УДК 537.877

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НЕОДНОРОДНЫМИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫМИ БИАНИЗОТРОПНЫМИ ОБЪЕКТАМИ

А. В. НОВИЦКИЙ [1), 2)], ***Р. Х. АЛЬВАРЕС РОДРИГЕС*** [1)], ***В. М. ГАЛЫНСКИЙ*** [1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*
[2)]*Институт фотоники Технического университета Дании, ул. Эрстеда, 343, 2800, г. Конгенс Люнгбю, Дания*

Применен операторный подход к определению электрического и магнитного полей волн, распространяющихся в радиально-неоднородных цилиндрически-симметричных бианизотропных средах. Для волн в плоскости сечения цилиндра возможно построить произвольное аналитическое решение уравнений Максвелла, если неоднородный материал бианизотропный или анизотропный, но не биизотропный или изотропный. Найдены решения в виде цилиндрических волн Лежандра и определены соответствующие им материальные параметры сред. Теория рассеяния обобщена на случай неоднородных цилиндрических частиц и применена к неоднородным объектам, в которых распространяются электромагнитные волны Лежандра.

Ключевые слова: распространение электромагнитных волн; метаматериалы; рассеяние света.

Благодарность. Авторы благодарят Белорусский республиканский фонд фундаментальных исследований (грант № Ф16Р-049) за финансовую поддержку.

ELECTROMAGNETIC WAVE SCATTERING BY INHOMOGENEOUS CYLINDRICALLY SYMMETRIC BIANISOTROPIC OBJECTS

A. V. NOVITSKY [a, b], ***R. J. ALVAREZ RODRIGUEZ*** [a], ***V. M. GALYNSKY*** [a]

[a]*Belarusian State University, Niezaliežnasci Avenue, 4, 220030, Minsk, Belarus*
[b]*DTU Fotonik, Technical University of Denmark, Ørsteds Plads, 343, 2800, Kgs. Lyngby, Denmark*
Corresponding author: V. M. Galynsky (galynsky@bsu.by)

Operator approach is elaborated for determining electric and magnetic fields of the waves propagating in radially inhomogeneous cylindrically symmetric bianisotropic media. For the waves in the cylinder cross-section it is feasible to derive any closed-form solution of the Maxwell equations provided inhomogeneous materials are bianisotropic or anisotropic,

Образец цитирования:
Новицкий А. В., Родригес Р. Х. Альварес, Галынский В. М. Рассеяние электромагнитных волн неоднородными цилиндрически-симметричными бианизотропными объектами // Журн. Белорус. гос. ун-та. Физика. 2017. № 3. С. 41–49.

For citation:
Novitsky A. V., Rodriguez R. J. Alvarez, Galynsky V. M. Electromagnetic wave scattering by inhomogeneous cylindrically symmetric bianisotropic objects. *J. Belarus. State Univ. Phys.* 2017. No. 3. P. 41–49 (in Russ.).

Авторы:
Андрей Викторович Новицкий – доктор физико-математических наук, доцент; профессор кафедры теоретической физики и астрофизики физического факультета[1)]; старший научный сотрудник лаборатории метаматериалов[2)].
Ричард Хосе Альварес Родригес – аспирант кафедры теоретической физики и астрофизики физического факультета. Научный руководитель – А. В. Новицкий.
Владимир Михайлович Галынский – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры теоретической физики и астрофизики физического факультета.

Authors:
Andrey Novitsky, doctor of science (physics and mathematics), docent; professor at the department of theoretical physics and astrophysics, faculty of physics[a]; senior researcher at the metamaterials group[b].
novitsky@bsu.by
Richard Jose Alvarez Rodriguez, postgraduate student at the department of theoretical physics and astrophysics, faculty of physics.
richardfby@gmail.com
Vladimir Galynsky, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of theoretical physics and astrophysics, faculty of physics.
galynsky@bsu.by

but not biisotropic or isotropic. In this paper we find the particular solutions in the form of the Legendre cylindrical waves and determine the corresponding material parameters of the media. Scattering theory is generalized to the inhomogeneous cylindrical particles and applied to the inhomogeneous objects supporting Legendre electromagnetic waves.

Key words: propagation of electromagnetic waves; metamaterials; light scattering.

Acknowledgements. The authors acknowledge financial support from the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (grant No. F16R-049).

Введение

Распространение электромагнитных волн в однородных цилиндрах хорошо изучено и имеет множество приложений, связанных прежде всего с возбуждением волоконных мод [1–3] и рассеянием света [4–6]. В последние годы интерес также поддерживается оптикой метаматериалов [7–9] (искусственные периодические структуры), элементарными ячейками которых могут быть диэлектрические или металлические цилиндры. Волны в таком материале могут обладать гиперболической дисперсией [10]. Отметим, что для гиперболических метаматериалов характерен ряд необычных свойств, которые усиливают скорость спонтанного излучения и улучшают разрешающую способность линз [11–13].

