

МЕТОД РАСЧЕТА КОЭФФИЦИЕНТОВ РАССЕЯНИЯ МИ НА НЕОДНОРОДНОЙ БИАНИЗОТРОПНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЕ В РАМКАХ ОПЕРАТОРНОЙ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ

А. В. НОВИЦКИЙ^{1), 2)}, Р. Х. АЛЬВАРЕС РОДРИГЕС¹⁾, В. М. ГАЛЫНСКИЙ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

²⁾Институт фотоники Технического университета Дании,
ул. Эрстеда, 343, 2800, г. Конгенс Люнбю, Дания

Разработан метод расчета коэффициентов рассеяния Ми на неоднородных бианизотропных сферических частицах с использованием рассеянных полей и интегрального представления коэффициентов. Показано, что в рамках операторной теории рассеяния коэффициенты Ми выражаются посредством тензоров поверхностного импеданса волн в частице и окружающей среде. С помощью найденных коэффициентов Ми для неоднородной анизотропной частицы изучены условия возникновения эффекта направленного (преимущественно вперед) рассеяния электромагнитного излучения. Возможно обобщение методики на случаи многослойных и цилиндрических частиц.

Ключевые слова: электромагнитные волны; метаматериалы; рассеяние света; коэффициенты Ми.

Благодарность. Авторы благодарят Белорусский республиканский фонд фундаментальных исследований (грант № Ф16Р-049) за финансовую поддержку.

CALCULATION METHOD FOR MIE SCATTERING COEFFICIENTS BY INHOMOGENEOUS BIANISOTROPIC SPHERICAL PARTICLE WITHIN THE OPERATOR SCATTERING THEORY

A. V. NOVITSKY^{a, b}, R. J. ALVAREZ RODRIGUEZ^a, V. M. GALYNSKY^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

^bDTU Fotonik, Technical University of Denmark, 343 Ørsted's Plads, Kgs. Lyngby DK-2800, Denmark

Corresponding author: V. M. Galynsky (galynsky@bsu.by)

Calculation method for the Mie scattering coefficients by inhomogeneous bianisotropic spherical particles is developed. It exploits the scattering fields and integral representation of coefficients. It is shown that within the operator

Образец цитирования:

Новицкий А. В., Альварес Родригес Р. Х., Галынский В. М. Метод расчета коэффициентов рассеяния Ми на неоднородной бианизотропной сферической частице в рамках операторной теории рассеяния // Журн. Белорус. гос. ун-та. Физика. 2018. № 1. С. 25–32.

For citation:

Novitsky A. V., Alvarez Rodriguez R. J., Galynsky V. M. Calculation method for Mie scattering coefficients by inhomogeneous bianisotropic spherical particle within the operator scattering theory. *J. Belarus. State Univ. Phys.* 2018. No. 1. P. 25–32 (in Russ.).

Авторы:

Андрей Викторович Новицкий – доктор физико-математических наук, доцент; профессор кафедры теоретической физики и астрофизики физического факультета¹⁾; старший научный сотрудник лаборатории метаматериалов²⁾.

Ричард Хосе Альварес Родригес – аспирант кафедры теоретической физики и астрофизики физического факультета. Научный руководитель – А. В. Новицкий.

Владимир Михайлович Галынский – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры теоретической физики и астрофизики физического факультета.

Authors:

Andrey V. Novitsky, doctor of science (physics and mathematics), docent; professor at the department of theoretical physics and astrophysics, faculty of physics^a; senior researcher at the metamaterials group^b.

novitsky@bsu.by

Richard J. Alvarez Rodriguez, postgraduate student at the department of theoretical physics and astrophysics, faculty of physics.

richardfby@gmail.com

Vladimir M. Galynsky, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of theoretical physics and astrophysics, faculty of physics.

galynsky@bsu.by

scattering theory the Mie coefficients are expressed by means of the wave impedance tensors in the particle and ambient medium. Using the Mie coefficients determined for the inhomogeneous anisotropic particle we study the existence conditions of directional (predominantly forward) electromagnetic radiation. Generalization of the methodology to the cases of multilayer and cylindrical particles is possible.

Key words: electromagnetic waves; metamaterials; light scattering; Mie coefficients.

Acknowledgements. The authors acknowledge financial support from the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (grant No. F16R-049).

Введение

Рассеяние света объясняет многие явления в окружающем нас мире и является важным инструментом для его целенаправленного познания. Процесс рассеяния электромагнитных волн может быть описан различными способами в зависимости от конкретных параметров системы. Для объектов, маленьких по сравнению с длиной волны рассеиваемого излучения (приближение Рэлея), можно учитывать лишь электрические дипольные моменты [1; 2]. Если показатель преломления частицы приблизительно равен единице, то задачу о рассеянии допустимо решать с помощью теории возмущений, причем часто можно ограничиться борновским приближением. Случай маленьких частиц с показателем преломления около единицы называют приближением Рэлея – Ганса. Другой предел – случай частиц большого размера – анализируется методами геометрической (лучевой) оптики [3–5]. Однако наиболее строгое описание дается решением уравнений Максвелла с условиями на границе раздела частицы (рассеяние Ми) [1; 2; 6; 7]. Существуют несколько модификаций и обобщений решения задачи Ми, такие как метод Т-матриц [8–11] и операторный метод [12–14].

