

УДК 530.122, 531.011

ИНТЕГРАЛЫ ФИНИТНОГО ДВИЖЕНИЯ В ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ ШВАРЦШИЛЬДА С ТОЧНОСТЬЮ ДО ЧЛЕНОВ ПОРЯДКА c^{-2}

А. Н. ФУРС¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

С точностью до членов, содержащих c^{-2} , выведены простые аналитические зависимости, описывающие финитное движение пробной частицы в геометрии Шварцшильда. Подобное движение рассматривается как поправочное к невозмущенному кеплерову движению при условии малости отношения радиуса Шварцшильда к радиальной координате. В указанном приближении также найдены сохраняющиеся интегралы, характеризующие орбитальное движение частицы. Для этого уравнения движения представлены в гамильтоновой форме и произведен ряд канонических преобразований обобщенных координат и импульсов, позволяющих проинтегрировать эти уравнения. Выведены периодические и вековые вклады для оскулирующих элементов орбиты пробной частицы – средней аномалии, аргумента перигея и большой полуоси. Предложен алгоритм расчета положения частицы в приближении c^{-2} , по вычислительной сложности сравнимый с алгоритмом решения стандартной задачи Кеплера. Произведена оценка погрешности полученных приближенных решений, и указаны границы их применимости.

Ключевые слова: метрика Шварцшильда; интегралы движения; оскулирующие элементы орбиты; кеплерова задача; гамильтонов формализм.

Образец цитирования:

Фурс АН. Интегралы финитного движения в поле тяготения Шварцшильда с точностью до членов порядка c^{-2} . *Журнал Белорусского государственного университета. Физика*. 2023; 3:31–43.
EDN: NINXVP

For citation:

Furs AN. Integrals of finite motion in the Schwarzschild gravitational field up to terms of order c^{-2} . *Journal of the Belarusian State University. Physics*. 2023;3:31–43. Russian.
EDN: NINXVP

Автор:

Александр Николаевич Фурс – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой теоретической физики и астрофизики физического факультета.

Author:

Alexander N. Furs, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of theoretical physics and astrophysics, faculty of physics.
fursan@bsu.by

INTEGRALS OF FINITE MOTION IN THE SCHWARZSCHILD GRAVITATIONAL FIELD UP TO TERMS OF ORDER c^{-2}

A. N. FURS^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Up to terms containing c^{-2} , simple analytical dependences are derived that describe the finite motion of a test particle in the Schwarzschild geometry. Such a motion is considered as a correction to the unperturbed Keplerian motion under the condition that the ratio of the Schwarzschild radius to the radial coordinate is small. In this approximation, conserved integrals are also found that characterise the orbital motion of the particle. For this, the equations of motion are presented in the Hamiltonian form, and a number of canonical transformations of the generalised coordinates and momenta are made, which make it possible to integrate these equations. Periodic and secular contributions are derived for the osculating elements of the test particle orbit: the mean anomaly, the periastron argument, and the semi-major axis. An algorithm for calculating the position of a particle in the c^{-2} approximation is proposed, which is comparable in computational complexity to the algorithm for solving the standard Kepler problem. An estimate of the error of the obtained approximate solutions is made and the limits of their applicability are indicated.

Keywords: Schwarzschild metric; integrals of motion; osculating elements of the orbit; Kepler problem; Hamiltonian formalism.

Метрика Шварцшильда, являющаяся точным решением уравнений Эйнштейна и описывающая гравитационное поле уединенного невращающегося сферически симметричного массивного тела, имеет вид

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (1)$$

где $r_g = \frac{2\mu}{c^2}$ – радиус Шварцшильда; $\mu = kM$ – гравитационный параметр; k – гравитационная постоянная; M – масса тела; c – скорость света в вакууме. Задача движения пробной частицы с массой $m \ll M$ в центрально-симметричном гравитационном поле в геометрии Шварцшильда наряду с задачей распространения света в таком поле хорошо изучена в научной и учебной литературе (см., например, [1–3]). Эффекты смещения перигелиев орбит планет Солнечной системы и гравитационного отклонения света вблизи Солнца, теоретически следующие из решения этих задач, явились одними из первых экспериментальных подтверждений общей теории относительности.

Математический формализм для точного описания движения пробных частиц в метрике Шварцшильда сложен и основан, в частности, на использовании свойств эллиптических функций (наиболее обстоятельно этот вопрос рассмотрен в [4]). В то же время во многих практически важных случаях орбитального движения отношение радиуса Шварцшильда r_g к радиальной координате r мало. Например, в перигелии Меркурия оно составляет $6,4 \cdot 10^{-8}$. Это позволяет воспользоваться формальными разложениями входящих в уравнения движения величин в ряды по обратным степеням параметра c^2 и рассматривать члены, содержащие этот параметр, как поправочные к ведущим членам, определяющим невозмущенное кеплерово движение. При этом появляется возможность применения мощного аналитического аппарата теории возмущений, хорошо зарекомендовавшего себя в небесной механике [5].

В настоящей работе поставлена цель проинтегрировать уравнения финитного движения пробной частицы в геометрии Шварцшильда в первом приближении, содержащем параметр c^{-2} , так, чтобы аналитические зависимости r и φ от координатного времени t не содержали каких-либо специальных функций. Для этого используется гамильтонова форма представления уравнений и выполняется ряд канонических преобразований обобщенных переменных, позволяющих достигнуть указанной цели. При этом в явном виде находятся четыре интеграла движения, целиком определяющие орбитальное движение в данном приближении. Полученные решения содержат как периодические, так и вековые возмущающие члены для оскулирующих кеплеровых элементов орбит, таких как средняя аномалия, аргумент перигелия и большая полуось. Эксцентриситет орбит предполагается произвольным, и никаких разложений в ряды по этому параметру не производится. В окончательное решение входят лишь элементарные функции, что позволяет существенно снизить вычислительные затраты при расчетах движения пробных частиц. Аналитическое представление оскулирующих кеплеровых элементов орбит пробных частиц в геометрии Шварцшильда в виде разложений в ряды по степеням параметра c^{-2} ранее в литературе не встречалось. Рассматриваемая в работе задача имеет также методический интерес.

Для оценки точности приближенных решений производится их сравнение (при одних и тех же начальных условиях) с численными решениями точных дифференциальных уравнений движения, выводимых из метрики (1), и обсуждается область применимости указанного приближения.