Неоднородные круглые цилиндрические волокна используются уже давно [1–3]. Их неоднородность слабая, благодаря чему теоретический расчет может быть сделан с использованием приближенных методов, таких как метод Вентцеля – Крамерса – Бриллюэна (геометрическая оптика) и борновское приближение. Численные методы расчета не всегда обладают достаточной точностью и требуют больших вычислительных мощностей [14], но могут использоваться для анализа асимптотического рассеяния [15] или нахождения рассеянных полей в приближении дискретных диполей [16]. Точное аналитическое решение уравнений Максвелла в неоднородных анизотропных средах потребовалось недавно в связи с развитием так называемой трансформационной оптики [17; 18]. Следует, однако, признать, что подход трансформационной оптики ограничен средами определенного вида, тогда как общий подход к изучению волн в неоднородных средах по-прежнему отсутствует. В настоящей статье предложен метод получения решений, отличных от тех, которые рассматриваются в рамках трансформационной оптики. Важно, что неоднородные анизотропные цилиндрические структуры могут применяться в качестве волноводов и элементарных ячеек метаматериалов, обладающих выдающимися свойствами.

Цель настоящей работы – на основе операторного (матричного) метода построить пласт аналитических решений уравнений Максвелла для электромагнитных волн, распространяющихся в радиально-неоднородных цилиндрических материалах. Цель будет достигнута в результате решения задач, которые можно сформулировать следующим образом:

- найти новые аналитические решения для света в плоскости сечения неоднородного бианизотропного цилиндра;
- вывести условия, накладываемые на решения для анизотропных, биизотропных и изотропных сред;
- рассмотреть цилиндрические волны Лежандра в частном случае неоднородной анизотропной среды;
- решить задачу о рассеянии электромагнитных волн на неоднородной цилиндрической частице.

В работе широко используется операторный подход к электродинамике слоистых сред [19]. Операторный подход хорошо зарекомендовал себя в применении к планарным [20], цилиндрически-симметричным [21] и сферически-симметричным [22] структурам. Он позволяет рассчитать электромагнитные поля в многослойных бианизотропных средах и определить эволюционные операторы слоев и тензоры поверхностного импеданса. Знание этих величин делает операторный подход универсальным средством для расчета коэффициентов отражения и пропускания, рассеянных полей, волноводных и поверхностных мод в структурах различной геометрии.

Операторный подход для цилиндрически-симметричных сред

Рассмотрим цилиндрически-симметричную бианизотропную среду, тензоры диэлектрической ε и магнитной μ проницаемости и псевдотензоры гирации α и κ которой даются выражением $\xi(r) = \xi_r(r)\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \xi_\varphi(r)\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \xi_z(r)\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z$, где ξ принимает одно из значений ε, μ, α или κ; (r, φ, z) – цилиндрические координаты; $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$ и $\mathbf{e}_z$ – базисные векторы цилиндрической системы координат. Материальные уравнения бианизотропных сред связывают векторы индукции $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ с напряженностями $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ полей согласно $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} + \alpha\mathbf{H}$ и $\mathbf{B} = \mu\mathbf{E} + \kappa\mathbf{H}$. Таким образом, среда может быть диэлектриком, ферромагнетиком, металлом или метаматериалом. Пусть монохроматические электромагнитные пучки (ω – круговая частота) распространяются в плоскости (x, y), как показано на рис. 1. Это

значит, что волновые векторы парциальных плоских волн находятся в плоскости (x, y), а напряженности (а также индукции) электрического и магнитного полей равны $\mathbf{E}(r, \varphi, z, t) = \exp(im\varphi - i\omega t)\mathbf{E}(r)$ и $\mathbf{H}(r, \varphi, z, t) = \exp(im\varphi - i\omega t)\mathbf{H}(r)$ соответственно. Цель настоящей работы – поиск аналитических решений уравнений Максвелла в неоднородных цилиндрически-симметричных средах.

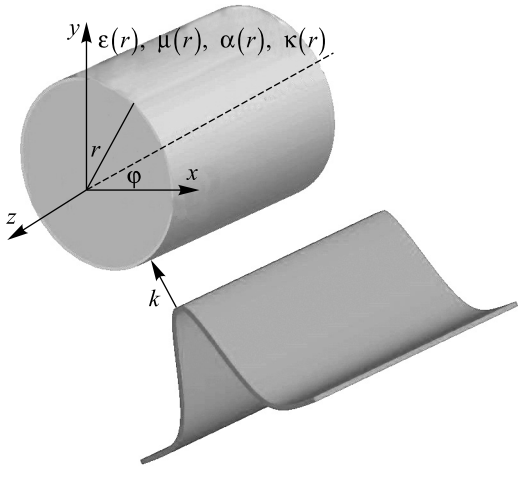


Рис. 1. Двумерная в плоскости (x, y) электромагнитная волна распространяется в неоднородной бианизотропной цилиндрически-симметричной среде

Fig. 1. Two-dimensional in (x, y) plane electromagnetic wave propagates in inhomogeneous bianisotropic cylindrically symmetric medium

Поскольку неизвестной осталась лишь функциональная зависимость от радиальной координаты, уравнения Максвелла можно переписать в виде обыкновенного дифференциального уравнения для вектора тангенциальных компонент **W** [21]:

$$\frac{d\mathbf{W}}{dr} = ik_0 M(r)\mathbf{W}(r),$$

где

$$M(r) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}(r) = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_t \\ \mathbf{E}_t \end{pmatrix},$$

$$A = \frac{i}{k_0 r}\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_r^\times \alpha I + \kappa_r \delta \frac{m^2}{k_0^2 r^2}\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_z, \quad B = \mathbf{e}_r^\times \varepsilon I + \varepsilon_r \delta \frac{m^2}{k_0^2 r^2}\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_z, \tag{1}$$

$$C = -\mathbf{e}_r^\times \mu I - \mu_r \delta \frac{m^2}{k_0^2 r^2}\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_z, \quad D = \frac{i}{k_0 r} I - \mathbf{e}_r^\times \kappa I - \alpha_r \delta \frac{m^2}{k_0^2 r^2}\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_z,$$