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы проследить связь между операторным (матричным) подходом и классической теорией Ми, а также найти общие формулы для коэффициентов рассеяния. С этой целью решаются следующие задачи. Во-первых, проводится сравнение рассеянных полей в обоих подходах. Во-вторых, находятся коэффициенты Ми с использованием рассеянных полей, рассчитанных в рамках операторного подхода. Полученные общие соотношения позволяют записать коэффициенты Ми для неоднородных бианизотропных сферических частиц. В-третьих, коэффициенты Ми вычисляются в частном случае радиально-неоднородной сферической частицы. С их помощью проводится анализ эффектов направленного света [15–19] в дипольном приближении.

Коэффициенты рассеяния Ми

Представим выражения для монохроматических (с угловой частотой ω) полей, рассеянных на сферической частице радиусом R , в классической теории Ми и операторном подходе. В теории Ми [1] электромагнитные поля раскладываются по базису взаимно ортогональных сферических гармоник $\mathbf{M}_{eml}(r, \theta, \varphi)$, $\mathbf{M}_{oml}(r, \theta, \varphi)$, $\mathbf{N}_{eml}(r, \theta, \varphi)$ и $\mathbf{N}_{oml}(r, \theta, \varphi)$, где l и $m = -l, \dots, l$ – целые числа; (r, θ, φ) – сферические координаты. С их помощью можно записать напряженности электрического $\mathbf{E}_{\text{inc}}$ и магнитного $\mathbf{H}_{\text{inc}}$ полей падающей x -поляризованной плоской волны $\mathbf{E}_{\text{inc}} = e^{in_0 k_0 z} \mathbf{e}_x$ согласно

$$\mathbf{E}_{\text{inc}} = \sum_{l=1}^{\infty} E_l \left(\mathbf{M}_{ol}^{(1)} - i \mathbf{N}_{el}^{(1)} \right), \quad \mathbf{H}_{\text{inc}} = -\frac{1}{\mu_0} \sum_{l=1}^{\infty} E_l \left(\mathbf{M}_{el}^{(1)} + i \mathbf{N}_{ol}^{(1)} \right),$$

а напряженности рассеянного поля – как

$$\mathbf{E}_{\text{sc}} = \sum_{l=1}^{\infty} E_l \left(i a_l \mathbf{N}_{el}^{(3)} - b_l \mathbf{M}_{ol}^{(3)} \right), \quad \mathbf{H}_{\text{sc}} = \frac{1}{\mu_0} \sum_{l=1}^{\infty} E_l \left(i b_l \mathbf{N}_{ol}^{(3)} + a_l \mathbf{M}_{el}^{(3)} \right), \quad (1)$$

где ϵ_0 , μ_0 и n_0 – диэлектрическая проницаемость, магнитная проницаемость и показатель преломления окружающей среды соответственно; $k_0 = \frac{\omega}{c}$ – волновое число в вакууме; c – скорость света в вакууме; сферические гармоники с верхними индексами (1) и (3) соответствуют выбору радиальных решений в виде сферических функций Бесселя $j_l(n_0 k_0 r)$ и Ханкеля первого рода $h_l^{(1)}(n_0 k_0 r)$ соответственно; a_l и b_l – коэффициенты рассеяния Ми, которые можно найти в результате решения граничной задачи на

поверхности раздела частицы и окружающей среды. Коэффициенты E_l можно задать через каждую из четырех сферических гармоник, но далее будут использоваться $\mathbf{M}_{eml}(\theta, \varphi)$ и $\mathbf{M}_{oml}(\theta, \varphi)$:

$$E_l = \frac{1}{C_{ol}^{(1)}} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathbf{M}_{ol}^{(1)} \mathbf{E}_{inc} \sin\theta d\theta d\varphi = -\frac{\mu_0}{C_{ol}^{(1)}} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathbf{M}_{el}^{(1)} \mathbf{H}_{inc} \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Здесь введены нормировочные коэффициенты $E_l = \frac{1}{C_{ol, el}^{(1,3)}} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\mathbf{M}_{ol, el}^{(1,3)} \right)^2 \sin\theta d\theta d\varphi$. Коэффициенты Ми

можно восстановить по известным значениям рассеянных электрических или магнитных полей. Действительно, из выражения (1) следует, что в силу ортогональности сферических гармоник коэффициенты Ми выражаются через $\mathbf{M}_{eml}(\theta, \varphi)$ и $\mathbf{M}_{oml}(\theta, \varphi)$ как

$$a_l = \frac{\mu_0}{E_l C_{el}^{(3)}} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathbf{M}_{el}^{(3)} \mathbf{H}_{sc} \sin\theta d\theta d\varphi, \quad b_l = -\frac{1}{E_l C_{ol}^{(3)}} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathbf{M}_{ol}^{(3)} \mathbf{H}_{sc} \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Операторная теория рассеяния [13; 14] позволяет найти рассеянные поля альтернативным способом – с использованием пространственных эволюционных операторов и тензоров поверхностного импеданса. Угловая зависимость полей задается не сферическими гармониками, а тензорной функцией

$$F_{lm}(\theta, \varphi) = Y_{lm}(\theta, \varphi) \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + X_{lm}(\theta, \varphi) \otimes \mathbf{e}_\theta + (\mathbf{e}_r \times X_{lm}) \otimes \mathbf{e}_\varphi,$$

