



БЕЛОРУССКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ЖУРНАЛ
БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

ФИЗИКА

JOURNAL
OF THE BELARUSIAN STATE UNIVERSITY

PHYSICS

Издается с января 1969 г.
(до 2017 г. – под названием «Вестник БГУ.
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»)

Выходит три раза в год

1

2019

МИНСК
БГУ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

- Главный редактор** **АНИЩИК В. М.** – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры физики твердого тела физического факультета Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: anishchik@bsu.by
- Заместитель
главного редактора** **ВОРОПАЙ Е. С.** – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры лазерной физики и спектроскопии физического факультета Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
E-mail: voropay@bsu.by
- Ануфрик С. С.* Гродненский государственный университет им. Янки Купалы, Гродно, Беларусь.
- Бондаренко Г. Г.* Московский институт электроники и математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», Москва, Россия.
- Гусев О. К.* Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь.
- Жуковский П. В.* Люблинский технический университет, Люблин, Польша.
- Казак Н. С.* Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Килин С. Я.* Национальная академия наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Кислицин С. Б.* Институт ядерной физики Министерства энергетики Республики Казахстан, Алма-Ата, Казахстан.
- Кононов В. А.* СП «ЛОТИС ТИИ», Минск, Беларусь.
- Кучинский П. В.* НИУ «Институт прикладных физических проблем им. А. Н. Севченко» Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
- Максименко С. А.* НИУ «Институт ядерных проблем» Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
- Малый С. В.* Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Маларевич А. М.* Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь.
- Маскевич С. А.* Международный государственный экологический институт им. А. Д. Сахарова Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь.
- Машлан М.* Оломоуцкий университет им. Палацкого, Оломоуц, Чехия.
- Патрин А. А.* Кошалинский технический университет, Кошалин, Польша.
- Пенязьков О. Г.* Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
- Пилипенко В. А.* Государственный центр «Белмикрoанализ» филиала НТЦ «Белмикросистемы» ОАО «Интеграл» – управляющей компании холдинга «Интеграл», Минск, Беларусь.
- Плетьхов В. А.* Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина, Брест, Беларусь.
- Погребняк А. Д.* Сумский государственный университет, Сумы, Украина.
- Ремнев Г. Е.* Томский политехнический университет, Томск, Россия.
- Семченко И. В.* Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины, Гомель, Беларусь.
- Толстик А. Л.* Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь.
- Федосюк В. М.* ГНПО «Научно-практический центр НАН Беларуси по материаловедению», Минск, Беларусь.
- Хайнцманн Р.* Институт физической химии Йенского университета, Йена, Германия.
- Шкадаревич А. П.* Научно-производственное унитарное предприятие «Научно-технический центр “ЛЭМТ” БелОМО», Минск, Беларусь.

EDITORIAL BOARD

Editor-in-chief **ANISHCHIK V. M.**, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of solid-state physics, faculty of physics, Belarusian State University, Minsk, Belarus.
E-mail: anishchik@bsu.by

Deputy editor-in-chief **VOROPAY E. S.**, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of laser physics and spectroscopy, faculty of physics, Belarusian State University, Minsk, Belarus.
E-mail: voropay@bsu.by

- Anufrik S. S.** Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus.
Bondarenko G. G. Moscow Institute of Electronics and Mathematics of the National Research University «Higher School of Economics», Moscow, Russia.
Gusev O. K. Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus.
Zhukowski P. V. Lublin University of Technology, Lublin, Poland.
Kazak N. S. B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Kilin S. Y. National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Kislitsin S. B. Institute of Nuclear Physics of the Ministry of Energy of the Republic of Kazakhstan, Almaty, Kazakhstan.
Kononov V. A. «LOTIS TII», Minsk, Belarus.
Kuchinski P. V. A. N. Sevchenko Institute of Applied Physical Problems of the Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Maksimenko S. A. Institute for Nuclear Problems of the Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Maly S. V. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Malyarevich A. M. Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus.
Maskevich S. A. International Sakharov Environmental Institute of the Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Maslan M. Palacký University, Olomouc, Czech Republic.
Patryn A. A. Politechnika Koszalińska, Koszalin, Poland.
Penyazkov O. G. A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.
Pilipenko V. A. JSC «Integral», Minsk, Belarus.
Pletyukhov V. A. Brest State University named after A. S. Pushkin, Brest, Belarus.
Pogrebnyak A. D. Sumy State University, Sumy, Ukraine.
Remnev G. E. Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russia.
Semchenko I. V. Francisk Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus.
Tolstik A. L. Belarusian State University, Minsk, Belarus.
Fedosyuk V. M. SSPA «Scientific and Practical Materials Research Centre of NAS of Belarus», Minsk, Belarus.
Heintzmann R. Institute of Physical Chemistry of the Jena University, Jena, Germany.
Shkadarevich A. P. Unitary Enterprise «STC “LEMT” of the BelOMO», Minsk, Belarus.

Ф ИЗИКА

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ЯВЛЕНИЙ

PHYSICS

OF ELECTROMAGNETIC PHENOMENA

УДК 539.12:530.145

ДУАЛЬНО ИНВАРИАНТНАЯ ЛАГРАНЖЕВА
ФОРМУЛИРОВКА ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

В. И. СТРАЖЕВ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Дуально инвариантная лагранжева формулировка электродинамики основана на подходе Кабиббо и Феррари к введению двух потенциалов для описания электромагнитного поля. Неувеличение числа степеней свободы обеспечивается требованием инвариантности полевого тензора относительно специальных калибровочных преобразований потенциалов. Вводимый в статье лагранжиан инвариантен не только относительно дуальных преобразований потенциалов, но и относительно специальных калибровочных преобразований на решениях уравнений Максвелла. Подобное рассмотрение можно провести и в рамках дуально симметричной формулировки электродинамики при наличии только наблюдаемых электрических источников.