Уравнения Гамильтона и канонические преобразования

В силу центральной симметрии поля положение в пространстве плоскости орбиты пробной частицы не изменяется, и в выражении (1) принимаем $\theta = \frac{\pi}{2}$ и $d\theta = 0$. Известно (см., например, [2]), что для расчета движения частицы можно использовать уравнение Гамильтона – Якоби

$$g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} - m^2 c^2 = 0, \quad (2)$$

где S – действие, а компоненты метрического тензора согласно (1) имеют вид

$$g^{00} = \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}}, \quad g^{11} = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right), \quad g^{22} = -\frac{1}{r^2}, \quad g^{33} = -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}, \quad g^{ik} = 0 \quad (i \neq k). \quad (3)$$

Из решения этого уравнения находится траектория частицы, определяемая соотношениями

$$t = \pm \frac{E}{c^2} \int \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{G^2}{r^2} + m^2 c^2\right)}}, \quad (4)$$

$$\varphi - \varphi_0 = \pm G \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{G^2}{r^2} + m^2 c^2\right)}},$$

где энергия E и момент импульса G являются интегралами движения.

Уравнения движения частицы могут быть также представлены в лагранжевой форме, исходя из экстремальности действия

$$S = -mc \int ds = \int \mathcal{L} dt \quad (5)$$

вдоль геодезической. При этом функция Лагранжа согласно (1) и (5) имеет вид

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{2\mu}{c^2 r} - \frac{\dot{r}^2}{c^2 \left(1 - \frac{2\mu}{c^2 r}\right)} - \frac{r^2 \dot{\varphi}^2}{c^2}}, \quad (6)$$

где \dot{r} и $\dot{\varphi}$ – обобщенные скорости. Координата φ является циклической, и уравнения Лагранжа записываются в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0. \quad (7)$$

Отметим, что уравнения (2) и (3), с одной стороны, и уравнения (7) с функцией Лагранжа (6), с другой стороны, полностью эквивалентны.

Предполагаем теперь, что радиус Шварцшильда $r_g = \frac{2\mu}{c^2}$ много меньше радиальной координаты r .

Разлагая квадратный корень в (6) в ряд по степеням c^{-2} и оставляя при этом члены вплоть до c^{-4} включительно, получаем

$$\mathcal{L} = -mc^2 + \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{m\mu}{r} + \frac{m}{c^2} \left[\frac{\mu}{r} \dot{r}^2 + \frac{1}{8} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{2\mu}{r} \right)^2 \right] + O(c^{-4}). \quad (8)$$

Первое слагаемое в (8), представляющее энергию покоя частицы с отрицательным знаком, может быть отброшено как постоянное. Сумма второго и третьего слагаемых соответствует функции Лагранжа классической кеплеровой задачи, а четвертое слагаемое является релятивистской поправкой к этой функции. Не теряя общности, далее во всех выражениях полагаем, что $m = 1$.

Более удобно вместо (7) использовать уравнения Гамильтона, в которые наряду с координатами r и φ равноправно входят обобщенные импульсы

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \dot{r} + \frac{\dot{r}}{c^2} \left[\frac{3\mu}{r} + \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) \right], \quad p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = r^2 \dot{\phi} + \frac{r^2 \dot{\phi}}{2c^2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 + \frac{2\mu}{r} \right) = \text{const.} \quad (9)$$

Последний из них в рассматриваемом приближении является интегралом движения и представляет собой момент импульса частицы. Из (9) находятся обобщенные скорости

$$\dot{r} = p_r - \frac{p_r}{c^2} \left[\frac{3\mu}{r} + \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} \right) \right] + O(c^{-4}), \quad \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{r^2} - \frac{p_\phi}{2c^2} \left(p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r} \right) + O(c^{-4}).$$

В результате функция Гамильтона $\mathcal{H} = \dot{r}p_r + \dot{\phi}p_\phi - \mathcal{L}$ принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1, \quad \mathcal{H}_0 = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\phi^2}{2r^2} - \frac{\mu}{r}, \\ \mathcal{H}_1 &= -\frac{1}{c^2} \left[\frac{\mu p_r^2}{r} + \frac{1}{8} \left(p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r} \right)^2 \right] + O(c^{-4}), \end{aligned} \quad (10)$$

а уравнения движения принимают вид

$$\dot{r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r}, \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r}, \quad \dot{\phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\phi}, \quad \dot{p}_\phi = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} = 0. \quad (11)$$

Непосредственное интегрирование уравнений (11) затруднительно. Поэтому далее выполним ряд канонических преобразований переменных, которые позволят максимально упростить интегрирование гамильтоновых уравнений.

Вначале исключим из функции Гамильтона ведущий член \mathcal{H}_0 . Выберем следующую производящую функцию канонического преобразования:

$$\mathcal{F}(\mathcal{E}, G, r, \phi, t) = -\mathcal{E}t + G\phi + \mathcal{F}_r(r), \quad (12)$$

где \mathcal{E} и G – новые обобщенные импульсы; $\mathcal{F}_r(r)$ – радиальная часть функции, подлежащая определению. Тогда импульс G будет совпадать со старым импульсом p_ϕ , так как $p_\phi = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi} = G$, а $p_r = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial r} = \frac{d\mathcal{F}_r}{dr}$.

Новая функция Гамильтона имеет вид $\mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \mathcal{H}_0 - \mathcal{E} + \mathcal{H}_1$. Потребуем, чтобы $\mathcal{E} = \mathcal{H}_0$ (т. е. $\mathcal{H}' = \mathcal{H}_1$). Тогда

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\mathcal{F}_r}{dr} \right)^2 + \frac{G^2}{2r^2} - \frac{\mu}{r} = \mathcal{E}, \quad \mathcal{F}_r = \int dr \sqrt{2\mathcal{E} + \frac{2\mu}{r} - \frac{G^2}{r^2}}. \quad (13)$$

Обобщенные координаты, сопряженные с импульсами G и \mathcal{E} , обозначим как g и $-t_\pi$ соответственно:

$$g = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial G} = \phi - G \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{2\mathcal{E} + \frac{2\mu}{r} - \frac{G^2}{r^2}}}, \quad -t_\pi = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathcal{E}} = -t + \int \frac{dr}{\sqrt{2\mathcal{E} + \frac{2\mu}{r} - \frac{G^2}{r^2}}} \quad (14)$$

(см. (12) и (13)).