где $\delta = (\varepsilon_r \mu_r - \alpha_r \kappa_r)^{-1}$, $k_0 = \dfrac{\omega}{c}$, – волновое число в вакууме; $\mathbf{E}_t = I\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}_t = I\mathbf{H}$ – тангенциальные составляющие полей; $I = 1 - \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r$ – проектор на плоскость, перпендикулярную $\mathbf{e}_r$; $\mathbf{e}_r^\times$ – тензор, дуальный вектору $\mathbf{e}_r$ ($\mathbf{e}_r^\times \mathbf{a} = \mathbf{e}_r \mathbf{a}^\times = \mathbf{e}_r \times \mathbf{a}$) [19; 23]. Матрица $M(r)$ может быть записана согласно

$$M(r) = M^{(0)}(r) + \frac{M^{(1)}(r)}{r} + \frac{M^{(2)}(r)}{r^2}, \tag{2}$$

причем неоднородность среды задается зависимостью матриц $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, $M^{(2)}$ от координаты r, а степенная зависимость от r в (2) – следствие цилиндрической симметрии. $M^{(0)}$, $M^{(1)}$ и $M^{(2)}$ равны

$$M^{(0)}(r) = M_{\varphi z}^{(0)}(r)\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_z + M_{z\varphi}^{(0)}(r)\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\varphi, \quad M^{(1)} = \frac{i}{k_0}\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi, \quad M^{(2)}(r) = \frac{m^2}{k_0^2} M_{\varphi z}^{(2)}(r)\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_z,$$

где

$$M_{\varphi z}^{(0)} = \begin{pmatrix} -\alpha_z(r) & -\varepsilon_z(r) \\ \mu_z(r) & \kappa_z(r) \end{pmatrix}, \quad M_{z\varphi}^{(0)} = \begin{pmatrix} \alpha_\varphi(r) & \varepsilon_\varphi(r) \\ -\mu_\varphi(r) & -\kappa_\varphi(r) \end{pmatrix}, \quad M_{\varphi z}^{(2)} = \delta(r) \begin{pmatrix} \alpha_r(r) & \varepsilon_r(r) \\ -\mu_r(r) & -\kappa_r(r) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Перепишем систему уравнений (1) в виде дифференциального уравнения второго порядка для неизвестного двумерного вектора, образованного z-компонентами полей:

$$\frac{d^2}{dr^2}\begin{pmatrix} H_z \\ E_z \end{pmatrix} + \left(Q_1(r) + \frac{1}{r}\right)\frac{d}{dr}\begin{pmatrix} H_z \\ E_z \end{pmatrix} + \left(Q_2(r) + \frac{1}{r^2}Q_3(r)\right)\begin{pmatrix} H_z \\ E_z \end{pmatrix} = 0, \tag{4}$$

где двумерные матрицы Q_1, Q_2 и Q_3 выражаются через матрицы $M_{z\varphi}^{(0)}$, $M_{\varphi z}^{(0)}$ и $M_{\varphi z}^{(2)}$ следующим образом:

$$Q_1 = -\frac{dM_{z\varphi}^{(0)}}{dr} M_{z\varphi}^{(0)-1}, \quad Q_2 = k_0^2 M_{z\varphi}^{(0)} M_{\varphi z}^{(0)}, \quad Q_3 = m^2 M_{z\varphi}^{(0)} M_{\varphi z}^{(2)}. \tag{5}$$

Важно, что матрицы Q_1, Q_2 и Q_3 можно задать независимо друг от друга таким образом, чтобы получить желаемое аналитическое решение уравнения (4). В этом случае двумерные матрицы $M_{z\varphi}^{(0)}$, $M_{\varphi z}^{(0)}$ и $M_{\varphi z}^{(2)}$ выражаются с помощью соотношений, следующих из (5):

$$M_{z\varphi}^{(0)} = \exp'\left(-\int Q_1(r)\,dr\right) M_0, \quad M_{\varphi z}^{(0)} = k_0^{-2} M_{z\varphi}^{(0)-1} Q_2, \quad M_{\varphi z}^{(2)} = m^{-2} M_{z\varphi}^{(0)-1} Q_3, \tag{6}$$

где Q_3 нужно выбирать пропорциональным m^2, чтобы материальные параметры не зависели от целого числа m; M_0 – произвольная постоянная матрица; выражение $\exp'\left(-\int Q_1(r)\,dr\right)$ записано с учетом хронологического упорядочивания. Только в случае постоянных собственных векторов матрицы $Q_1 = \sum_{i=1}^{2} q_{1i}(r)\,\mathbf{a}_i \otimes \tilde{\mathbf{a}}_i$ получается обычная матричная экспонента

$$\exp'\left(-\int Q_1(r)\,dr\right) = \exp\left(-\int Q_1(r)\,dr\right) = \sum_{i=1}^{2} \exp\left(-\int q_{1i}(r)\,dr\right)\mathbf{a}_i \otimes \tilde{\mathbf{a}}_i,$$