где $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ и $X_{lm}(\theta, \varphi) = -i[l(l+1)]^{-1/2} \mathbf{r} \times \nabla Y_{lm}$ – скалярная и векторная сферические функции соответственно; $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ – базисные векторы сферической системы координат. Сферические гармоники теории Ми могут быть записаны посредством F_{lm} как

$$\mathbf{M}_{ml}(r, \theta, \varphi) = -\mathbf{M}_{oml} + i\mathbf{M}_{eml} = A_{lm} F_{lm} \mathbf{e}_\theta z_l(n_0 k_0 r),$$

$$\mathbf{N}_{ml}(r, \theta, \varphi) = -\mathbf{N}_{oml} + i\mathbf{N}_{eml} = A_{lm} F_{lm} \left[\frac{(\rho z_l)'}{\rho} \mathbf{e}_\varphi + \frac{i\sqrt{l(l+1)}}{\rho} z_l \mathbf{e}_r \right],$$

где $z_l(n_0 k_0 r)$ – сферическая функция Бесселя и $A_{lm} = i \sqrt{\frac{4\pi l(l+1)(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!}}$. Введенные комплексные сферические гармоники позволяют связать оба подхода. Действительно, коэффициенты разложения тогда имеют вид

$$\begin{aligned} E_l &= -\frac{1}{C_{ol}^{(1)}} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (-\mathbf{M}_{ol}^{(1)} - i\mathbf{M}_{el}^{(1)}) \mathbf{E}_{inc} \sin\theta d\theta d\varphi = -\frac{1}{C_{ol}^{(1)}} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\mathbf{M}_{il}^{(1)})^* \mathbf{E}_{inc} \sin\theta d\theta d\varphi = \\ &= -\frac{A_{il}^* j_l(n_0 k_0 r)}{C_{ol}^{(1)}} \mathbf{e}_\theta \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F_{il}^+ \mathbf{E}_{inc} \sin\theta d\theta d\varphi. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь использовано разложение поля падающей плоской волны по двум гармоникам – $\mathbf{M}_{oml}(r, \theta, \varphi)$ и $\mathbf{N}_{eml}(r, \theta, \varphi)$, поэтому интегрирование слагаемого с $\mathbf{M}_{eml}(r, \theta, \varphi)$ дает нулевой вклад, F_{il}^+ – эрмитово-сопряженная матрица. С учетом нормировочного коэффициента (при выводе используем $\int_0^\pi \int_0^{2\pi} F_{lm}^+ F_{l'm'} \sin\theta d\theta d\varphi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$)

$$C_{il} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |\mathbf{M}_{il}|^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{|A_{il} z_l|^2}{2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathbf{e}_\theta F_{il}^+ F_{il} \mathbf{e}_\theta \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{|A_{il} z_l|^2}{2}$$

из формул (2) получаем θ -компоненту разложения падающего электрического поля по тензорным функциям

$$E_{\theta}^{(i)l1} = \mathbf{e}_{\theta} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} F_{l1}^+ \mathbf{E}_{\text{inc}} \sin\theta d\theta d\varphi = -\frac{E_l A_{l1} j_l(n_0 k_0 r)}{2}.$$

Делая аналогичные вычисления для θ -компоненты разложения магнитного поля, находим $H_{\theta}^{(i)l1} = -\frac{iE_{\theta}^{(i)l1}}{\mu_0}$. Поскольку компоненты $E_{\theta}^{(i)l1}$ и $E_{\varphi}^{(i)l1}$ тангенциального вектора $\mathbf{E}_t^{(i)l1} = E_{\theta}^{(i)l1} \mathbf{e}_{\theta} + E_{\varphi}^{(i)l1} \mathbf{e}_{\varphi}$ на поверхности сферы связаны с аналогичными компонентами магнитного поля посредством тензора поверхностных импедансов $\Gamma_l^{(0)}$ как $\mathbf{E}_t^{(i)lm} = \Gamma_l^{(0)} \mathbf{H}_t^{(i)lm}$, то можно записать тангенциальные электрическое и магнитное поля в виде

$$\mathbf{E}_t^{(i)l1} = E_{\theta}^{(i)l1} \left[\mathbf{e}_{\theta} - \frac{i}{\mu_0} (\mathbf{e}_{\varphi} \Gamma_l^{(0)} \mathbf{e}_{\theta}) \mathbf{e}_{\varphi} \right], \quad \mathbf{H}_t^{(i)l1} = E_{\theta}^{(i)l1} \left[-\frac{i}{\mu_0} \mathbf{e}_{\theta} + (\mathbf{e}_{\theta} \Gamma_l^{(0)} \mathbf{e}_{\varphi})^{-1} \mathbf{e}_{\varphi} \right], \quad (3)$$

где использовался известный вид тензора импедансов для волн в изотропной среде [13].