Ключевые слова: дуальная симметрия; двухпотенциальное описание Кабиббо и Феррари; лагранжиан электромагнитного поля.

Образец цитирования:

Стражев В.И. Дуально инвариантная лагранжева формулировка электродинамики. *Журнал Белорусского государственного университета. Физика*. 2019;1:4–7.

For citation:

Strazhev VI. Dual invariant Lagrange formulation of electrodynamics. *Journal of the Belarusian State University. Physics*. 2019;1:4–7. Russian.

Автор:

Василий Иванович Стражев – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры теоретической физики и астрофизики физического факультета.

Author:

Vasilij I. Strazhev, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of theoretical physics and astrophysics, faculty of physics.
v-i-str@mail.ru

DUAL INVARIANT LAGRANGE FORMULATION OF ELECTRODYNAMICS

V. I. STRAZHEV^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

The dual invariant Lagrange formulation of electrodynamics is based on the Cabibbo – Ferrari introduction of two potentials to the description of electromagnetic field without increase of its degrees of freedom. It is realized through invariance requirement of field tensor under specialized gauge transformations of potentials. The used Lagrangian is dual invariant, simultaneously it is invariant of specialized gauge transformations defined on solutions of Maxwell equations. The same procedure of consideration is realized in the case of dual symmetrical formulation of electrodynamics with electrically charged particles.

Key words: dual symmetry, Cabibbo – Ferrari two potential description; Lagrangian of electromagnetic field.

Как известно, уравнения Максвелла для электромагнитного поля

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\nu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0$$

инвариантны относительно дуальных преобразований вида

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu} \cos \theta + \tilde{F}_{\mu\nu} \sin \theta, \quad \tilde{F}_{\mu\nu} \rightarrow -F_{\mu\nu} \sin \theta + \tilde{F}_{\mu\nu} \cos \theta, \quad (1)$$

где $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$, $\epsilon_{1234} = -i$, $F_{lk} = \epsilon_{lkm} H_m$, $F_{i4} = -iE_i$.

Соответствующий лагранжиан дуальным инвариантом не является, хотя форма его неинвариантности (умножение на постоянный множитель и добавление слагаемого $F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}$, сводимого к полной дивергенции при использовании второй пары уравнений Максвелла) допускается теоремой Нётер. Одновременно это означает, что дуальные преобразования задаются **на решениях** соответствующих уравнений.

Электромагнетизм в присутствии электрических и магнитных источников – после установления ключевого значения для теории суперструн принципа дуальности (см., например, [1]) – явился примером теории, в которой он реализуется, что привело к активному обсуждению дуальной симметрии в электродинамике. При этом возник вопрос об отыскании ее дуально инвариантной и явной лоренц-ковариантной лагранжевой формулировки, о задании локальных дуальных преобразований для канонических переменных, поскольку при общеизвестном введении электромагнитных потенциалов

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

такая возможность отсутствует.

В последние годы вновь возник интерес к данной тематике (см., например, [2; 3] и цитированную там литературу), что связано с решением ряда проблем в квантовой оптике, в том числе с описанием как спинового момента, так и взаимодействия электромагнитных волн с киральными метаматериалами (см., например, [4–6]). В настоящей работе дано построение дуально инвариантной и релятивистски ковариантной лагранжевой формулировки электродинамики, основанной на введении двух исходно независимых электромагнитных потенциалов.

Будем исходить из задания электромагнитного тензора посредством введения двух потенциалов (см., например, [7; 8]):

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha C_\beta. \quad (2)$$

Дуальные преобразования (1) электромагнитного поля индуцируются следующими преобразованиями потенциалов:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu \cos \theta + C_\mu \sin \theta, \quad C_\mu \rightarrow -A_\mu \sin \theta + C_\mu \cos \theta. \quad (3)$$

Проблема увеличения числа степеней свободы решается при учете калибровочных преобразований вида (их частным случаем являются известные градиентные преобразования потенциалов):

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + A_\mu^0, \quad C_\mu \rightarrow C_\mu + C_\mu^0. \quad (4)$$

Выбор A_μ^0 , C_μ^0 ограничен условием нулевого поля:

$$\partial_\mu A_\nu^0 - \partial_\nu A_\mu^0 - \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha C_\beta^0 = 0, \quad (5)$$

вытекающим из требования инвариантности тензора электромагнитного поля относительно преобразований (4). Выбирая, например, $C_\mu^0 = -C_\mu$ или $A_\mu^0 = -A_\mu$, придем к привычному однопотенциальному описанию электромагнитного поля. При сохранении определения (2) возможно установление взаимосвязи между потенциалами A_μ, C_μ вида

$$\partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu - \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha A_\beta = 0.$$

Дуально инвариантный лагранжиан задается следующим образом:

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} C_{\alpha\beta}), \quad (6)$$

где $C_{\alpha\beta} = \partial_\alpha C_\beta - \partial_\beta C_\alpha$.

В отличие от дуально неинвариантного, но калибровочно инвариантного (относительно преобразований (4)) лагранжиана вида $-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2$ лагранжиан (6) при проведении калибровочных преобразований (4) изменится. Учет условия нулевого поля (5) позволяет представить появившееся дополнительное слагаемое в виде $-\frac{1}{2} F_{\mu\nu} (\partial_\mu A_\nu^0 - \partial_\nu A_\mu^0)$ или в виде $-\frac{1}{2} \tilde{F}_{\mu\nu} (\partial_\mu C_\nu^0 - \partial_\nu C_\mu^0)$. Оба указанных выражения при использовании уравнения движения (одной из пары уравнений Максвелла) приводятся к слагаемому типа дивергенции: $\partial_\mu (F_{\mu\nu} A_\nu^0)$ или $\partial_\mu (\tilde{F}_{\mu\nu} C_\nu^0)$. Следовательно, двухпотенциальное описание электромагнитного поля вида (2) позволяет задать дуально инвариантный лагранжиан. В то же время совместное рассмотрение дуальных (3) и калибровочных преобразований (4) означает, что они, как и в случае использования одного типа потенциала, определены именно на решениях уравнений Максвелла.