Соотношения (14) получаются из решения кеплеровой задачи при отсутствии возмущений. При этом G – момент импульса частицы, \mathcal{E} – полная энергия, g – аргумент перицентра орбиты, а t_π – время прохождения через перицентр. В кеплеровой задаче перечисленные величины являются интегралами движения, в рассматриваемом же здесь случае эти параметры не сохраняются (за исключением G) и относятся к оскулирующей орбите.

Перечислим известные формулы для кеплерова движения, следующие из (14). Уравнение орбиты получается из первого соотношения:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f}, \quad p = \frac{G^2}{\mu}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}G^2}{\mu^2}}, \quad (15)$$

где p – фокальный параметр; e – эксцентриситет; $f = \phi - g$ – истинная аномалия (см., например, [5]). Так как рассматривается финитное движение, то предполагается, что $e < 1$ (т. е. оскулирующая орбита

представляет собой эллипс) и, соответственно, $\mathcal{E} < 0$. При преобразовании второго соотношения из (14) удобно ввести параметр $a = -\frac{\mu}{2\mathcal{E}}$ – большую полуось оскулирующей орбиты, при этом $p = a(1 - e^2)$. Тогда

$$r = a(1 - e \cos E), \quad E - e \sin E = l, \quad l = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - t_\pi), \quad (16)$$

где l – средняя аномалия, а E – эксцентрическая аномалия, которая находится как решение второго уравнения из (16), являющегося трансцендентным и называющегося уравнением Кеплера.

Взаимосвязь истинной и эксцентрической аномалий устанавливается в случае приравнивания выражений для r из (15) и (16):

$$\cos f = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}, \quad \sin f = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E}, \quad \operatorname{tg} \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}. \quad (17)$$

Уравнения Гамильтона принимают вид

$$\dot{g} = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial G}, \quad \dot{G} = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial g} = 0, \quad -\dot{t}_\pi = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial \mathcal{E}}, \quad \dot{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial(-t_\pi)}$$

с функцией

$$\mathcal{H}' = -\frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} \mathcal{E}^2 + \frac{4\mathcal{E}\mu}{r} + \frac{4\mu^2}{r^2} - \frac{G^2\mu}{r^3} \right) + O(c^{-4}) \quad (18)$$

(см. третье соотношение из (10)). Величина r , входящая в (18), в соответствии с (16) должна рассматриваться как функция переменных G , \mathcal{E} и t_π . Следовательно, функция Гамильтона не зависит от переменной g , и G является интегралом движения.

При следующем каноническом преобразовании с производящей функцией

$$F(L, G, -t_\pi, g, t) = -\frac{\mu^2}{2L^2}(t - t_\pi) + Gg$$

вместо импульса \mathcal{E} вводится новый импульс L , а пара сопряженных переменных G и g остается той же. Имеем $\mathcal{E} = \frac{\partial F}{\partial(-t_\pi)} = \frac{-\mu^2}{2L^2}$, откуда $L = \frac{\mu}{\sqrt{-2\mathcal{E}}}$ или $L = \sqrt{\mu a}$. В то же время $G = \sqrt{\mu p} = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}$. Обобщенная координата l , сопряженная с импульсом L , совпадает со средней аномалией. Действительно,

$$l = \frac{\partial F}{\partial L} = \frac{\mu^2}{L^3}(t - t_\pi) = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - t_\pi)$$

(сравни с (16)). Переменные l , L , g и G называются переменными Делоне [5]. В этих переменных уравнения движения записываются так:

$$\dot{g} = \frac{\partial H}{\partial G}, \quad \dot{G} = -\frac{\partial H}{\partial g} = 0, \quad \dot{l} = \frac{\partial H}{\partial L}, \quad \dot{L} = -\frac{\partial H}{\partial l},$$

при этом функция Гамильтона $H = \mathcal{H}' + \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{-\mu^2}{2L^2} + \mathcal{H}'$ или

$$H = H_0 + \frac{1}{c^2} H_1 + O(c^{-4}), \quad H_0 = -\frac{\mu^2}{2L^2}, \quad H_1 = -\left(\frac{\mu^4}{8L^4} - \frac{2\mu^3}{L^2 r} + \frac{4\mu^2}{r^2} - \frac{G^2\mu}{r^3} \right) \quad (19)$$

(см. выражение (18)). Координата r является функцией переменных G , L и l .

Выполняя заключительное каноническое преобразование, переходим к переменным l' , L' , g' и G' , которые отличаются от l , L , g и G лишь поправочными членами, содержащими параметр c^{-2} (преобразование такого типа рассматривалось в работе [6]). Для этого используем производящую функцию

$$\Phi(L', G', l, g) = L'l + G'g + \frac{1}{c^2} \Phi_1 + O(c^{-4}), \quad (20)$$

не зависящую явно от времени, а новую функцию Гамильтона H' , как и старую H , представляем в виде разложения

$$H' = H'_0 + \frac{1}{c^2} H'_1 + O(c^{-4}). \quad (21)$$

Кроме того, выбираем $H'_0 = \frac{-\mu^2}{2L'^2}$. Имеем

$$L = \frac{\partial \Phi}{\partial l} = L' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial l} + O(c^{-4}), \quad H_0 - H'_0 = -\frac{\mu^2}{2L'^2} + \frac{\mu^2}{2L'^2} \approx \frac{\mu^2}{L'^3} (L - L') = \frac{\mu^2}{c^2 L'^3} \frac{\partial \Phi_1}{\partial l}. \quad (22)$$

Подставляя (19) и (21) в соотношение $H' = H$, с учетом (22) в рассматриваемом приближении получаем

$$\frac{\mu^2}{L'^3} \frac{\partial \Phi_1}{\partial l} - \left(\frac{\mu^4}{8L'^4} - \frac{2\mu^3}{L'^2 r} + \frac{4\mu^2}{r^2} - \frac{G'^2 \mu}{r^3} \right) = H'_1. \quad (23)$$

От средней аномалии l в круглых скобках не зависит лишь первое слагаемое, и оно может быть отнесено к H'_1 . Остальные слагаемые зависят от l (через r) и относятся к $\frac{\partial \Phi_1}{\partial l}$. Таким образом, выражения (20) и (21) принимают вид

$$\Phi = L'l + G'g + \frac{1}{c^2} \int dl \left(-\frac{2L'\mu}{r} + \frac{4L'^3}{r^2} - \frac{L'^3 G'^2}{\mu r^3} \right) + O(c^{-4}), \quad (24)$$

$$H' = -\frac{\mu^2}{2L'^2} - \frac{\mu^4}{8c^2 L'^4} + O(c^{-4}).$$

Примечательно, что функция Гамильтона H' зависит только от переменной L' . Это означает, что L' , g' и G' – интегралы движения. Для l' имеем

$$i' = \frac{\partial H'}{\partial L'} = \frac{\mu^2}{L'^3} + \frac{\mu^4}{2c^2 L'^5}, \quad l' = l'_0 + \left(\frac{\mu^2}{L'^3} + \frac{\mu^4}{2c^2 L'^5} \right) t, \quad (25)$$

где l'_0 – постоянная интегрирования (значение l' в нулевой момент времени), которая является еще одним интегралом движения. Гамильтоновы уравнения движения проинтегрированы полностью.