Подставляя рассеянные поля, рассчитанные с помощью операторной теории рассеяния [13]

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}_{\text{sc}} \\ \mathbf{E}_{\text{sc}} \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \begin{pmatrix} F_{lm} & 0 \\ 0 & F_{lm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \frac{\sqrt{l(l+1)}}{\mu_0 \rho} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_{\theta} \\ -\frac{\sqrt{l(l+1)}}{\epsilon_0 \rho} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_{\theta} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ \tilde{\Gamma}_l \end{pmatrix} \mathbf{H}_{\text{sc}}^{lm}(R),$$

где I – проекционный оператор на границу раздела сред, вычислим коэффициенты Ми:

$$a_l = \frac{i\mu_0}{E_l C_{\text{el}}^{(3)}} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (\mathbf{M}_{ll}^{(3)})^* \mathbf{H}_{\text{sc}} \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{2i\mu_0}{E_l A_{l1} h_l^{(1)}} \mathbf{e}_{\theta} \mathbf{H}_{\text{sc}}^{l1}(R), \quad (4)$$

$$b_l = \frac{1}{E_l C_{\text{ol}}^{(3)}} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (\mathbf{M}_{ll}^{(3)})^* \mathbf{H}_{\text{sc}} \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{2}{E_l A_{l1} h_l^{(1)}} \mathbf{e}_{\theta} \tilde{\Gamma}_l \mathbf{H}_{\text{sc}}^{l1}(R),$$

где $\tilde{\Gamma}_l$ – тензор поверхностного импеданса для парциальных рассеянных волн (описываются функциями Ханкеля $h_l^{(1)}(n_0 k_0 r)$); $\mathbf{H}_{\text{sc}}^{l1}(R)$ – тангенциальная составляющая рассеянного магнитного поля на границе раздела R между частицей и окружающей средой; магнитное поле $\mathbf{H}_{\text{sc}}^{l1}(R)$ связано с тангенциальными компонентами электрического $\mathbf{E}_t^{(i)l1}$ и магнитного $\mathbf{H}_t^{(i)l1}$ полей падающей волны на границе раздела согласно [13; 14]:

$$\mathbf{H}_{\text{sc}}^{l1} = (\tilde{\Gamma}_l - \Gamma_l)^{-1} (\Gamma_l \mathbf{H}_t^{(i)l1} - \mathbf{E}_t^{(i)l1}), \quad (5)$$

где Γ_l – тензор поверхностного импеданса волн в сферической частице. Подставляя теперь (3) и (5) в (4), записываем окончательные выражения для коэффициентов рассеяния Ми для сферической частицы:

$$a_l = \frac{j_l(n_0 \rho)}{h_l^{(1)}(n_0 \rho)} \mathbf{e}_{\theta} (\tilde{\Gamma}_l - \Gamma_l)^{-1} \left[\Gamma_l \left(\mathbf{e}_{\theta} + i\mu_0 (\mathbf{e}_{\theta} \Gamma_l^{(0)} \mathbf{e}_{\varphi})^{-1} \mathbf{e}_{\varphi} \right) - i\mu_0 \mathbf{e}_{\theta} - (\mathbf{e}_{\varphi} \Gamma_l^{(0)} \mathbf{e}_{\theta}) \mathbf{e}_{\varphi} \right], \quad (6)$$

$$b_l = \frac{j_l(n_0 \rho)}{i\mu_0 h_l^{(1)}(n_0 \rho)} \mathbf{e}_{\theta} \tilde{\Gamma}_l (\tilde{\Gamma}_l - \Gamma_l)^{-1} \left[\Gamma_l \left(\mathbf{e}_{\theta} + i\mu_0 (\mathbf{e}_{\theta} \Gamma_l^{(0)} \mathbf{e}_{\varphi})^{-1} \mathbf{e}_{\varphi} \right) - i\mu_0 \mathbf{e}_{\theta} - (\mathbf{e}_{\varphi} \Gamma_l^{(0)} \mathbf{e}_{\theta}) \mathbf{e}_{\varphi} \right],$$

где $\rho = k_0 R$. Таким образом, соотношения (6) представляют собой коэффициенты рассеяния Ми в общем случае неоднородной бианизотропной сферической частицы, выраженные через тензоры поверхностного импеданса сферических волн. Формулы (6) являются аналитическими выражениями и довольно

просто обобщаются на случай многослойных частиц путем введения эволюционных операторов сферических слоев (формулы связи между рассеянными и падающими полями на границе раздела многослойной сферической частицы и окружающей среды, обобщающие (5), могут быть найдены в [13; 14; 20]).

Коэффициенты Ми для неоднородных частиц

Тензор импеданса волн в изотропной среде был рассчитан ранее [13] и имеет вид

$$\Gamma_l = i\gamma D_l^{-1}(n\rho)\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\phi + i\gamma D_l(n\rho)\mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\theta, \quad (7)$$

где $\gamma = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ и $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ – импеданс и показатель преломления изотропной среды с проницаемостями ϵ и μ

соответственно; $D_l(x) = \frac{[xz_l(x)]'}{[xz_l(x)]}$. Для тензоров импеданса $\Gamma_l^{(0)}$ и $\tilde{\Gamma}_l$ в окружающей среде нужно брать

одинаковые $\gamma_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ и $n_0 = \sqrt{\epsilon_0\mu_0}$, но разные сферические функции: $z_l(x) = j_l(x)$ и $z_l(x) = h_l^{(1)}(x)$

соответственно.

В случае анизотропной, радиально неоднородной среды с проницаемостями $\hat{\epsilon} = \epsilon_1(h_0 + h_2 k_0^2 r^2)^{-1} \times \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \epsilon_1 I$ и $\hat{\mu} = \mu_1(h_0 + h_2 k_0^2 r^2)^{-1} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \mu_1 I$, для которой уравнения Максвелла имеют аналитические решения [14; 21], тензор поверхностного импеданса равен

$$\Gamma_l = i\gamma_{-1,l} D_{m_l}^{-1}(\lambda_l \rho) \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\phi + i\gamma_{1,l} D_{m_l}(\lambda_l \rho) \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\theta, \quad (8)$$

где ϵ_1 , μ_1 , h_0 и h_2 – постоянные; $\lambda_l = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1 - l(l+1)h_2}$; $\gamma_{-1,l} = \frac{\mu_1}{\lambda_l}$; $\gamma_{1,l} = \frac{\lambda_l}{\epsilon_1}$; $m_l = \sqrt{l(l+1)h_0 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$.