где q_{1i} – собственные значения матрицы Q_1, $\mathbf{a}_i$ и $\tilde{\mathbf{a}}_i$ – правые и левые собственные векторы Q_1. Теперь найдем материальные тензоры среды, в которой распространяются искомые цилиндрические волны. Для известных матриц $M_{z\varphi}^{(0)}$, $M_{\varphi z}^{(0)}$ и $M_{\varphi z}^{(2)}$, задаваемых (6), определяем компоненты тензоров диэлектрической, магнитной проницаемостей и псевдотензоров гирации из соотношений (8):

$$\begin{aligned}
\varepsilon(r) &= \frac{\left(\boldsymbol{e}_1 M_{\varphi z}^{(2)} \boldsymbol{e}_2\right)}{\det\left(M_{\varphi z}^{(2)}\right)}\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \left(\boldsymbol{e}_1 M_{z\varphi}^{(0)} \boldsymbol{e}_2\right)\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi - \left(\boldsymbol{e}_1 M_{\varphi z}^{(0)} \boldsymbol{e}_2\right)\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z, \\
\mu(r) &= -\frac{\left(\boldsymbol{e}_2 M_{\varphi z}^{(2)} \boldsymbol{e}_1\right)}{\det\left(M_{\varphi z}^{(2)}\right)}\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r - \left(\boldsymbol{e}_2 M_{z\varphi}^{(0)} \boldsymbol{e}_1\right)\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \left(\boldsymbol{e}_2 M_{\varphi z}^{(0)} \boldsymbol{e}_1\right)\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z, \\
\alpha(r) &= \frac{\left(\boldsymbol{e}_1 M_{\varphi z}^{(2)} \boldsymbol{e}_1\right)}{\det\left(M_{\varphi z}^{(2)}\right)}\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \left(\boldsymbol{e}_1 M_{z\varphi}^{(0)} \boldsymbol{e}_1\right)\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi - \left(\boldsymbol{e}_1 M_{\varphi z}^{(0)} \boldsymbol{e}_1\right)\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z, \\
\kappa(r) &= -\frac{\left(\boldsymbol{e}_2 M_{\varphi z}^{(2)} \boldsymbol{e}_2\right)}{\det\left(M_{\varphi z}^{(2)}\right)}\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r - \left(\boldsymbol{e}_2 M_{z\varphi}^{(0)} \boldsymbol{e}_2\right)\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \left(\boldsymbol{e}_2 M_{\varphi z}^{(0)} \boldsymbol{e}_2\right)\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z,
\end{aligned} \tag{7}$$

где $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ – единичные вектор-столбцы $(1;\,0)$ и $(0;\,1)$ соответственно.

Далее, запишем тангенциальные компоненты векторов полей через известные решения уравнения (4):

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} H_z \\ E_z \end{pmatrix} \mathbf{e}_z + \begin{pmatrix} H_\varphi \\ E_\varphi \end{pmatrix} \mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} H_z \\ E_z \end{pmatrix} \mathbf{e}_z + M_{z\varphi}^{(0)-1} \frac{1}{ik_0} \frac{d}{dr} \begin{pmatrix} H_z \\ E_z \end{pmatrix} \mathbf{e}_\varphi. \quad (8)$$

Решение векторного уравнения (4) имеет четыре постоянных интегрирования, которые можно объединить в четырехмерный вектор-столбец **C** и представить (8) в виде [24]

$$\mathbf{W}(r) = S(r)\mathbf{C}, \quad S(r) = \begin{pmatrix} \eta_1(r) & \eta_2(r) \\ \zeta_1(r) & \zeta_2(r) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где матрицы $\eta_{1,2}$ и $\zeta_{1,2}$ задают два независимых решения для магнитного и электрического полей соответственно. Решение (9) может быть переписано в альтернативном виде:

$$\mathbf{W}(r) = \Omega(r, r_0)\mathbf{W}(r_0),$$

где $\Omega(r, r_0) = S(r)S^{-1}(r_0)$ – пространственный эволюционный оператор $\Omega(r, r_0)$ (матрица 4 × 4). Каждая из независимых волн характеризуется тензором импеданса $\Gamma_{1,2}(r) = \zeta_{1,2}(r)\eta_{1,2}^{-1}(r)$.

Решения для различных типов сред

Исследуем, каким образом модифицируется описанная выше теория, если искать решения для конкретного вида среды. Для того чтобы получить решения для анизотропных сред ($\alpha = \kappa = 0$), необходимо положить, что матрицы (3) имеют не общий вид матриц 2 × 2, а матриц с нулевыми элементами на диагоналях:

$$M_{\varphi z}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_z \\ \mu_z & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{z\varphi}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_\varphi \\ -\mu_\varphi & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{\varphi z}^{(2)} = \frac{1}{\varepsilon_r \mu_r} \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_r \\ -\mu_r & 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Это значит, что двумерные матрицы Q должны задаваться таким образом, чтобы согласно (6) обеспечить вид матриц (10). Довольно просто решение подобного вида получается для матриц Q, пропорциональных двумерной единичной матрице: $Q_1 = f(r)$, $Q_2 = k_2^0 g(r)$ и $Q_3 = m^2 h(r)$, где введенные скалярные функции произвольны. Тогда матрицы (6) принимают вид

$$M_{z\varphi}^{(0)} = e^{-\int f(r)dr} M_0, \quad M_{\varphi z}^{(0)} = g(r) e^{\int f(r)dr} M_0^{-1}, \quad M_{\varphi z}^{(2)} = h(r) e^{\int f(r)dr} M_0^{-1},$$

причем постоянная матрица M_0 должна быть выбрана таким образом, чтобы матрицы имели вид (10), т. е.