Из инвариантности лагранжиана (6) относительно дуальных преобразований (1), (3) следует закон сохранения для величины

$$D_\mu = F_{\mu\nu} A_\nu + \tilde{F}_{\mu\nu} C_\nu.$$

Для электромагнитного поля это выражение приобретает физическое содержание после выбора калибровки, ограничивающей число независимых степеней свободы.

Предложенное рассмотрение дуально инвариантной лагранжевой формулировки электродинамики свободно от внутренних противоречий, возникающих при введении двух типов потенциалов, задаваемых следующим образом [2; 3]:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad G_{\mu\nu} = \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu. \quad (7)$$

После проведения вариационной процедуры связь между тензорами $F_{\mu\nu}$ и $G_{\mu\nu}$ постулируется ($G_{\mu\nu} \equiv \tilde{F}_{\mu\nu}$), что фактически означает постулирование уравнений Максвелла для электромагнитного поля вне связи с вариационной процедурой. Подход, основанный на определении (7), исключает также возможность рассмотрения дуально симметричной лагранжевой формулировки однозарядовой электродинамики (см. ниже).

Отметим, что лагранжиан (6) при использовании (2) представим в виде

$$L = -\frac{1}{4} A_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{4} C_{\mu\nu}^2, \quad (8)$$

где

$$A_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad C_{\mu\nu} = \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu.$$

Лагранжиан в виде $-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2$ приводит с учетом (2) (с точностью до членов типа полной дивергенции) к выражению

$$L = -\frac{1}{4} A_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{4} C_{\mu\nu}^2. \quad (9)$$

При квантовом рассмотрении соотношение (9) с необходимостью требует введения индефинитной метрики (см., например, [9]), что исключает возможность равноправного рассмотрения вводимых потенциалов [10]. Сопоставление лагранжиана (8) физическому (электромагнитному) полю, т. е. рассмотрение в качестве электромагнитного тензора величины $F_{\mu\nu}$, определенной по (2), основывается на требовании инвариантности теории относительно преобразований (3).

При наличии электрических и магнитных источников запишем лагранжиан следующим образом:

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha C_\beta) + j_\mu^e A_\mu + j_\mu^g C_\mu + L_{\text{частиц}}, \quad (10)$$

где j_μ^e, j_μ^g – электрический и магнитный токи соответственно; выражение $L_{\text{частиц}}$ связано с описанием заряженных частиц.

При задании дуальных преобразований типа (1) для источников очевидна дуальная инвариантность лагранжиана (10). Он также инвариантен (с точностью до членов типа дивергенции) относительно калибровочных преобразований (4) при их задании на решениях уравнений Максвелла с источниками.

Ограничение числа степеней свободы при двухпотенциальном описании электромагнитного поля и без введения так называемых *Dirac string* (см., например, [8]) означает, что лагранжиан (10) соответствует дуально симметричной формулировке однозарядовой электродинамики [8; 11; 12]. Последняя содержит возможность рассмотрения киральных свойств метаматериалов и в присутствии источников при учете возможности формулировки однозарядовой макроскопической электродинамики в дуально симметричном виде (см., например, [13; 14]).

Библиографические ссылки

1. Castellani E. Duality and ‘particle’ democracy. *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*. 2017;59:100–108. DOI: 10.1016/j.shpsb.2016.03.002.
2. Cameron RP, Barnett MS. Electric-magnetic symmetry and Noether’s theorem. *New Journal of Physics*. 2012;14(12):123019. DOI: 10.1088/1367-2630/14/12/123019.
3. Bliokh KY, Bekshaev AY, Nori F. Dual electromagnetism: helicity, spin, momentum and angular momentum. *New Journal of Physics*. 2013;15:033026. DOI: 10.1088/1367-2630/15/3/033026.
4. Bliokh KY, Nori F. Transverse and longitudinal angular momenta of light. *Physics Reports*. 2015;592:1–38. DOI: 10.1016/j.physrep.2015.06.003.
5. Cameron RP, Götte JB, Barnett SM, Yao AM. Chirality and the angular momentum of light. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*. 2017;375(2087):20150433. DOI: 10.1098/rsta.2015.0433.
6. Elbistan M. Optical helicity and Hertz vectors. *Physics Letters A*. 2018;382(29):1897–1902. DOI: 10.1016/j.physleta.2018.05.012.
7. Han NY, Biedenharn LC. Manifest duality invariance in electrodynamics and the Cabibbo – Ferrari theory of magnetic monopoles. *Nuovo Cimento A*. 1971;2(2):544–556. DOI: 10.1007/BF02899873.
8. Стражев ВИ, Томильчик ЛМ. *Электродинамика с магнитным зарядом*. Минск: Наука и техника; 1975.
9. Круглов СИ, Стражев ВИ. О группе внутренней симметрии квантовой теории векторного поля общего типа. *Известия вузов СССР. Физика*. 1978;5:41.
10. Кресин ЮВ, Стражев ВИ. О двухпотенциальном описании электромагнитного поля. *Теоретическая и математическая физика*. 1978;36:426–429.
11. Стражев ВИ. Дуальная симметрия квантовой электродинамики. *Теоретическая и математическая физика*. 1972;13(2): 200–208.
12. Jackson JD. *Classical Electrodynamics*. Third edition. New York: John Wiley & Sons; 1999.
13. Сердюков АН, Стражев ВИ. О дуально симметричной формулировке макроскопической электродинамики. *Известия вузов СССР. Физика*. 1980;6:33.
14. van Kruining K, Götte JB. The conditions for the preservation of duality symmetry in a linear medium. *Journal of Optics*. 2016; 18(8):085601. DOI: 10.1088/2040-8978/18/8/085601.