Производная $D_l(x)$ выражается через сферическую функцию Бесселя $z_l(x) = j_l(x)$, так как соответствует волне внутри шара. Для $h_0 = 1$ и $h_2 = 0$ получаем параметры изотропной среды и тензор импеданса (7).

Подставляя тензоры поверхностных импедансов (7) и (8) в выражения для коэффициентов Ми (6), получаем

$$a_l = \frac{j_l(n_0\rho)}{h_l^{(1)}(n_0\rho)} \frac{\gamma_0 D_l^{(0)}(n_0\rho) - \gamma_{1,l} D_{m_l}(\lambda_l \rho)}{\gamma_0 \tilde{D}_l(n_0\rho) - \gamma_{1,l} D_{m_l}(\lambda_l \rho)}, \quad b_l = \frac{j_l(n_0\rho)}{h_l^{(1)}(n_0\rho)} \frac{\gamma_0 D_{m_l}(\lambda_l \rho) - \gamma_{-1,l} D_l^{(0)}(n_0\rho)}{\gamma_0 D_{m_l}(\lambda_l \rho) - \gamma_{-1,l} \tilde{D}_l(n_0\rho)}, \quad (9)$$

где $\gamma_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ – импеданс окружающей среды. При замене неоднородной анизотропной среды на од-

нородную изотропную необходимо подставить $\gamma_{-1,l} = \gamma_{1,l} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}$ и $\lambda_l = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$. Тогда соотношения (9)

станут привычными коэффициентами рассеяния Ми [1; 2; 7].

Направленный свет

Применим рассчитанные коэффициенты Ми для неоднородных сферических частиц в целях изучения направленного света. В литературе под направленным светом понимают подавление рассеяния в некотором направлении и соответствующее усиление рассеяния в других направлениях [15–19]. Известны, например, условия Керкера [22; 23] для уменьшения рассеяния назад (первое условие Керкера) или вперед (второе условие Керкера) дипольной частицей. Первое условие можно легко получить исходя из выражения для обратного сечения рассеяния [1; 7; 17]:

$$Q_{bs} = \frac{1}{\rho^2} \left| \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1)(-1)^l (a_l - b_l) \right|^2.$$

Если размер сферы мал по сравнению с длиной волны, то основную роль играют первые коэффициенты Ми a_1 и b_1 , поэтому сечение рассеяния назад будет близко к нулю при выполнении условия $a_1 = b_1$. Поскольку коэффициенты Ми – комплексные числа, то данное условие на самом деле представляет собой два уравнения, состоящих в равенстве действительных и мнимых частей коэффициентов.

Рассмотрим рассеяние электромагнитной волны анизотропной сферической частицей с материальными параметрами, обсуждавшимися в предыдущем разделе и изображенными на рис. 1. Только радиальные компоненты тензоров проницаемости имеют зависимость от координаты, в то время как тангенциальные компоненты постоянны. Тогда коэффициенты Ми даются формулами (9). Условие равенства первых коэффициентов демонстрируется на рис. 2 (кривая 1). Кривая 1 является графиком разности $|a_1 - b_1|$. При обращении этой величины в нуль будет выполняться первое условие Керкера. На рис. 2 можно заметить по крайней мере две такие точки: первую – вблизи $k_0 R = 0,45$, а вторую – вблизи $k_0 R = 1$. В данных точках первые коэффициенты Ми превалируют над последующими (см. рис. 2, кривая 2). По этой причине минимум вблизи $k_0 R = 1,5$ не обсуждается. Сечение обратного рассеяния (см. рис. 2, кривая 3) подтверждает существование минимумов в указанных точках. Следует отметить, что в нашем случае возникают две точки, в которых выполняется первое условие Керкера, хотя для изотропных частиц с высоким показателем преломления есть только одна такая точка [17]. Анизотропия увеличивает количество точек, а неоднородность смещает их положение.

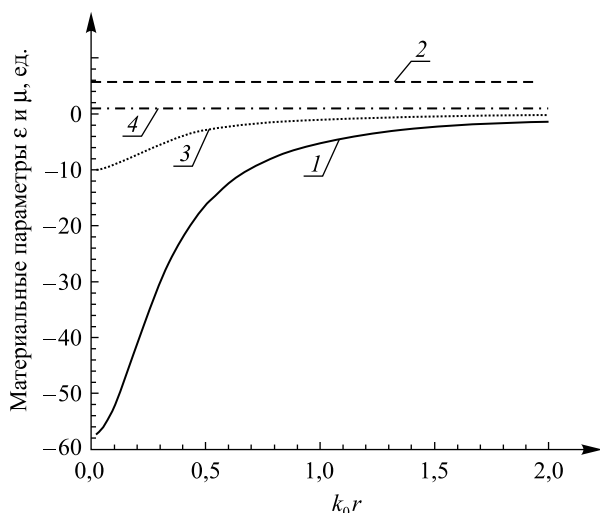


Рис. 1. Материальные параметры неоднородной анизотропной сферической частицы в зависимости от нормированной радиальной координаты $k_0 r$:
1 – ϵ_{rr} ; 2 – $\epsilon_{\theta\theta} = \epsilon_{\phi\phi}$; 3 – μ_{rr} ; 4 – $\mu_{\theta\theta} = \mu_{\phi\phi}$.
Параметры: $\epsilon_1 = 5,76$; $\mu_1 = 1$; $h_0 = -0,1$; $h_2 = -1$