Остается найти взаимосвязи величин l' , L' , g' и G' с переменными Делоне, используя производящую функцию Φ (см. (24)). Рассчитывая интеграл $\int \frac{dl}{r}$ в (24), удобно заменить переменную l на эксцентриситетную аномалию E , записав $dl = (1 - e \cos E) dE$. В интегралах же $\int \frac{dl}{r^2}$ и $\int \frac{dl}{r^3}$ переходим к дифференциалу истинной аномалии f :

$$dl = \frac{(1 - e \cos E)^2}{\sqrt{1 - e^2}} df = \frac{r^2}{a^2 \sqrt{1 - e^2}} df = \frac{L}{G} \frac{r^2}{a^2} df = \frac{\mu^2}{GL^3} r^2 df.$$

Тогда

$$\int \frac{dl}{r} = \frac{E}{a} = \frac{\mu}{L^2} E, \quad \int \frac{dl}{r^2} = \frac{\mu^2}{GL^3} f, \quad \int \frac{dl}{r^3} = \frac{\mu^3}{G^3 L^3} (f + e \sin f),$$

и с учетом того, что $L = L' + O(c^{-2})$ и $G = G' + O(c^{-2})$, производящая функция принимает вид

$$\Phi = L'l + G'g + \frac{\mu^2}{c^2} \left(-\frac{2E}{L'} + \frac{3f}{G'} - \frac{e}{G'} \sin f \right) + O(c^{-4}). \quad (26)$$

Обобщенные координаты l' и g' получаются при дифференцировании Φ по обобщенным импульсам L' и G' соответственно. При нахождении производных следует учитывать, что от переменных L и G зависят аномалии E и f , которые выражаются через эти переменные посредством эксцентриситета

$e = \sqrt{1 - \frac{G^2}{L^2}}$. Очевидно, что $\frac{\partial e}{\partial L} = \frac{G^2}{eL^3}$ и $\frac{\partial e}{\partial G} = \frac{-G}{eL^2}$. В то же время из уравнений (16) и (17) несложно установить, что

$$\frac{\partial E}{\partial e} = \frac{\sin f}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{L}{G} \sin f, \quad \frac{\partial f}{\partial e} = \frac{2 + e \cos f}{1 - e^2} \sin f = \frac{L^2}{G^2} (2 + e \cos f) \sin f.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial L} &= \frac{\partial E}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial L} = \frac{G}{eL^2} \sin f, & \frac{\partial E}{\partial G} &= \frac{\partial E}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial G} = -\frac{1}{eL} \sin f, \\ \frac{\partial f}{\partial L} &= \frac{\partial f}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial L} = \frac{1}{eL} (2 + e \cos f) \sin f, & \frac{\partial f}{\partial G} &= \frac{\partial f}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial G} = -\frac{1}{eG} (2 + e \cos f) \sin f.\end{aligned}\quad (27)$$

Дифференцируя Φ из (26) по L' , имеем

$$l' = \frac{\partial \Phi}{\partial L'} = l + \frac{\mu^2}{c^2} \left(\frac{2E}{L'^2} - \frac{2}{L'} \frac{\partial E}{\partial L'} + \frac{3}{G'} \frac{\partial f}{\partial L'} - \frac{1}{G'} \frac{\partial e}{\partial L'} \sin f - \frac{e}{G'} \frac{\partial f}{\partial L'} \cos f \right) + O(c^{-4}).$$

Принимая во внимание уравнение Кеплера в виде $E = l + \frac{\mu e r \sin f}{GL}$ и то, что $\frac{\partial \{e, E, f\}}{\partial L'} = \frac{\partial \{e, E, f\}}{\partial L} + O(c^{-2})$, с учетом формул (25) и (27) получаем выражение для средней аномалии:

$$\begin{aligned}l &= l_0'' + \frac{\mu^2}{L'^3} \left(1 - \frac{3\mu^2}{2c^2 L'^2} \right) t - \\ &- \frac{\mu^2}{c^2 G' L'} \left[\left(\frac{3}{e} + \frac{3}{e} \left(1 - \frac{G'^2}{L'^2} \right) - \frac{e}{4} + \frac{2\mu}{L'^2} e r \right) \sin f + \frac{1}{2} \sin 2f - \frac{e}{4} \sin 3f \right] + O(c^{-4}),\end{aligned}\quad (28)$$

где вместо постоянной l_0' введена постоянная $l_0'' = l_0' \left(1 - \frac{2\mu^2}{c^2 L'^2} \right)$. Дифференцирование Φ из (26) по G' с учетом $g' = \frac{\partial \Phi}{\partial G'}$ дает следующий результат для оскулирующего аргумента перицентра:

$$g = g' + \frac{\mu^2}{c^2 G'^2} \left[3f + \left(\frac{3}{e} + \frac{3}{e} \left(1 - \frac{G'^2}{L'^2} \right) - \frac{5e}{4} \right) \sin f + \frac{1}{2} \sin 2f - \frac{e}{4} \sin 3f \right] + O(c^{-4}).\quad (29)$$

Далее, так как $L = \frac{\partial \Phi}{\partial l}$, то

$$L = L' + \frac{1}{c^2} \left(-\frac{2L'\mu}{r} + \frac{4L'^3}{r^2} - \frac{L'^3 G'^2}{\mu r^3} \right) + O(c^{-4})\quad (30)$$

(см. (24)). Наконец, ни одно из заключенных в круглые скобки слагаемых в выражении (26) не зависит от g , поэтому $G = \frac{\partial \Phi}{\partial g} = G'$.

