. xxi, 630 p. DOI: 10.1017/CBO9780511813993.
19. Jaynes ET, Cummings FW. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proceedings of the IEEE*. 1963;51(1):89–109. DOI: 10.1109/PROC.1963.1664.
20. Леонов А, Феранчук И. *Двухуровневая система в одномодовом квантовом поле*. Saarbrücken: Lambert Academic Publishing; 2011. 116 с.
21. Леонов АВ. О сходимости итерационной схемы операторного метода для описания собственных состояний квантовой модели Раби. *Журнал Белорусского государственного университета. Физика*. 2018;3:74–80.

## References

1. Rabi I. On the process of space quantization. *Physical Review*. 1936;49(4):324–328. DOI: 10.1103/PhysRev.49.324.
2. Rabi I. Space quantization in a gyrating magnetic field. *Physical Review*. 1937;51(8):652–654. DOI: 10.1103/PhysRev.51.652.
3. Walther H, Varcoe BTH, Englert B-G, Becker T. Cavity quantum electrodynamics. *Reports on Progress in Physics*. 2006;69(5):1325–1382. DOI: 10.1088/0034-4885/69/5/R02.
4. Raimond JM, Brune M, Haroche S. Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity. *Reviews of Modern Physics*. 2001;73(3):565–582. DOI: 10.1103/RevModPhys.73.565.
5. Holstein T. Studies of polaron motion: part I. The molecular-crystal model. *Annals of Physics*. 1959;8(3):325–342. DOI: 10.1016/0003-4916(59)90002-8.
6. Feranchuk ID, Leonov AV, Skoromnik OD. Physical background for parameters of the quantum Rabi model. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2016;49(45):454001. DOI: 10.1088/1751-8113/49/45/454001.
7. Kockum AF, Miranowicz A, Macrì V, Savasta S, Nori F. Deterministic quantum nonlinear optics with single atoms and virtual photons. *Physical Review A: Covering Atomic, Molecular, and Optical Physics and Quantum Information*. 2017;95(6):063849. DOI: 10.1103/PhysRevA.95.063849.
8. Felicetti S, Rossatto DZ, Rico E, Solano E, Forn-Díaz P. Two-photon quantum Rabi model with superconducting circuits. *Physical Review A: Covering Atomic, Molecular, and Optical Physics and Quantum Information*. 2018;97(1):013851. DOI: 10.1103/PhysRevA.97.013851.
9. Stassi R, Macrì V, Kockum AF, Di Stefano O, Miranowicz A, Savasta S, et al. Quantum nonlinear optics without photons. *Physical Review A: Covering Atomic, Molecular, and Optical Physics and Quantum Information*. 2017;96(2):023818. DOI: 10.1103/PhysRevA.96.023818.
10. Forn-Díaz P, Lamata L, Rico E, Kono J, Solano E. Ultrastrong coupling regimes of light-matter interaction. *Reviews of Modern Physics*. 2019;91(2):025005. DOI: 10.1103/RevModPhys.91.025005.
11. Braak D. Integrability of the Rabi model. *Physical Review Letters*. 2011;107(10):100401. DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.100401.
12. Feranchuk ID, Komarov LI, Ulyanenko AP. Two-level system in a one-mode quantum field: numerical solution on the basis of the operator method. *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 1996;29(14):4035–4047. DOI: 10.1088/0305-4470/29/14/026.
13. Irish EK. Generalized rotating-wave approximation for arbitrarily large coupling. *Physical Review Letters*. 2007;99(17):173601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.99.173601.
14. Yu-Yu Zhang, Qing-Hu Chen, Yang Zhao. Generalized rotating-wave approximation to biased qubit-oscillator systems. *Physical Review A: Covering Atomic, Molecular, and Optical Physics and Quantum Information*. 2013;87(3):033827. DOI: 10.1103/PhysRevA.87.033827.
15. Zi-Min Li, Batchelor MT. Generalized adiabatic approximation to the quantum Rabi model. *Physical Review A: Covering Atomic, Molecular, and Optical Physics and Quantum Information*. 2021;104(3):033712. DOI: 10.1103/PhysRevA.104.033712.

16. Di Stefano O, Settineri A, Macrì V, Garziano L, Stassi R, Savasta S, et al. Resolution of gauge ambiguities in ultrastrong-coupling cavity quantum electrodynamics. *Nature Physics*. 2019;15(8):803–808. DOI: 10.1038/s41567-019-0534-4.
17. Feranchuk I, Ivanov A, Van-Hoang Le, Ulyanekov A. *Non-perturbative description of quantum systems*. Cham: Springer International Publishing; 2015. xv, 362 p. (Lecture notes in physics; volume 894). DOI: 10.1007/978-3-319-13006-4.
18. Scully MO, Zubairy MS. *Quantum optics*. Cambridge: Cambridge University Press; 1997. xxi, 630 p. DOI: 10.1017/CBO9780511813993.
19. Jaynes ET, Cummings FW. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proceedings of the IEEE*. 1963;51(1):89–109. DOI: 10.1109/PROC.1963.1664.
20. Leonau A, Feranchuk I. *Dvukhurovnevaya sistema v odnomodovom kvantovom pole* [Two-level system in a single-mode quantum field]. Saarbrücken: Lambert Academic Publishing; 2011. 116 p. Russian.
21. Leonau AU. Investigating the convergence of the iteration scheme of operator method for description of eigenstates of the quantum Rabi model. *Journal of the Belarusian State University. Physics*. 2018;3:74–80. Russian.

Получена 01.11.2021 / исправлена 03.12.2021 / принята 07.12.2021.  
Received 01.11.2021 / revised 03.12.2021 / accepted 07.12.2021.