Fig. 1. Material parameters of the inhomogeneous spherical particle depending on the normalized radial coordinate $k_0 r$:

1 – ϵ_{rr} ; 2 – $\epsilon_{\theta\theta} = \epsilon_{\phi\phi}$; 3 – μ_{rr} ; 4 – $\mu_{\theta\theta} = \mu_{\phi\phi}$.
Parameters: $\epsilon_1 = 5.76$; $\mu_1 = 1$; $h_0 = -0.1$; $h_2 = -1$

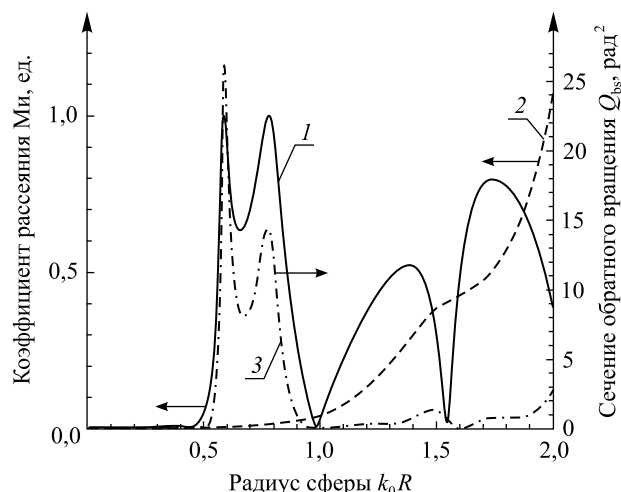


Рис. 2. Коэффициенты рассеяния Ми и сечение обратного рассеяния Q_{bs} в зависимости от параметра размера сферы $k_0 R$:
1 – $|a_1 - b_1|$; 2 – $|a_2| + |b_2| + |a_3| + |b_3|$; 3 – Q_{bs} .

Параметры: $\epsilon_1 = 5,76$; $\mu_1 = 1$; $h_0 = -0,1$; $h_2 = -1$; $\epsilon_0 = 1$; $\mu_0 = 1$

Fig. 2. Mie scattering coefficients and backscattering cross-section Q_{bs} depending on sphere's size parameter $k_0 R$:

1 – $|a_1 - b_1|$; 2 – $|a_2| + |b_2| + |a_3| + |b_3|$; 3 – Q_{bs} .

Parameters: $\epsilon_1 = 5.76$; $\mu_1 = 1$; $h_0 = -0.1$; $h_2 = -1$; $\epsilon_0 = 1$; $\mu_0 = 1$

Заключение

Представлен подход к расчету коэффициентов рассеяния Ми на неоднородной бианизотропной сферической частице, в основе которого лежит сравнение традиционной теории рассеяния Ми с операторной теорией. Последняя позволяет в общем виде вычислять рассеянные электромагнитные поля на неоднородных многослойных бианизотропных частицах, но не использует коэффициенты Ми. Теория рассеяния Ми, наоборот, позволяет найти коэффициенты рассеяния, но их запись не универсальна. Путем объединения обоих методов были получены коэффициенты Ми, выраженные через тензоры импеданса и эволюционные операторы. Отметим, что данная методика может быть без труда обобщена для расчета коэффициентов рассеяния Ми для многослойных бианизотропных сферических частиц. В качестве примера были найдены коэффициенты Ми для неоднородной анизотропной частицы и исследован эффект направленного света.