Отметим, что в формулах (28) и (29) можно воспользоваться заменой $\frac{3 \left(1 - \frac{G'^2}{L'^2} \right)}{e} = 3e + O(c^{-2})$. Кроме того, наличие слагаемых $\frac{3}{e}$ в этих формулах, казалось бы, указывает на их неприменимость для круговых орбит с нулевыми эксцентриситетами. Однако для таких орбит различие между средней, эксцентриситетской и истинной аномалиями исчезает, и в выражении для угловой переменной $\varphi = f + g = l + g$ соответствующие расходимости при $e \rightarrow 0$ сокращаются.

Обсудим полученные результаты. В отличие от кеплеровой задачи средняя аномалия согласно (28) не только линейно зависит от времени, но и испытывает периодические изменения, определяемые тригонометрическими функциями от истинной аномалии f . Для аргумента перицентра характерны как периодические изменения, так и вековой уход, связанный с наличием в выражении (29) линейного по f члена. За один оборот истинная аномалия увеличивается на $\Delta f = 2\pi$, поэтому для смещения перицентра получаем хорошо известную формулу

$$\Delta g = \frac{3\mu^2}{c^2 G'^2} \Delta f = \frac{6\pi\mu^2}{c^2 G^2} = \frac{6\pi\mu}{c^2 p} = \frac{6\pi k M}{c^2 a (1 - e^2)}$$

(см. [1–3]). Элемент орбиты $L = \sqrt{\mu a}$ и связанный с ним размер большой полуоси a в соответствии с (30) подвержены только периодическим изменениям из-за зависимости от периодически изменяющейся координаты r . Наконец, элемент орбиты $G = \sqrt{\mu p}$ и связанный с ним фокальный параметр p в рассматриваемом приближении остаются неизменными.

Расчетная схема движения пробной частицы

Основываясь на полученных результатах, изложим схему расчета положения пробной частицы $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ в произвольный момент времени в приближении c^{-2} при начальных условиях

$$r(0) = r_0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{r}(0) = \dot{r}_0, \quad \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0. \quad (31)$$

Она будет состоять в нахождении оскулирующих кеплеровых элементов в начальный момент времени, в определении интегралов движения l_0'' , L' , g' и G' , в построении итерационных приближений кеплеровых элементов для момента времени t и в обратном переходе к переменным r и φ .

Интеграл движения G' рассчитывается сразу же согласно (9):

$$G' = G = p_\varphi = r_0^2 \dot{\varphi}_0 + \frac{r_0^2 \dot{\varphi}_0}{2c^2} \left(\dot{r}_0^2 + r_0^2 \dot{\varphi}_0^2 + \frac{2\mu}{r_0} \right). \quad (32)$$

Тогда фокальный параметр $p = \frac{G^2}{\mu}$, и для начального момента времени имеем

$$p_{r0} = \dot{r}_0 + \frac{\dot{r}_0}{c^2} \left[\frac{3\mu}{r_0} + \frac{1}{2} (\dot{r}_0^2 + r_0^2 \dot{\varphi}_0^2) \right], \quad \mathcal{E}_0 = \frac{p_{r0}^2}{2} + \frac{G^2}{2r_0^2} - \frac{\mu}{r_0}, \quad a_0 = -\frac{\mu}{2\mathcal{E}_0}, \quad e_0 = \sqrt{1 - \frac{p}{a_0}}. \quad (33)$$

По эксцентрической аномалии

$$E_0 = \operatorname{sgn} \dot{r}_0 \arccos \left[\frac{1}{e_0} \left(1 - \frac{r_0}{a_0} \right) \right], \quad (34)$$

где $\operatorname{sgn} \dot{r}_0$ – знак величины \dot{r}_0 , находятся начальные значения средней и истинной аномалий, а также аргумента перигелла:

$$l_0 = E_0 - e_0 \sin E_0, \quad f_0 = 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1+e_0}{1-e_0}} \operatorname{tg} \frac{E_0}{2} \right), \quad g_0 = \varphi_0 - f_0. \quad (35)$$

В соответствии с (28)–(30) рассчитываем оставшиеся интегралы движения, при этом вместо интеграла L' удобнее использовать $a' = \frac{L'^2}{\mu}$:

$$l_0'' = l_0 + \frac{\mu}{c^2 a_0 \sqrt{1-e_0^2}} \left[\left(\frac{3}{e_0} + \frac{11e_0}{4} + \frac{2e_0 r_0}{a_0} \right) \sin f_0 + \frac{1}{2} \sin 2f_0 - \frac{e_0}{4} \sin 3f_0 \right],$$

$$g' = g_0 - \frac{\mu}{c^2 a_0 (1-e_0^2)} \left[3f_0 + \left(\frac{3}{e_0} + \frac{7e_0}{4} \right) \sin f_0 + \frac{1}{2} \sin 2f_0 - \frac{e_0}{4} \sin 3f_0 \right], \quad (36)$$

$$a' = a_0 + \frac{2\mu}{c^2} \left(\frac{2a_0}{r_0} - \frac{4a_0^2}{r_0^2} + \frac{a_0^3 (1-e_0^2)}{r_0^3} \right).$$

Переходим к определению местоположения пробной частицы в произвольный момент времени t . К этому моменту согласно (28) средняя аномалия получает линейную по времени часть приращения

$$\Delta l = \sqrt{\frac{\mu}{a'^3}} \left(1 - \frac{3}{2c^2} \frac{\mu}{a'} \right) t. \quad (37)$$

Решив уравнение Кеплера $l^{(0)} = l_0 + \Delta l = E^{(0)} - e_0 \sin E^{(0)}$ относительно $E^{(0)}$, вычисляем затравочные значения радиальной координаты и истинной аномалии к моменту t :

$$r^{(0)} = a_0 \left(1 - e_0 \cos E^{(0)} \right), \quad f^{(0)} = 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1+e_0}{1-e_0}} \operatorname{tg} \frac{E^{(0)}}{2} \right). \quad (38)$$