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & m_{12} \\ m_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad M_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{m_{21}} \\ \dfrac{1}{m_{12}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Скалярные функции позволяют задать произвольное уравнение второго порядка (4) для компонент полей, т. е. можно получить произвольное аналитическое решение для продольных полей в неоднородной анизотропной среде. Это не так для биизотропных (все материальные параметры – скаляры) и изотропных (проницаемости – скаляры, а псевдотензоры гирации равны нулю) сред. Действительно, в этом случае все матрицы $M_{\varphi z}^{(0)} = -M_{z\varphi}^{(0)} = -M_{\varphi z}^{(2)} \det(M) = M$ выражаются через одну матрицу M, а уравнение (4) нельзя задать произвольным образом, так как входящие в него матрицы оказываются связанными: $Q_1 = -\left(\dfrac{dM}{dr}\right) M^{-1}$, $Q_2 = -k_0^2 M^2$ и $Q_3 = \dfrac{m^2 M^2}{\det(M)}$. Необходимо модифицировать метод решения этой задачи, так как нельзя задать матрицы Q_1, Q_2 и Q_3 произвольным образом. Сначала зададим матрицу M, затем выразим через нее матрицы Q_1, Q_2 и Q_3 и подставим в (4). Представляя $M = \sum_{i=1}^{2} f_i(r)\mathbf{b}_i \otimes \tilde{\mathbf{b}}_i$ и $\begin{pmatrix} H_z \\ E_z \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{2} w_i(r)\mathbf{b}_i$, уравнение (4) сводится к паре связанных уравнений для $i = 1, 2$:

$$\frac{d^2 w_i}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{f_i'}{f_i}\right)\frac{dw_i}{dr} - \left(k_0^2 - \frac{m^2}{r^2 f_1 f_2}\right) f_i^2 w_i = 0. \tag{12}$$

В отличие от бианизотропных и анизотропных сред определение аналитических решений уравнения (12) для некоторой функции $f_i(r)$ является технически более сложной задачей. Упростить ее можно за счет выбора матрицы $M = f(r)$, пропорциональной единичной. Тогда вместо двух уравнений (12) получим одно уравнение, соответствующее $f_1(r) = f_2(r) = f(r)$.

Цилиндрические волны Лежандра

В данном разделе будут найдены поля цилиндрических волн в неоднородной бианизотропной среде, которые описываются не обычными цилиндрическими функциями Бесселя, а полиномами Лежандра. Для этого выберем матрицы Q_i ($i = 1, 2, 3$) в следующем виде:

$$Q_1 = \frac{\gamma}{2+\gamma r}, \quad Q_2 = \frac{\gamma k_0^2}{r(2+\gamma r)}\hat{q}_2, \quad Q_3 = \frac{m^2 \gamma r}{2+\gamma r}\hat{q}_3, \tag{13}$$

где γ – постоянный параметр с размерностью м$^{-1}$; $\hat{q}_2$ и $\hat{q}_3$ – размерная (м^2) и безразмерная постоянные матрицы 2×2. Отметим, что величина γ может быть как положительной, так и отрицательной, но будем считать, что $2 + \gamma r > 0$. Тогда уравнение (4) примет вид уравнения Лежандра

$$\frac{d^2}{dX^2}\begin{pmatrix} H_z \\ E_z \end{pmatrix} - \frac{2X}{1-X^2}\frac{d}{dX}\begin{pmatrix} H_z \\ E_z \end{pmatrix} + \frac{\hat{n}\left(\hat{n}+1\right)}{1-X^2}\begin{pmatrix} H_z \\ E_z \end{pmatrix} = 0, \tag{14}$$

где $X = 1 + \gamma r$, а $\hat{n}\left(\hat{n}+1\right) = \left(k_0^2 \hat{q}_2 + m^2 \hat{q}_3\right)$ – двумерная матрица. Хотя на матрицы $\hat{q}_2$ и $\hat{q}_3$ не накладывается никаких ограничений, мы выберем их в диагональном виде с собственными значениями q_{2i} и q_{3i} ($i = 1, 2$) соответственно. Собственные значения матрицы $\hat{n}$ становятся равными $n_i = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{k_0^2 q_{2i} + m^2 q_{3i} + \frac{1}{4}}$, причем можно выбрать любой знак. Решением уравнения (14) являются функции Лежандра первого и второго рода вида $F_{n_i}^{(1,2)}(1+\gamma r)$.

Матрицы (6) при определенных выше значениях матриц (13) равны

$$M_{z\varphi}^{(0)} = \frac{M_0}{2+\gamma r}, \quad M_{\varphi z}^{(0)} = \frac{\gamma}{r} M_0^{-1}\hat{q}_2, \quad M_{\varphi z}^{(2)} = \gamma r M_0^{-1}\hat{q}_3,$$

где постоянная безразмерная двумерная матрица M_0 определена согласно (11) для анизотропной среды с материальными параметрами

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{m_{12}}{q_{31}\gamma r}\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{m_{12}}{2+\gamma r}\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi - \frac{q_{22}\gamma}{m_{21} r}\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z, \\ \mu &= -\frac{m_{21}}{q_{32}\gamma r}\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{m_{21}}{2+\gamma r}\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi - \frac{q_{21}\gamma}{m_{12} r}\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z. \end{aligned} \tag{15}$$