Библиографические ссылки

1. Bohren C. F., Huffman D. R. Absorption and scattering of light by small particles. New York : Wiley-Interscience Publications, 1983.
2. Van de Hulst H. C. Light scattering by small particles. New York : Dover Publications, 1981.
3. Hovenac E. A. Calculation of far-field scattering from nonspherical particles using a geometrical optics approach // *Appl. Opt.* 1997. Vol. 30, issue 33. P. 4739–4746. DOI: 10.1364/AO.30.004739.
4. Yu H., Shen J., Wei W. Geometrical optics approximation for light scattering by absorbing spherical particles // *J. Quantitative Spectrosc. Radiat. Transf.* 2009. Vol. 110, issue 13. P. 1178–1189. DOI: 10.1016/j.jqsrt.2009.03.025.
5. Mengran Z., Qieni L., Hongxia Zh., et al. Coated sphere scattering by geometric optics approximation // *J. Opt. Soc. A.* 2014. Vol. 31, issue 10. P. 2160–2169. DOI: 10.1364/JOSAA.31.002160.
6. Mie G. Beiträge zur optik trüber medien, speziell kolloidaler metallösungen // *Annalen der Physik.* 1908. Vol. 330, issue 3. S. 377–445. DOI: 10.1002/andp.19083300302/full.
7. Tsang L., Kong J. A., Ding K.-H., et al. Scattering of electromagnetic waves: numerical simulations. New York : Wiley, 2000. DOI: 10.1002/0471224308.fmatter_indsub/summary.
8. Waterman P. C. Matrix formulation of electromagnetic scattering // *Proc. IEEE.* 1965. Vol. 53, issue 8. P. 805–812. DOI: 10.1109/PROC.1965.4058.
9. Wriedt T. Using the T-matrix method for light scattering computations by non-axisymmetric particles: superellipsoids and realistically shaped particles // *Part. Part. Syst. Charact.* 2002. Vol. 19, issue 4. P. 256–268. DOI: 10.1002/1521-4117(200208)19:4<256::AID-PPSC256>3.0.CO;2-8.
10. Mishchenko M. I., Travis L. D., Mackowski D. W. T-matrix method and its applications to electromagnetic scattering by particles: a current perspective // *J. Quantitative Spectrosc. Radiat. Transf.* 2010. Vol. 111, issue 11. P. 1700–1703. DOI: 10.1016/j.jqsrt.2010.01.030.
11. Wang J. J., Han Yi P., Wu Z. F., et al. T-matrix method for electromagnetic scattering by a general anisotropic particle // *J. Quantitative Spectrosc. Radiat. Transf.* 2015. Vol. 162. P. 66–76. DOI: 10.1016/j.jqsrt.2014.11.009.
12. Novitsky A. V. Matrix approach for light scattering by bianisotropic cylindrical particles // *J. Phys.: Condens. Matter.* 2007. Vol. 19. Article ID: 086213. DOI: 10.1088/0953-8984/19/8/086213.
13. Novitsky A. V., Barkovsky L. M. Matrix approach for light scattering from a multilayered rotationally symmetric bianisotropic sphere // *Phys. Rev. A.* 2008. Vol. 77, issue 3. Article ID: 033849. DOI: 10.1103/PhysRevA.77.033849.
14. Novitsky A., Shalin A. S., Lavrinenko A. V. Spherically symmetric inhomogeneous bianisotropic media: Wave propagation and light scattering // *Phys. Rev. A.* 2017. Vol. 95, issue 5. Article ID: 053818. DOI: 10.1103/PhysRevA.95.053818.
15. Fu Y. H., Kuznetsov A. I., Miroshnichenko A. E., et al. Directional visible light scattering by silicon nanoparticles // *Nat. Commun.* 2013. Vol. 4. Article ID: 1527. DOI: 10.1038/ncomms2538.
16. Rodriguez S. R. K., Arango F. B., Steinbusch T. P., et al. Breaking the symmetry of forward-backward light emission with localized and collective magnetoelectric resonances in arrays of pyramid-shaped aluminum nanoparticles // *Phys. Rev. Lett.* 2014. Vol. 113, issue 24. Article ID: 247401. DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.247401.
17. Luk'yanchuk B. S., Voshchinnikov N. V., Paniagua-Dominguez R., et al. Optimum forward light scattering by spherical and spheroidal dielectric nanoparticles with high refractive index // *ACS Photonics.* 2015. Vol. 2, issue 7. P. 993–999. DOI: 10.1021/acs-photonics.5b00261.
18. Wang Z., An N., Shen F., et al. Enhanced forward scattering of ellipsoidal dielectric nanoparticles // *Nanoscale Res. Lett.* 2017. Vol. 12:58. DOI: 10.1186/s11671-016-1794-x.
19. Terekhov P. D., Baryshnikova K. V., Shalin A. S., et al. Resonant forward scattering of light by high-refractive-index dielectric nanoparticles with toroidal dipole contribution // *Opt. Lett.* 2017. Vol. 42, issue 4. P. 835–838. DOI: 10.1364/OL.42.000835.
20. Барковский Л. М., Фурс А. Н. Операторные методы описания оптических полей в сложных средах. Минск : Белорусская наука, 2003.
21. Новицкий А. В., Альварес Родригес Р. Х., Галынский В. М. Сферические бесселевы решения уравнений Максвелла в неоднородных вращательно-симметричных средах // *Журн. Белорус. гос. ун-та. Физика.* 2017. № 1. С. 52–60.
22. Kerker M., Wang D.-S., Giles C. L. Electromagnetic scattering by magnetic spheres // *J. Opt. Soc. Am.* 1983. Vol. 73, issue 6. P. 765–767. DOI: 10.1364/JOSA.73.000765.
23. Geffrin J. M., García-Cámara B., Gómez-Medina R., et al. Magnetic and electric coherence in forward- and back-scattered electromagnetic waves by a single dielectric subwavelength sphere // *Nat. Commun.* 2012. Vol. 3. Article ID: 1171. DOI: 10.1038/ncomms2167.

References

1. Bohren C. F., Huffman D. R. Absorption and scattering of light by small particles. New York : Wiley-Interscience Publications, 1983.
2. Van de Hulst H. C. Light scattering by small particles. New York : Dover Publications, 1981.
3. Hovenac E. A. Calculation of far-field scattering from nonspherical particles using a geometrical optics approach. *Appl. Opt.* 1997. Vol. 30, issue 33. P. 4739–4746. DOI: 10.1364/AO.30.004739.
4. Yu H., Shen J., Wei W. Geometrical optics approximation for light scattering by absorbing spherical particles. *J. Quantitative Spectrosc. Radiat. Transf.* 2009. Vol. 110, issue 13. P. 1178–1189. DOI: 10.1016/j.jqsrt.2009.03.025.
5. Mengran Z., Qieni L., Hongxia Zh., et al. Coated sphere scattering by geometric optics approximation. *J. Opt. Soc. A.* 2014. Vol. 31, issue 10. P. 2160–2169. DOI: 10.1364/JOSAA.31.002160.
6. Mie G. Beiträge zur optik trüber medien, speziell kolloidaler metallösungen. *Annalen der Physik.* 1908. Vol. 330, issue 3. S. 377–445. DOI: 10.1002/andp.19083300302/full.
7. Tsang L., Kong J. A., Ding K.-H., et al. Scattering of electromagnetic waves: numerical simulations. New York : Wiley, 2000. DOI: 10.1002/0471224308.fmatter_indsub/summary.