Далее эти значения уточняются согласно итерационной процедуре ($j = 0, 1, 2, \dots, n - 1$, где n – номер конечной итерации):

$$l^{(j+1)} = l_0'' + \Delta l - \frac{\mu}{c^2 a^{(j)} \sqrt{1 - e^{(j)2}}} \left[\left(\frac{3}{e^{(j)}} + \frac{11e^{(j)}}{4} + \frac{2e^{(j)} r^{(j)}}{a^{(j)}} \right) \sin f^{(j)} + \frac{1}{2} \sin 2f^{(j)} - \frac{e^{(j)}}{4} \sin 3f^{(j)} \right],$$

$$a^{(j+1)} = a' - \frac{2\mu}{c^2} \left(\frac{2a^{(j)}}{r^{(j)}} - \frac{4a^{(j)2}}{r^{(j)2}} + \frac{a^{(j)3} (1 - e^{(j)2})}{r^{(j)3}} \right), \quad e^{(j+1)} = \sqrt{1 - \frac{P}{a^{(j+1)}}}, \quad (39)$$

$$r^{(j+1)} = a^{(j+1)} (1 - e^{(j+1)} \cos E^{(j+1)}), \quad f^{(j+1)} = 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1 + e^{(j+1)}}{1 - e^{(j+1)}}} \operatorname{tg} \frac{E^{(j+1)}}{2} \right).$$

Здесь $E^{(j+1)}$ – решение уравнения $l^{(j+1)} = E^{(j+1)} - e^{(j+1)} \sin E^{(j+1)}$, а $a^{(0)} = a_0$ и $e^{(0)} = e_0$. После n итераций переходим к вычислению аргумента перигея:

$$g^{(n)} = g' + \frac{\mu}{c^2 a^{(n)} (1 - e^{(n)2})} \times$$

$$\times \left[3(f^{(n)} + 2\pi q) + \left(\frac{3}{e^{(n)}} + \frac{7e^{(n)}}{4} \right) \sin f^{(n)} + \frac{1}{2} \sin 2f^{(n)} - \frac{e^{(n)}}{4} \sin 3f^{(n)} \right]. \quad (40)$$

Здесь q – целая часть величины $\frac{\Delta l}{2\pi}$, т. е. количество полных циклов по 2π радиан в приращении средней аномалии.

В качестве вычисленных значений радиальной и угловой координат можно принять $r = r(t) \approx r^{(n)}$ и $\varphi = \varphi(t) \approx \varphi^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$. Приведенная вычислительная схема немногим сложнее точного решения стандартной кеплеровой задачи, которое будет получаться в предельном случае $c \rightarrow \infty$. Кеплерово решение следует из формул (32)–(35), а также из формул (37) и (38) при $a' = a_0$, при этом $r = r(t) = r^{(0)}$ и $\varphi = \varphi(t) = f^{(0)} + g_0$.

Сравнение с точными решениями

Оценим погрешность найденных решений, сравнивая их с точными решениями, полученными из уравнений (4) (при $m = 1$). При этом для численного решения вместо (4) далее удобно использовать эквивалентную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{r} = \pm c \left(1 - \frac{2\mu}{c^2 r} \right) \sqrt{1 - \frac{c^4}{E^2} \left(1 - \frac{2\mu}{c^2 r} \right) \left(1 + \frac{G^2}{c^2 r^2} \right)}, \quad \dot{\varphi} = \frac{c^2 G}{E r^2} \left(1 - \frac{2\mu}{c^2 r} \right). \quad (41)$$

Принимая во внимание начальные условия (31), можно получить следующие выражения для G и E :

$$G = r_0^2 \dot{\varphi}_0 \left[1 - \frac{2\mu}{c^2 r_0} - \frac{r_0^2 \dot{\varphi}_0^2}{c^2} - \frac{c^{-2} \dot{r}_0^2}{1 - 2\mu c^{-2} r_0^{-1}} \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{E}{c^2} = \left(1 - \frac{2\mu}{c^2 r_0} \right) \left[1 - \frac{2\mu}{c^2 r_0} - \frac{r_0^2 \dot{\varphi}_0^2}{c^2} - \frac{c^{-2} \dot{r}_0^2}{1 - 2\mu c^{-2} r_0^{-1}} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (42)$$

Легко убедиться в том, что ранее рассматривавшийся момент импульса G (см. (32)) с точностью до членов, содержащих c^{-2} , совпадает с G в (42).

Для того чтобы устранить неоднозначность, связанную с выбором знака в первом дифференциальном уравнении из (41), проинтегрируем обе части этого уравнения по t . После несложных выкладок получаем окончательную систему уравнений

$$\ddot{r} = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2\mu}{c^2 r} \right) \left\{ -\mu \left(\frac{3c^4}{E^2} - 2 \right) + \frac{c^4}{E^2} \left[\left(G^2 + \frac{6\mu^2}{c^2} \right) \frac{1}{r} - \frac{7G^2\mu}{c^2 r^2} + \frac{10G^2\mu^2}{c^4 r^3} \right] \right\},$$

$$\dot{\phi} = \frac{c^2 G}{E r^2} \left(1 - \frac{2\mu}{c^2 r} \right),$$
(43)

где G и E рассчитываются по формулам (42), первое уравнение следует дополнить начальными условиями $r(0) = r_0$ и $\dot{r}(0) = \dot{r}_0$, а второе – начальным условием $\phi(0) = \phi_0$. При переходе к ньютонову пределу $c \rightarrow \infty$ и $\frac{E}{c^2} \rightarrow 1$, и уравнения принимают вид $\ddot{r} = \frac{-\mu}{r^2} + \frac{G^2}{r^3}$, $\dot{\phi} = \frac{G}{r^2}$, где $G = r_0^2 \dot{\phi}_0$.

При численном решении системы (43) будем использовать безразмерные переменные, выражая расстояния в единицах r_0 , а время – в единицах $\sqrt{\frac{r_0^3}{\mu}}$. Тогда в (42) и (43) можно принять $\mu = 1$, а также $c^{-2} = \frac{r_g}{2}$. Кроме начального условия $r(0) = r_0 = 1$, не теряя общности, возьмем $\phi(0) = \phi_0 = 0$ и $\dot{r}(0) = \dot{r}_0 = 0$ (в начальный момент радиальная скорость нулевая). Наконец, значение $\dot{\phi}_0$ выбираем в интервале от 1 до $\sqrt{2}$, что в ньютоновом пределе означает изменение эксцентриситета $e = |\dot{\phi}_0^2 - 1|$ от 0 до 1, а большой полуоси $a = \frac{1}{2 - \dot{\phi}_0^2}$ от 1 до ∞ .