Тангенциальные составляющие полей (8) равны

$$\mathbf{W} = \sum_{i=1}^{2} \begin{pmatrix} \left[F_{n_1}^{(1)}(1+\gamma r)c_1 + F_{n_1}^{(2)}(1+\gamma r)c_1'\right]\mathbf{e}_z + \dfrac{2+\gamma r}{ik_0 m_{12}}\dfrac{d\left[F_{n_2}^{(1)}(1+\gamma r)c_2 + F_{n_2}^{(2)}(1+\gamma r)c_2'\right]}{dr}\mathbf{e}_\varphi \\ \left[F_{n_2}^{(1)}(1+\gamma r)c_2 + F_{n_2}^{(2)}(1+\gamma r)c_2'\right]\mathbf{e}_z + \dfrac{2+\gamma r}{ik_0 m_{21}}\dfrac{d\left[F_{n_1}^{(1)}(1+\gamma r)c_1 + F_{n_1}^{(2)}(1+\gamma r)c_1'\right]}{dr}\mathbf{e}_\varphi \end{pmatrix}.$$

Объединяя постоянные интегрирования в векторы $\mathbf{c}_1 = \left(c_1, c_1'\right)^T$ и $\mathbf{c}_2 = \left(c_2, c_2'\right)^T$, можно переписать решение в соответствии с (9). При этом вводятся матрицы

$$\eta_{1,2} = F_{n_1}^{(1,2)}\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z + \frac{\gamma(2+\gamma r)}{ik_0 m_{21}}\left(F_{n_2}^{(1,2)}\right)'\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi,$$

$$\zeta_{1,2} = F_{n_2}^{(1,2)}\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\varphi + \frac{\gamma(2+\gamma r)}{ik_0 m_{12}}\left(F_{n_1}^{(1,2)}\right)'\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_z,$$

где штрих обозначает дифференцирование по аргументу функции. Тензор импеданса волн в такой анизотропной среде следующий:

$$\Gamma_{1,2}(r) = \zeta_{1,2}(r)\eta_{1,2}^{-1}(r) = \frac{ik_0 m_{21}}{\gamma(2+\gamma r)}\frac{F_{n_2}^{(1,2)}}{\left(F_{n_2}^{(1,2)}\right)'}\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\varphi + \frac{\gamma(2+\gamma r)}{ik_0 m_{12}}\frac{\left(F_{n_1}^{(1,2)}\right)'}{F_{n_1}^{(1,2)}}\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_z.$$

Теперь найдем электромагнитные поля, рассеянные цилиндром с материальными тензорами (15). Воспользуемся теорией рассеяния, предложенной в работе [24]. Выполняя разложение падающего электромагнитного поля $\mathbf{H}_{\text{inc}}$, $\mathbf{E}_{\text{inc}}$ по ортогональным функциям $\exp(im\varphi)$, задающим азимутальную зависимость, для каждого значения целого числа m находим тангенциальную составляющую рассеянного поля на границе раздела частица / окружающая среда:

$$\mathbf{H}_m^{(sc)} = \left(\tilde{\Gamma} - \Gamma_1\right)^{-1}\left(\Gamma_1, -I\right)\mathbf{W}_m^{(inc)}, \quad \mathbf{W}_m^{(inc)} = \int_0^{2\pi} e^{-im\varphi}\begin{pmatrix} I\mathbf{H}_{inc}(R,\varphi) \\ I\mathbf{E}_{inc}(R,\varphi)\end{pmatrix}d\varphi,$$

где R – радиус цилиндра; $\tilde{\Gamma}(R)$ и $\Gamma_1(R)$ – тензоры поверхностного импеданса рассеянных волн и волн в цилиндре соответственно. При этом следует помнить, что в центре цилиндрической частицы функция Лежандра второго рода обратится в бесконечность и нужно оставлять только регулярное решение $F_{n_i}^{(1)}(1+\gamma r)$, для которого записывается тензор импеданса $\Gamma_1(R)$.

Результаты расчета дифференциального сечения рассеяния, нормированного на геометрическое сечение частицы πR^2, при падении плоской электромагнитной волны TE- и TM-поляризации показаны на рис. 2.

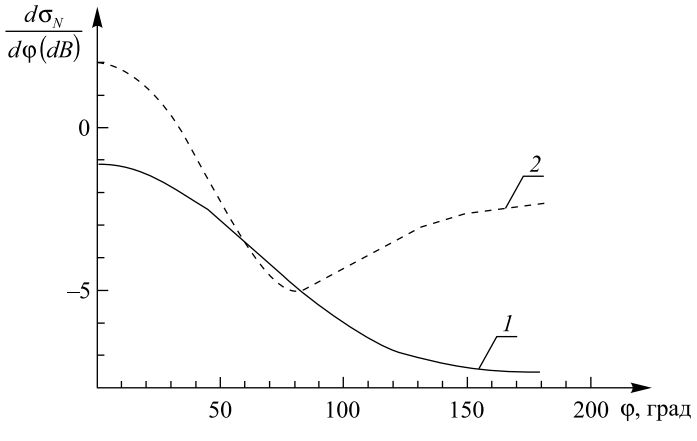


Рис. 2. Дифференциальное сечение рассеяния плоской электромагнитной волны на неоднородном цилиндре с материальными параметрами (15) в пустом пространстве: *1* – TE-поляризация волны; *2* – TM-поляризация волны. Параметры расчета: $k_0 R = 1$; $\gamma = 1, 2$; $m_{12} = 1$; $m_{21} = 2$; $q_{21} = 1$; $q_{22} = 2$; $q_{31} = 3$; $q_{32} = 1$