References

1. Castellani E. Duality and ‘particle’ democracy. *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*. 2017;59:100–108. DOI: 10.1016/j.shpsb.2016.03.002.
2. Cameron RP, Barnett MS. Electric-magnetic symmetry and Noether’s theorem. *New Journal of Physics*. 2012;14(12):123019. DOI: 10.1088/1367-2630/14/12/123019.
3. Bliokh KY, Bekshaev AY, Nori F. Dual electromagnetism: helicity, spin, momentum and angular momentum. *New Journal of Physics*. 2013;15:033026. DOI: 10.1088/1367-2630/15/3/033026.
4. Bliokh KY, Nori F. Transverse and longitudinal angular momenta of light. *Physics Reports*. 2015;592:1–38. DOI: 10.1016/j.physrep.2015.06.003.
5. Cameron RP, Götte JB, Barnett SM, Yao AM. Chirality and the angular momentum of light. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*. 2017;375(2087):20150433. DOI: 10.1098/rsta.2015.0433.
6. Elbistan M. Optical helicity and Hertz vectors. *Physics Letters A*. 2018;382(29):1897–1902. DOI: 10.1016/j.physleta.2018.05.012.
7. Han NY, Biedenharn LC. Manifest duality invariance in electrodynamics and the Cabibbo – Ferrari theory of magnetic monopoles. *Nuovo Cimento A*. 1971;2(2):544–556. DOI: 10.1007/BF02899873.
8. Strazhev VI, Tomil’chik LM. *Elektrodinamika s magnitnym zaryadom* [Electrodynamics with magnetic charge]. Minsk: Nauka i tekhnika; 1975. Russian.
9. Kruglov SI, Strazhev VI. O gruppe vnutrennej simmetrii kvantovoj teorii vektornogo polja obshchego tipa. *Izvestiya vuzov SSSR. Fizika*. 1978;5:41. Russian.
10. Kresin YuV, Strazhev VI. [Two potential description of the electromagnetic field]. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika*. 1978;36:426–429. Russian.
11. Strazhev VI. [Dual symmetry of quantum electrodynamics]. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika*. 1972;13(2):200–208. Russian.
12. Jackson JD. *Classical Electrodynamics*. Third edition. New York: John Wiley & Sons; 1999.
13. Serdjukov AN, Strazhev VI. O dual’no simmetrichnoi formulirovke makroskopicheskoi elektrodinamiki. *Izvestiya vuzov SSSR. Fizika*. 1980;6:33. Russian.
14. van Kruining K, Götte JB. The conditions for the preservation of duality symmetry in a linear medium. *Journal of Optics*. 2016; 18(8):085601. DOI: 10.1088/2040-8978/18/8/085601.

УДК 539.12

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕНЗОРА ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА С УЧЕТОМ ПОЛЯРИЗУЕМОСТЕЙ

С. А. ЛУКАШЕВИЧ¹⁾, Н. В. МАКСИМЕНКО¹⁾

¹⁾Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины,
ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель, Беларусь

В рамках ковариантного лагранжева формализма и согласно принципу соответствия для движения частиц спина $\frac{1}{2}$ в электромагнитном поле с учетом поляризуемостей получены уравнения, согласованные с амплитудой комптоновского рассеяния, которая следует из низкоэнергетических теорем. Ковариантный лагранжиан согласован с низкоэнергетическим определением в лагранжевом формализме. Построены и проанализированы на феноменологическом уровне канонический и метрический тензоры частиц с поляризуемостями, взаимодействующих с электромагнитным полем. В системе покоя частицы получена плотность энергии взаимодействия частицы с поляризуемостями и электромагнитного поля.

Ключевые слова: ковариантный лагранжиан; уравнения движения; тензор энергии-импульса.

DETERMINATION OF THE ENERGY-MOMENTUM TENSOR THE POLARIZABILITIES TAKING INTO ACCOUNT

S. A. LUKASHEVICH^a, N. V. MAKSIMENKO^a

^aFrancisk Skaryna Gomel State University, 104 Saveckaja Street, Gomel 246019, Belarus
Corresponding author: S. A. Lukashevich (maksimenko@gsu.by)

Within the covariant Lagrangian formalism the equations of motion for spin $\frac{1}{2}$ particles with polarizabilities in the electromagnetic field have been obtained. The resulting equations of motion are consistent with the Compton scattering amplitude, which follows from the low-energy theorems. The covariant Lagrangian is agreed with the low-energy definition in Lagrangian formalism. The canonical and metric tensors of particles with polarizabilities interacting with the electromagnetic field have been constructed and have been analyzed at the phenomenological level. In the particle rest system, the energy density of the interaction of the particle with the polarizabilities and the electromagnetic field have been obtained.

Key words: covariant Lagrangian; the equations of motion; energy-momentum tensor.

Образец цитирования:

Лукашевич СА, Максименко НВ. Определение тензора энергии-импульса с учетом поляризуемостей. *Журнал Белорусского государственного университета. Физика.* 2019;1:8–11.

For citation:

Lukashevich SA, Maksimenko NV. Determination of the energy-momentum tensor the polarizabilities taking into account. *Journal of the Belarusian State University. Physics.* 2019;1:8–11. Russian.