На рис. 1 показана орбита пробной частицы, найденная в результате численного решения точных уравнений (43) при $r_g = 2 \cdot 10^{-3}$ и $\dot{\phi}_0 = 1,180$ (что соответствует эксцентриситету 0,40) и изменении t в промежутке от 0 до 670. За указанный промежуток времени частица совершает 50 полных оборотов вокруг тяготеющего центра. При тех же начальных условиях получено также приближенное решение по формулам (32)–(40), причем для его сходимости оказалось достаточно одной итерации согласно (39). Соответствующий этому решению график не приводится, поскольку он визуально неотличим от изображенного на рис. 1. Наглядное представление о зависимости оскулирующих элементов орбиты – большой полуоси a и аргумента перигея g – от времени можно получить из рис. 2 и 3 соответственно. Фокальный параметр, как отмечалось ранее, остается постоянным, а его значение (p) в данном случае составляет 1,397.

Эксцентриситет $e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}}$ при этом периодически изменяется от 0,393 до 0,397.

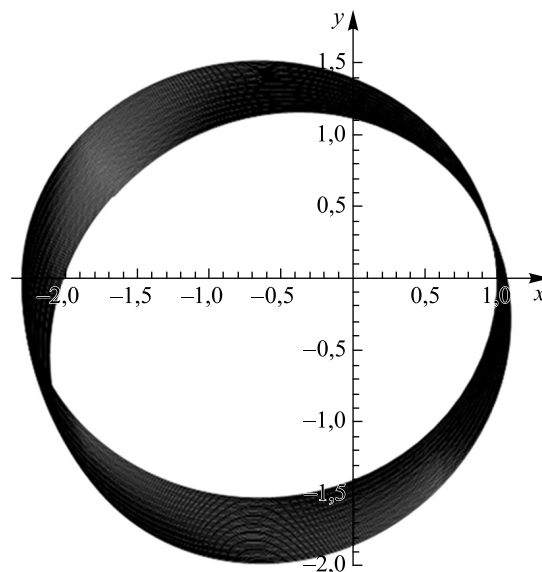


Рис. 1. Орбита частицы при $r_g = 0,002$ и эксцентриситете $e = 0,40$, рассчитанная точно по формулам (43) и приближенно по формулам (32)–(40)
 Fig. 1. Particle orbit at $r_g = 0,002$ and eccentricity $e = 0,40$ calculated exactly by formulas (43) and approximately by formulas (32)–(40)

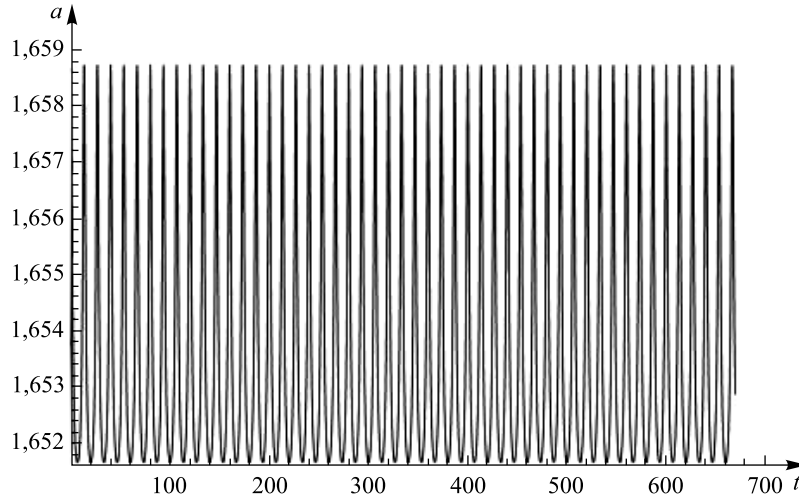


Рис. 2. Зависимость большой полуоси орбиты от времени
Fig. 2. Time dependence of the semi-major axis of the orbit

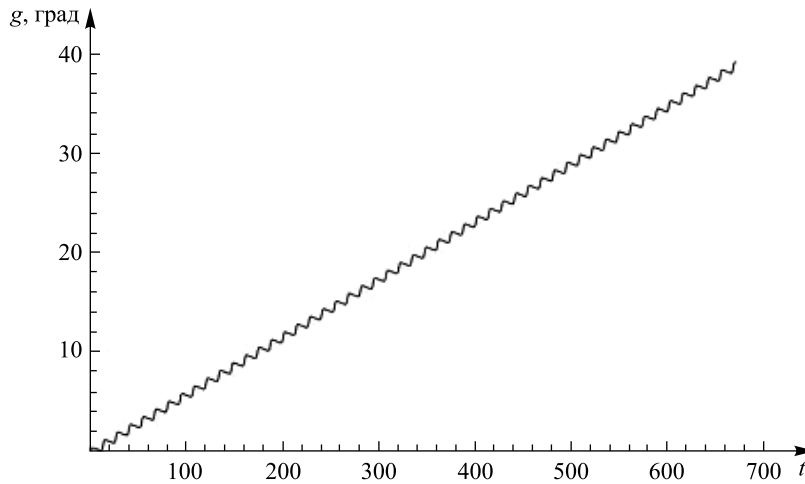


Рис. 3. Зависимость аргумента перигея орбиты от времени
Fig. 3. Time dependence of the argument of the periastron of the orbit

В качестве меры различия приближенного и точного решений рассматривается погрешность определения положения частицы

$$d(t) = \sqrt{\left[r(t) \cos \varphi(t) - r^{(1)}(t) \cos \varphi^{(1)}(t) \right]^2 + \left[r(t) \sin \varphi(t) - r^{(1)}(t) \sin \varphi^{(1)}(t) \right]^2} \quad (44)$$

(рис. 4). Погрешность имеет как вековой уход, так и периодические изменения и достигает значения 0,048. При этом локальные максимумы d соответствуют прохождению частицы через перигей.

При других значениях радиуса Шварцшильда вид кривой для d не претерпевает существенных изменений. Однако при $r_g = 2 \cdot 10^{-4}$ погрешность достигает величины $4,5 \cdot 10^{-4}$, а при $r_g = 2 \cdot 10^{-5}$ – всего лишь $4,5 \cdot 10^{-6}$. Таким образом, она прямо пропорциональна квадрату радиуса Шварцшильда. Это означает то, что расхождение приближенного и точного решений практически целиком обусловлено неучтенными поправками порядка c^{-4} (см. формулу (8) и далее).