Fig. 2. Differential cross-section of the plane electromagnetic wave in free space scattered by inhomogeneous cylinder with material parameters (15): *1* – wave's TE polarization; *2* – wave's TM polarization. Parameters: $k_0 R = 1$; $\gamma = 1, 2$; $m_{12} = 1$; $m_{21} = 2$; $q_{21} = 1$; $q_{22} = 2$; $q_{31} = 3$; $q_{32} = 1$

Цилиндр рассматриваемого радиуса обладает электрическим и магнитным дипольными моментами, а высшими моментами можно пренебречь. TE-поляризованная волна, у которой электрическое поле направлено вдоль оси цилиндра z, рассеивается преимущественно вперед. В то же время TM-поляризованная волна имеет значительное рассеяние назад, а интенсивность рассеянного света в целом выше, чем для TE-поляризации. Такая асимметрия связана с эффективностью возбуждения дипольных моментов и может использоваться для управления интенсивностью взаимодействия света и вещества.

Заключение

Операторный подход применен для поиска аналитических решений уравнений Максвелла в радиально-неоднородных бианизотропных средах с цилиндрической симметрией. В явном виде выписан и реализован алгоритм решения, заключающийся в задании двумерных матриц Q_1, Q_2 и Q_3, решении уравнения для продольных компонент полей (4), определении тангенциальных компонент полей (9), а значит, и всех компонент. Затем восстановлены материальные параметры среды (7), допускающие выбранный тип аналитического решения. Таким образом, были проведены расчеты для среды, в которой распространяются цилиндрические волны Лежандра. В этом случае решена задача о рассеянии света анизотропным цилиндром и найдены сечения рассеяния.

Отметим, что описанное выше решение задачи невозможно в случае анизотропных сферически-симметричных сред, потому что переход от матриц Q_1, Q_2 и Q_3 к матрицам M оказывается более сложным и требует рассмотрения системы матричных нелинейных дифференциальных уравнений [25; 26]. В случае цилиндрически-симметричных материалов, исследованных в данной работе, можно получить произвольные продольные компоненты электромагнитного поля, так как матрицы Q_1, Q_2 и Q_3 в уравнении (4) могут быть любыми. При этом материальные параметры (7) задаются неоднозначным образом.

Библиографические ссылки

1. *Адамс М.* Введение в теорию оптических волноводов. М., 1984.
2. *Унгер Х.-Г.* Планарные и волоконные оптические волноводы. М., 1980.
3. *Снайдер А., Лав Дж.* Теория оптических волноводов. М., 1987.
4. *Bohren C. F., Huffman D. R.* Absorption and scattering of light by small particles. New York, 1983.
5. *Tsang L., Kong J. A., Ding K.-H.* Scattering of electromagnetic waves: Theories and applications. New York, 2000.
6. *Van de Hulst H. C.* Light scattering by small particles. New York, 1981.
7. *Shvets G., Tsukerman I.* Plasmonics and plasmonic metamaterials: Analysis and applications. Singapore, 2012.
8. Tutorials in metamaterials / ed. by M. A. Noginov, V. A. Podolskiy. Boca Raton, 2012.
9. *Cai W., Shalaev V.* Optical metamaterials: Fundamentals and applications. Heidelberg, 2010.
10. *Mirmoosa M. S., Kosulnikov S. Yu., Simovski C. R.* Magnetic hyperbolic metamaterial of high-index nanowires // Phys. Rev. B. 2016. Vol. 94. P. 075138.
11. *Poddubny A. N., Belov P. A., Kivshar Yu. S.* Purcell effect in wire metamaterials // Phys. Rev. B. 2013. Vol. 87. P. 035136.
12. *Benisty H., Goudail F.* Dark-field hyperlens exploiting a planar fan of tips // J. Opt. Soc. Am. B. 2012. Vol. 29. P. 2595–2602.
13. *Kosulnikov S., Filonov D., Glybovski S., et al.* Wire-medium hyperlens for enhancing radiation from subwavelength dipole sources // IEEE Trans. Antennas Propag. 2015. Vol. 63. P. 4848–4856.
14. *Soifer V. A.* Diffractive nanophotonics. Boca Raton, 2014.
15. *Miyazaki Y.* Scattering and diffraction of electromagnetic waves by inhomogeneous dielectric cylinder // Radio Science. 1981. Vol. 16. P. 1009–1014.
16. *Virkki A., Muinonen K., Penttilä A.* Radar albedos and circular-polarization ratios for realistic inhomogeneous media using the discrete-dipole approximation // J. Quant. Spectros. Radiat. Transf. 2014. Vol. 146. P. 480–491.
17. *Pendry J. B., Schurig D., Smith D. R.* Controlling electromagnetic fields // Science. 2006. Vol. 312. P. 1780–1782.
18. *Leonhardt U.* Optical conformal mapping // Science. 2006. Vol. 312. P. 1777–1780.
19. *Барковский Л. М., Фурс А. Н.* Операторные методы описания оптических полей в сложных средах. Минск, 2003.
20. *Borzdov G. N.* Frequency domain wave-splitting techniques // J. Math. Phys. 1997. Vol. 38. P. 6328–6366.
21. *Novitsky A. V., Barkovskii L. M.* Operator matrices for describing guiding propagation in circular bianisotropic fibres // J. Phys. A: Math. Gen. 2005. Vol. 38. P. 391–404.
22. *Novitsky A. V., Barkovsky L. M.* Matrix approach for light scattering from a multilayered rotationally symmetric bianisotropic sphere // Phys. Rev. A. 2008. Vol. 77. P. 033849.
23. *Федоров Ф. И.* Теория гиротропии. Минск, 1976.
24. *Novitsky A. V.* Matrix approach for light scattering by bianisotropic cylindrical particles // J. Phys.: Condens. Matter. 2007. Vol. 19. P. 1–11.
25. *Новицкий А. В., Альварес Родригес Р. Х., Галынский В. М.* Сферические бесселевы решения уравнений Максвелла в неоднородных вращательно-симметричных средах // Журн. Белорус. гос. ун-та. Физика. 2017. № 1. С. 52–60.
26. *Novitsky A., Shalin A. S., Lavrinenko A. V.* Spherically symmetric inhomogeneous bianisotropic media: Wave propagation and light scattering // Phys. Rev. A. 2017. Vol. 95. P. 053818.