Авторы:

Светлана Анатольевна Лукашевич – старший преподаватель кафедры теоретической физики факультета физики и информационных технологий.

Николай Васильевич Максименко – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры теоретической физики факультета физики и информационных технологий.

Authors:

Svetlana A. Lukashevich, senior lecturer at the department of theoretical physics, faculty of physics and information technologies.

lukashevich@gsu.by

Nikolay V. Maksimenko, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of theoretical physics, faculty of physics and information technologies.

maksimenko@gsu.by

Введение

В электродинамике адронов теория взаимодействия электромагнитного поля со структурными частицами базируется на основных принципах релятивистской квантовой теории поля. Диаграммная техника большей частью используется в модельных представлениях, где установлен ряд особенностей взаимодействия фотонов с адронами [1; 2]. Однако указанная техника применима в основном для описания электромагнитных процессов на простейших кварковых системах.

В области низких энергий в случае взаимодействия электромагнитного поля со сложными кварк-глюонными системами, где методы КХД в основном не применимы, в последнее время все больше используются низкоэнергетические теоремы и правила сумм [3–6].

Низкоэнергетические электромагнитные характеристики адронов, связанные с их структурой, такие как формфактор, поляризуемости, в настоящее время применяются при изучении электромагнитных процессов в нерелятивистской теории [5]. При переходе к релятивистской теории поля можно воспользоваться принципом соответствия и получить функцию Лагранжа, на основании которой последовательно реализовать переход от ковариантного лагранжева формализма к гамильтонову [7–10].

Данная работа является продолжением исследований, результаты которых представлены в [6; 8; 9]. С помощью ковариантного лагранжиана взаимодействия электромагнитного поля со структурной поляризуемой частицей получены уравнения движения, вычислены канонический и метрический тензоры энергии-импульса. Установлены его теоретико-полевые свойства и определена плотность энергии взаимодействия частицы с поляризуемостью и электромагнитного поля в системе покоя.

Теоретические основы

Полный лагранжиан взаимодействия электромагнитного поля с поляризуемой частицей состоит из лагранжиана L_{e-m} для свободного электромагнитного поля, лагранжиана L_D для спинорного (дираковского) поля, создаваемого самой частицей, лагранжиана L_{int-D} взаимодействия свободного электромагнитного поля с полем спинорной частицы и лагранжиана $L_{\alpha_0\beta_0-D}$, который учитывает электрическую и магнитную поляризуемости частицы:

$$L_{total-D} = L_{e-m} + L_D + L_{int-D} + L_{\alpha_0\beta_0-D},$$

$$L_{total-D} = -\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + \bar{\Psi}\left(\frac{1}{2}i\gamma_\nu\tilde{\partial}^\nu + m\right)\Psi - e(\bar{\Psi}\gamma_\alpha\Psi)A^\alpha + K_{\sigma\nu}\Theta^{\sigma\nu}, \quad (1)$$

где $\tilde{\partial}^\nu = \partial^\nu - \bar{\partial}^\nu$; Ψ – волновые функции частиц спина $\frac{1}{2}$; $K_{\sigma\nu} = \frac{2\pi}{m}(\alpha_0 F_{\sigma\mu}F_\nu^\mu + \beta_0 \tilde{F}_{\sigma\mu}\tilde{F}_\nu^\mu)$; $\Theta^{\sigma\nu} = \frac{i}{2}(\bar{\Psi}\gamma^\sigma\tilde{\partial}^\nu\Psi)$.

Здесь $\tilde{F}_{\sigma\mu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\sigma\mu\rho\nu}F^{\rho\nu}$, $F_{\sigma\mu}$ и $\tilde{F}_{\sigma\mu}$ – обычный и дуальный тензоры электромагнитного поля, α_0 и β_0 – электрическая и магнитная поляризуемости, $\epsilon_{\sigma\mu\rho\nu}$ – антисимметричный тензор Леви-Чивита ($\epsilon^{0123} = 1$).

Часть лагранжиана, связанную с поляризуемостями, можно записать в виде

$$L^{(\alpha\beta)} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}G^{\mu\nu} = K_{\sigma\nu}\Theta^{\sigma\nu},$$

где $G^{\mu\nu}$ – антисимметричный ($G^{\mu\nu} = -G^{\nu\mu}$) тензор:

$$G^{\mu\nu} = -\frac{\partial L^{(\alpha\beta)}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \frac{4\pi}{m}\left((\alpha_0 + \beta_0)(F_\rho^\mu\Theta^{\rho\nu} - F_\rho^\nu\Theta^{\rho\mu}) - \beta_0\Theta_\rho^\rho F^{\mu\nu}\right).$$

Для получения уравнений движения при взаимодействии спинорного и электромагнитного полей воспользуемся следующей системой уравнений:

$$-\frac{\partial L}{\partial A_\mu} + \partial_\nu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = 0, \quad (2)$$

$$-\frac{\partial L}{\partial \bar{\Psi}} + \partial_\nu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu \bar{\Psi})} = 0, \quad (3)$$

$$-\frac{\partial L}{\partial \Psi} + \partial_\gamma \frac{\partial L}{\partial (\partial_\gamma \Psi)} = 0, \quad (4)$$

где A_μ – вектор-потенциал электромагнитного поля.