8. Waterman P. C. Matrix formulation of electromagnetic scattering. *Proc. IEEE*. 1965. Vol. 53, issue 8. P. 805–812. DOI: 10.1109/PROC.1965.4058.
9. Wriedt T. Using the T-matrix method for light scattering computations by non-axisymmetric particles: superellipsoids and realistically shaped particles. *Part. Part. Syst. Charact.* 2002. Vol. 19, issue 4. P. 256–268. DOI: 10.1002/1521-4117(200208)19:4<256::AID-PPSC256>3.0.CO;2-8.
10. Mishchenko M. I., Travis L. D., Mackowski D. W. T-matrix method and its applications to electromagnetic scattering by particles: a current perspective. *J. Quantitative Spectrosc. Radiat. Transf.* 2010. Vol. 111, issue 11. P. 1700–1703. DOI: 10.1016/j.jqsrt.2010.01.030.
11. Wang J. J., Han Yi P., Wu Z. F., et al. T-matrix method for electromagnetic scattering by a general anisotropic particle. *J. Quantitative Spectrosc. Radiat. Transf.* 2015. Vol. 162. P. 66–76. DOI: 10.1016/j.jqsrt.2014.11.009.
12. Novitsky A. V. Matrix approach for light scattering by bianisotropic cylindrical particles. *J. Phys.: Condens. Matter*. 2007. Vol. 19. Article ID: 086213. DOI: 10.1088/0953-8984/19/8/086213.
13. Novitsky A. V., Barkovsky L. M. Matrix approach for light scattering from a multilayered rotationally symmetric bianisotropic sphere. *Phys. Rev. A*. 2008. Vol. 77, issue 3. Article ID: 033849. DOI: 10.1103/PhysRevA.77.033849.
14. Novitsky A., Shalin A. S., Lavrinenko A. V. Spherically symmetric inhomogeneous bianisotropic media: Wave propagation and light scattering. *Phys. Rev. A*. 2017. Vol. 95, issue 5. Article ID: 053818. DOI: 10.1103/PhysRevA.95.053818.
15. Fu Y. H., Kuznetsov A. I., Miroshnichenko A. E., et al. Directional visible light scattering by silicon nanoparticles. *Nat. Commun.* 2013. Vol. 4. Article ID: 1527. DOI: 10.1038/ncomms2538.
16. Rodriguez S. R. K., Arango F. B., Steinbusch T. P., et al. Breaking the symmetry of forward-backward light emission with localized and collective magnetoelectric resonances in arrays of pyramid-shaped aluminum nanoparticles. *Phys. Rev. Lett.* 2014. Vol. 113, issue 24. Article ID: 247401. DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.247401.
17. Luk'yanchuk B. S., Voshchinnikov N. V., Paniagua-Domínguez R., et al. Optimum forward light scattering by spherical and spheroidal dielectric nanoparticles with high refractive index. *ACS Photonics*. 2015. Vol. 2, issue 7. P. 993–999. DOI: 10.1021/acsphotonics.5b00261.
18. Wang Z., An N., Shen F., et al. Enhanced forward scattering of ellipsoidal dielectric nanoparticles. *Nanoscale Res. Lett.* 2017. Vol. 12:58. DOI: 10.1186/s11671-016-1794-x.
19. Terekhov P. D., Baryshnikova K. V., Shalin A. S., et al. Resonant forward scattering of light by high-refractive-index dielectric nanoparticles with toroidal dipole contribution. *Opt. Lett.* 2017. Vol. 42, issue 4. P. 835–838. DOI: 10.1364/OL.42.000835.
20. Barkovsky L. M., Furs A. N. [Operator methods of description of optical fields in complex media]. Minsk : Belorusskaya nauka, 2003 (in Russ.).
21. Novitsky A. V., Alvarez Rodriguez R. J., Galynsky V. M. Spherical Bessel solutions of Maxwell's equations in inhomogeneous rotationally symmetric media. *J. Belarus. State Univ. Phys.* 2017. No. 1. P. 52–60 (in Russ.).
22. Kerker M., Wang D.-S., Giles C. L. Electromagnetic scattering by magnetic spheres. *J. Opt. Soc. Am.* 1983. Vol. 73, issue 6. P. 765–767. DOI: 10.1364/JOSA.73.000765.
23. Geffrin J. M., García-Cámara B., Gómez-Medina R., et al. Magnetic and electric coherence in forward- and back-scattered electromagnetic waves by a single dielectric subwavelength sphere. *Nat. Commun.* 2012. Vol. 3. Article ID: 1171. DOI: 10.1038/ncomms2167.

Статья поступила в редколлегию 15.09.2017.
Received by editorial board 15.09.2017.