При фиксированном r_g точность приближенных решений существенно зависит от эксцентриситета и снижается при его увеличении. Если $r_g = 2 \cdot 10^{-4}$, то при $e = 0,40$ погрешность, как указывалось выше, достигает значения $4,5 \cdot 10^{-4}$. В то же время при $e = 0,10$ ($\dot{\varphi}_0 = 1,049$) в промежутке $t \in (0, 670)$ имеем максимальную погрешность $7 \cdot 10^{-5}$, при $e = 0,60$ ($\dot{\varphi}_0 = 1,265$) – $1,2 \cdot 10^{-3}$, а при $e = 0,80$ ($\dot{\varphi}_0 = 1,342$) – $5,4 \cdot 10^{-3}$.

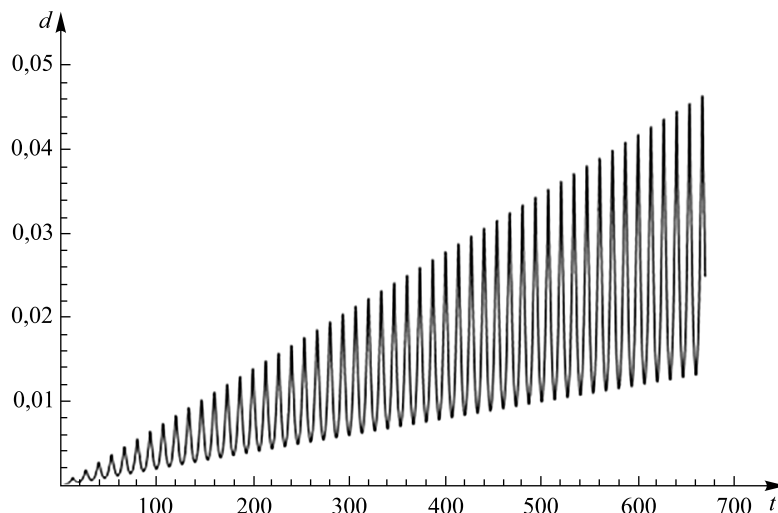


Рис. 4. Погрешность определения положения частицы (см. формулу (44))
 Fig. 4. Error in determining the position of the particle (see formula (44))

Используя решения точных уравнений (43), можно установить максимальные значения радиуса Шварцшильда, при которых достигается заданная погрешность приближенных решений в (32)–(40). В таблице приведены соответствующие результаты для r_g в случае, когда погрешность не должна превышать 0,01 для первых 50 оборотов пробной частицы. При выборе другой погрешности представленные значения легко пересчитываются с учетом ее квадратичной зависимости от r_g .

Значения радиуса Шварцшильда r_g , при которых погрешность решений в (32)–(40) не превышает 0,01 для первых 50 оборотов пробной частицы

Values of the Schwarzschild radius r_g at which the error of solutions in (32)–(40) does not exceed 0.01 for the first 50 rotations of the test particle

Эксцентриситет e	Максимальное значение r_g	Эксцентриситет e	Максимальное значение r_g
0,1	$3,0 \cdot 10^{-3}$	0,6	$4,1 \cdot 10^{-4}$
0,2	$1,9 \cdot 10^{-3}$	0,7	$2,4 \cdot 10^{-4}$
0,3	$1,3 \cdot 10^{-3}$	0,8	$1,2 \cdot 10^{-4}$
0,4	$9,3 \cdot 10^{-4}$	0,9	$3,4 \cdot 10^{-5}$
0,5	$6,3 \cdot 10^{-4}$		

В заключение отметим, что полученные в работе аналитические соотношения, определяющие финитное движение пробной частицы в метрике Шварцшильда с точностью до членов порядка c^{-2} , сравнительно просты. Расчеты по ним, касающиеся определения положения частицы в конкретный момент времени, могут быть выполнены с помощью простейшей вычислительной техники. В расчетной схеме, представленной формулами (32)–(40), как правило, достаточно использовать одну итерацию в соответствии с уравнениями (39).

Дальнейшее уточнение приближенных решений связано с учетом поправок более высокого порядка c^{-4} . Для этого достаточно применения тех же приемов интегрирования уравнений движения, что рассматривались в настоящей работе.

Библиографические ссылки

1. Мизнер Ч, Торн К, Уилер Дж. *Гравитация. Том 2*. Полнарев АГ, переводчик. Москва: Мир; 1977. 527 с.
2. Ландау ЛД, Лифшиц ЕМ. *Теория поля*. Москва: Наука; 1973. 504 с.
3. Зельманов АЛ, Агаков ВГ. *Элементы общей теории относительности*. Москва: Наука; 1989. 240 с.
4. Hagihara Y. Theory of the relativistic trajectories in a gravitational field of Schwarzschild. *Japanese Journal of Astronomy and Geophysics*. 1931;8:67–176.
5. Дубошин ГН. *Небесная механика. Основные задачи и методы*. 2-е издание. Москва: Наука; 1968. 800 с.
6. Brouwer D. Solution of the problem of artificial satellite theory without drag. *Astronomical Journal*. 1959;64(1274):378–396.

References

1. Misner CW, Thorne KS, Wheeler JA. *Gravitation. Volume 2*. San Francisco: W. H. Freeman and Company; 1973. 1278 p. Russian edition: Misner C, Thorne K, Wheeler J. *Gravitatsiya. Tom 2*. Polnarev AG, translator. Moscow: Mir; 1977. 527 p.
2. Landau LD, Lifshits EM. *Teoriya polya* [The classical theory of fields]. Moscow: Nauka; 1973. 504 p. Russian.
3. Zel'manov AL, Agakov VG. *Elementy obshchei teorii otositel'nosti* [Elements of general theory of relativity]. Moscow: Nauka; 1989. 240 p. Russian.
4. Hagihara Y. Theory of the relativistic trajectories in a gravitational field of Schwarzschild. *Japanese Journal of Astronomy and Geophysics*. 1931;8:67–176.
5. Duboshin GN. *Nebesnaya mekhanika. Osnovnye zadachi i metody* [Celestial mechanics. Basic problems and methods]. 2nd edition. Moscow: Nauka; 1968. 800 p. Russian.
6. Brouwer D. Solution of the problem of artificial satellite theory without drag. *Astronomical Journal*. 1959;64(1274):378–396.

Получена 07.05.2023 / исправлена 30.06.2023 / принята 20.07.2023.
Received 07.05.2023 / revised 30.06.2023 / accepted 20.07.2023.