Результаты и их обсуждение

С помощью лагранжиана (1) и выражений (2)–(4) найдем уравнения движения частицы спина $\frac{1}{2}$ в электромагнитном поле с учетом электрической (α_0) и магнитной (β_0) поляризуемостей:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = e\bar{\Psi}\gamma^\nu\Psi - \partial_\mu G^{\mu\nu}, \quad (5)$$

$$(i\gamma^\nu\bar{\partial}_\nu - m)\Psi = eA_\nu\gamma^\nu\Psi - \frac{i}{2}(\partial^\nu K_{\sigma\nu}\gamma^\sigma)\Psi - iK_{\sigma\nu}\gamma^\sigma\partial^\nu\Psi, \quad (6)$$

$$\bar{\Psi}(i\gamma^\nu\bar{\partial}_\nu - m) = e\bar{\Psi}A_\nu\gamma^\nu - \frac{i}{2}\bar{\Psi}(\partial^\nu K_{\sigma\nu}\gamma^\sigma) - i(\partial^\nu\bar{\Psi})\gamma^\sigma K_{\sigma\nu}.$$

Исходя из уравнений (5), (6), лагранжиан (1) можно представить следующим образом:

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\bar{\Psi}(i\bar{D} - m)\Psi - \frac{1}{2}\bar{\Psi}(i\bar{D} + m)\Psi, \quad (7)$$

где

$$\bar{D} = \bar{\partial}_\mu\gamma^\mu + ieA_\mu\gamma^\mu + K_{\sigma\nu}\gamma^\sigma\bar{\partial}^\nu,$$

$$\bar{D} = \gamma^\mu\bar{\partial}_\mu - ieA_\mu\gamma^\mu + \bar{\partial}^\nu K_{\sigma\nu}\gamma^\sigma.$$

Учитывая лагранжиан (7) и уравнения (5), (6), канонический тензор энергии-импульса запишем в виде

$$T_{\text{can}}^{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu A_\rho)}(\partial^\nu A_\rho) + \partial^\nu\bar{\Psi}\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu\bar{\Psi})} + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu\Psi)}\partial^\nu\Psi - g^{\mu\nu}L.$$

В результате получим

$$T_{\text{can}}^{\mu\nu} = -(F^{\mu\rho} + G^{\mu\rho})\partial^\nu A_\rho + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}G^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}.$$

Используя неоднозначность определения тензора энергии-импульса, построим метрический тензор энергии-импульса:

$$T_{\text{metr}}^{\mu\nu} = T_{\text{can}}^{\mu\nu} + \partial_\rho [(F^{\mu\rho} + G^{\mu\rho})A^\nu]. \quad (8)$$

Таким образом, $T_{\text{metr}}^{\mu\nu}$ имеет вид

$$T_{\text{metr}}^{\mu\nu} = F^{\mu\rho}F_\rho^\nu + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} + G^{\mu\rho}F_\rho^\nu - j^\mu A^\nu + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}G^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma},$$

где $j^\mu = \partial_\nu(F^{\nu\mu} + G^{\nu\mu})$.

Если в (8) выделить часть метрического тензора, связанную с поляризуемостями, то можно найти

$$T_{\text{metr}}^{(\alpha\beta)\mu\nu} = G^{\mu\rho}F_\rho^\nu - \partial_\rho G^{\mu\rho}A^\nu + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}G^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}.$$

Выполняя интегрирование по частям и используя определение $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ согласно работе [10] и принципу соответствия в системе покоя частицы, получим плотность энергии взаимодействия частицы с поляризуемостью и электромагнитного поля:

$$E = -\frac{2\pi}{m}\Theta^{00}(\alpha_0\vec{E}^2 + \beta_0\vec{H}^2),$$

где Θ^{00} – плотность энергии частицы спина $\frac{1}{2}$.

Заключение

В лагранжевом ковариантном формализме получены уравнения движения частицы спина $\frac{1}{2}$ на основании ковариантного лагранжиана взаимодействия электромагнитного поля с поляризующимися частицами. Определено соответствие между ковариантным лагранжианом, каноническим и метрическим тензорами энергии-импульса. В системе покоя частицы получена плотность энергии взаимодействия частицы с поляризуемостями и электромагнитного поля.

Библиографические ссылки

1. Brodsky SJ, Primack JR. The Electromagnetic Interaction of Composite Systems. *Annals of Physics*. 1969;52:315–365.
2. Scherer S, Korchin AYu, Koch JH. Virtual Compton scattering off the nucleon at low energies. *Physical Review C*. 1996;54:904–919. DOI: 10.1103/PhysRevC.54.904.
3. Левчук МИ, Мороз ЛГ. Гирация нуклона как одна из характеристик его электромагнитной структуры. *Известия АН БССР. Серия физико-математических наук*. 1985;1:45–54.
4. Lvov AJ, Petrun'kin VA. Dispersion Theory of Proton Compton Scattering in the First and Second Resonance Regions. *Physical Review C*. 1997;55:359–377. DOI: 10.1103/PhysRevC.55.359.
5. Hutt M-Th, L'vov AJ, Milstein AJ, Schumacher M. Compton Scattering by Nuclei. *Physics Reports*. 2000;323(6):458–595. DOI: 10.1016/S0370-1573(99)00041-1.
6. Maksimenko NV, Moroz LG. Phenomenological description polarizabilities of elementary particles in a field-theory. In: *Proceedings of the XI International young scientists school on high energy physics and relativistic nuclear physics. D2-11707*. Dubna: JINR; 1979. p. 533–543.
7. Belousova SA, Maksimenko NV. The description for the spin polarizabilities of hadrons based on the covariant Lagrangian. In: Dubinin MN, Savrin VI, editors. *QFTHEP 2000. 15th International workshop on high-energy physics and quantum field theory; 2000 September 14–10; Tver, Russia*. Moscow: Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics of the Lomonosov Moscow State University; 2000. p. 305–308.
8. Maksimenko NV, Deryuzhkova OM, Lukashevich SA. The electromagnetic characteristics of hadrons in the covariant Lagrangian approach. In: *The actual problems of particle physics. Proceeding of International School-Seminar HEP'01; 2001 August 7–16; Gomel, Belarus. Volume 2*. Dubna: JINR; 2002. p. 145–156.
9. Babusci D, Jiordano J, L'vov AJ, Matone J, Nathan AN. Low-energy Compton scattering of polarized photons on polarized nucleons. *Physical Review C*. 1998;58:1013–1041. DOI: 10.1103/PhysRevC.58.1013.
10. Bjorken JD, Drell SD. *Relativistic Quantum Mechanics*. New York: MC Graw Hill Book Company; 1964. 300 p.