References

1. Adams M. An introduction to optical waveguides. Moscow, 1984 (in Russ.).
2. Unger H.-G. Planar optical waveguides and fibres. Moscow, 1980 (in Russ.).
3. Snyder A., Love J. Optical waveguide theory. Moscow, 1987 (in Russ.).
4. Bohren C. F., Huffman D. R. Absorption and scattering of light by small particles. New York, 1983.
5. Tsang L., Kong J. A., Ding K.-H. Scattering of electromagnetic waves: Theories and applications. New York, 2000.
6. Van de Hulst H. C. Light scattering by small particles. New York, 1981.
7. Shvets G., Tsukerman I. Plasmonics and plasmonic metamaterials: Analysis and applications. Singapore, 2012.

8. Noginov M. A., Podolskiy V. A. (eds.). Tutorials in metamaterials. Boca Raton, 2012.
9. Cai W., Shalaev V. Optical metamaterials: Fundamentals and applications. Heidelberg, 2010.
10. Mirmoosa M. S., Kosulnikov S. Yu., Simovski C. R. Magnetic hyperbolic metamaterial of high-index nanowires. *Phys. Rev. B.* 2016. Vol. 94. P. 075138.
11. Poddubny A. N., Belov P. A., Kivshar Yu. S. Purcell effect in wire metamaterials. *Phys. Rev. B.* 2013. Vol. 87. P. 035136.
12. Benisty H., Goudail F. Dark-field hyperlens exploiting a planar fan of tips. *J. Opt. Soc. Am. B.* 2012. Vol. 29. P. 2595–2602.
13. Kosulnikov S., Filonov D., Glybovski S., et al. Wire-medium hyperlens for enhancing radiation from subwavelength dipole sources. *IEEE Trans. Antennas Propag.* 2015. Vol. 63. P. 4848–4856.
14. Soifer V. A. Diffractive nanophotonics. Boca Raton, 2014.
15. Miyazaki Y. Scattering and diffraction of electromagnetic waves by inhomogeneous dielectric cylinder. *Radio Science.* 1981. Vol. 16. P. 1009–1014.
16. Virkki A., Muinonen K., Penttilä A. Radar albedos and circular-polarization ratios for realistic inhomogeneous media using the discrete-dipole approximation. *J. Quant. Spectros. Radiat. Transf.* 2014. Vol. 146. P. 480–491.
17. Pendry J. B., Schurig D., Smith D. R. Controlling electromagnetic fields. *Science.* 2006. Vol. 312. P. 1780–1782.
18. Leonhardt U. Optical conformal mapping. *Science.* 2006. Vol. 312. P. 1777–1780.
19. Barkovsky L. M., Furs A. N. Operator methods of description of optical fields in complex media. Minsk, 2003 (in Russ.).
20. Borzdov G. N. Frequency domain wave-splitting techniques. *J. Math. Phys.* 1997. Vol. 38. P. 6328–6366.
21. Novitsky A. V., Barkovskii L. M. Operator matrices for describing guiding propagation in circular bianisotropic fibres. *J. Phys. A: Math. Gen.* 2005. Vol. 38. P. 391–404.
22. Novitsky A. V., Barkovsky L. M. Matrix approach for light scattering from a multilayered rotationally symmetric bianisotropic sphere. *Phys. Rev. A.* 2008. Vol. 77. P. 033849.
23. Fedorov F. I. Theory of gyrotropy. Minsk, 1976 (in Russ.).
24. Novitsky A. V. Matrix approach for light scattering by bianisotropic cylindrical particles. *J. Phys.: Condens. Matter.* 2007. Vol. 19. P. 1–11.
25. Novitsky A. V., Alvarez Rodriguez R. J., Galynsky V. M. Spherical Bessel solution of Maxwell's equations in inhomogeneous rotationally symmetric media. *J. Belarus. State Univ. Phys*. 2017. No. 1. P. 52–60 (in Russ.).
26. Novitsky A., Shalin A. S., Lavrinenko A. V. Spherically symmetric inhomogeneous bianisotropic media: Wave propagation and light scattering. *Phys. Rev. A.* 2017. Vol. 95. P. 053818.

Статья поступила в редколлегию 07.04.2017.
Received by editorial board 07.04.2017.