References

1. Brodsky SJ, Primack JR. The Electromagnetic Interaction of Composite Systems. *Annals of Physics*. 1969;52:315–365.
2. Scherer S, Korchin AYu, Koch JH. Virtual Compton scattering off the nucleon at low energies. *Physical Review C*. 1996;54:904–919. DOI: 10.1103/PhysRevC.54.904.
3. Levchuk MI, Moroz LG. Giratsiya nuklona kak odna iz kharakteristik ego elektromagnitnoi struktury. *Izvestiya AN BSSR. Seriya fiziko-matematicheskikh nauk*. 1985;1:45–54. Russian.
4. Lvov AJ, Petrun'kin VA. Dispersion Theory of Proton Compton Scattering in the First and Second Resonance Regions. *Physical Review C*. 1997;55:359–377. DOI: 10.1103/PhysRevC.55.359.
5. Hutt M-Th, L'vov AJ, Milstein AJ, Schumacher M. Compton Scattering by Nuclei. *Physics Reports*. 2000;323(6):458–595. DOI: 10.1016/S0370-1573(99)00041-1.
6. Maksimenko NV, Moroz LG. Phenomenological description polarizabilities of elementary particles in a field-theory. In: *Proceedings of the XI International young scientists school on high energy physics and relativistic nuclear physics. D2-11707*. Dubna: JINR; 1979. p. 533–543.
7. Belousova SA, Maksimenko NV. The description for the spin polarizabilities of hadrons based on the covariant Lagrangian. In: Dubinin MN, Savrin VI, editors. *QFTHEP 2000. 15th International workshop on high-energy physics and quantum field theory; 2000 September 14–10; Tver, Russia*. Moscow: Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics of the Lomonosov Moscow State University; 2000. p. 305–308.
8. Maksimenko NV, Deryuzhkova OM, Lukashevich SA. The electromagnetic characteristics of hadrons in the covariant Lagrangian approach. In: *The actual problems of particle physics. Proceeding of International School-Seminar HEP'01; 2001 August 7–16; Gomel, Belarus. Volume 2*. Dubna: JINR; 2002. p. 145–156.
9. Babusci D, Jiordano J, L'vov AJ, Matone J, Nathan AN. Low-energy Compton scattering of polarized photons on polarized nucleons. *Physical Review C*. 1998;58:1013–1041. DOI: 10.1103/PhysRevC.58.1013.
10. Bjorken JD, Drell SD. *Relativistic Quantum Mechanics*. New York: MC Graw Hill Book Company; 1964. 300 p.

Статья поступила в редколлегию 14.11.2018.
Received by editorial board 14.11.2018.

УДК 530.1,539.12

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ЧАСТИЦ С ДИПОЛЬНЫМИ ПОЛЯРИЗУЕМОСТЯМИ В ПОЛЕ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

Е. В. ВАКУЛИНА¹⁾, Н. В. МАКСИМЕНКО²⁾

¹⁾Брянский государственный университет им. академика И. Г. Петровского,
филиал в г. Новозыбков, ул. Советская, 9, 243020, г. Новозыбков, Россия

²⁾Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины,
ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель, Беларусь

На основании релятивистско-инвариантного лагранжиана взаимодействия электромагнитного поля с частицей с поляризуемостями, который согласуется с низкоэнергетической теоремой комптоновского рассеяния, получены ковариантные уравнения движения этих частиц в электромагнитном поле. Точные решения релятивистских волновых уравнений поляризующихся частиц спина 0 и $\frac{1}{2}$ в поле плоской электромагнитной волны получены на основе дифференциальных уравнений первого порядка с помощью общих ковариантных методов Ф. И. Федорова. При решении подобного ковариантного уравнения для частицы спина $\frac{1}{2}$ был использован метод, основанный на перестановочных соотношениях матриц и теории проективных операторов. Ковариантное уравнение для частиц спина 0 в рамках теории Даффина – Кеммера – Петью в поле плоской электромагнитной волны решалось способами, основанными на введении естественного базиса и свойствах действия матриц в пространстве волновых функций. Полученные решения могут быть использованы для расчетов квантовых электродинамических процессов взаимодействия частиц в поле плоской электромагнитной волны и определения на этой основе поляризуемостей адронов.

Ключевые слова: адроны; поляризуемость; лагранжиан; комптоновское рассеяние.

EXACT SOLUTIONS OF WAVE EQUATIONS FOR PARTICLES WITH DIPOLE POLARIZABILITIES IN THE FIELD OF A PLANE ELECTROMAGNETIC WAVE

E. V. VAKULINA^a, N. V. MAKSIMENKO^b

^aBranch of the Bryansk State Academician I. G. Petrovski University,
9 Sovietskaya Street, Novozybkov 243020, Russia

^bFrancisk Skaryna Gomel State University,
104 Saveckaja Street, Gomel 246019, Belarus

Corresponding author: E. V. Vakulina (elvakulina@yandex.ru)

Based on the relativistic-invariant Lagrangian of the interaction of an electromagnetic field with a particle with polarizabilities, which agrees with the low-energy Compton scattering theorem, covariant equations of motion of these particles in an electromagnetic field are obtained. Exact solutions of the relativistic wave equations of polarized particles

Образец цитирования:

Вакулина ЕВ, Максименко НВ. Точные решения волновых уравнений для частиц с дипольными поляризуемостями в поле плоской электромагнитной волны. *Журнал Белорусского государственного университета. Физика.* 2019;1:12–18.

For citation:

Vakulina EV, Maksimenko NV. Exact solutions of wave equations for particles with dipole polarizabilities in the field of a plane electromagnetic wave. *Journal of the Belarusian State University. Physics.* 2019;1:12–18. Russian.

Авторы:

Елена Васильевна Вакулина – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры математики, физики и информатики.

Николай Васильевич Максименко – доктор физико-математических наук; профессор кафедры теоретической физики факультета физики и информационных технологий.

Authors:

Elena V. Vakulina, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of mathematics, physics and informatics.

Nikolay V. Maksimenko, doctor of science (physics and mathematics); professor at the department of theoretical physics, faculty of physics and information technologies.
maksimenko@gsu.by

of spin 0 and $\frac{1}{2}$ in the field of a plane electromagnetic wave are obtained on the basis of first-order differential equations using the general covariant methods of F. I. Fedorov. When solving such a covariant equation for a spin $\frac{1}{2}$ particle, the method based on the permutation relations of matrices and the theory of projective operators was used. When solving the covariant equation for spin zero particles in the framework of the Duffin – Kemmer – Petyu theory in the field of a plane electromagnetic wave, methods were used based on the introduction of a natural basis and the properties of the action of matrices in the space of wave functions. The solutions obtained can be used to calculate quantum electrodynamic processes of the interaction of particles in the field of a plane electromagnetic wave and to determine on this basis the polarizabilities of hadrons.

Key words: hadrons; polarizability; Lagrangian; Compton scattering.

Введение

Свойства элементарных частиц проявляются в их взаимодействиях. Так, у адронов при взаимодействии с электромагнитным полем имеют место дипольные магнитные и квадрупольные моменты. В процессах рассеяния фотонов важную роль играют такие структурные константы, как поляризуемости адронов, интерпретация которых была получена на основе общих принципов релятивистской квантовой теории поля [1–3].

В работах [4–6] в рамках релятивистской квантовой теории поля построены эффективные лагранжианы двухфотонного взаимодействия с адронами с учетом поляризуемостей, которые согласуются с амплитудами в низкоэнергетическом представлении [1–3]. На основе этих лагранжианов получены релятивистские квантово-полевые уравнения движения частиц с поляризуемостями в электромагнитном поле [7; 8].

В процессах взаимодействия адронов с электромагнитным полем проявляются свойства как самих адронов, так и электромагнитного поля. С помощью эффективных лагранжианов можно изучать различные процессы адронной электродинамики. Особый интерес вызывают исследования влияния интенсивного электромагнитного поля на проявления важных квантовых и релятивистских процессов взаимодействия элементарных частиц [9].

Основой исследований процессов взаимодействия адронов во внешних электромагнитных полях является нахождение точных решений соответствующих релятивистских волновых уравнений. Для взаимодействия адронов спина $\frac{1}{2}$ с учетом дипольных поляризуемостей с линейно-поляризованным электромагнитным полем точные решения определены на основе релятивистских волновых уравнений первого порядка и представлены в работах [10–12].

Настоящая работа посвящена точному решению релятивистских волновых уравнений для адронов со спинами 0 и $\frac{1}{2}$ с учетом их дипольных поляризуемостей во внешнем электромагнитном поле.

Частица спина $\frac{1}{2}$ в поле плоской электромагнитной волны с учетом поляризуемостей

Решение уравнения движения частицы спина $\frac{1}{2}$ в поле плоской электромагнитной волны обычно получают приведением дифференциального уравнения первого порядка к дифференциальному уравнению второго порядка [13]. Метод решения уравнения указанного движения, предложенный в [10], позволяет решать дифференциальные уравнения первого порядка в ковариантной форме.

Следуя работам [10; 11], найдем решение дифференциального уравнения первого порядка движения частицы спина $\frac{1}{2}$ в поле плоской электромагнитной волны в ковариантной форме с учетом поляризуемостей.

В [7] получен эффективный лагранжиан взаимодействия электромагнитного поля с частицей спина $\frac{1}{2}$ с учетом дипольных поляризуемостей:

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{\psi} \vec{\partial}_\mu \gamma_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi + K_{\sigma\nu} \theta_{\sigma\nu}, \quad (1)$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$; ψ – биспиноры; $\vec{\partial}_\mu = \vec{\partial}_\mu - \vec{\partial}_\mu$ – четырехмерный вектор, определяемый компонентами $a_\mu \{ \vec{a}, ia_0 \}$. Тензоры в последнем слагаемом имеют вид

$$K_{\sigma\nu} = \frac{2\pi}{m} (\alpha_E F_{\sigma\mu} F_{\mu\nu} + \beta_M \tilde{F}_{\sigma\mu} \tilde{F}_{\mu\nu}),$$

$$\theta_{\sigma\nu} = \frac{1}{2} \bar{\Psi} \gamma_\sigma \tilde{\partial}_\nu \Psi,$$

где α_E и β_M – электрическая и магнитная дипольная поляризуемости частицы спина $\frac{1}{2}$; $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$.

Из лагранжиана (1) следует ковариантное уравнение движения частицы спина $\frac{1}{2}$ в электромагнитном поле [7]

$$\left(\hat{D} + m + \frac{1}{2} D_\mu (K_{\sigma\mu} \gamma_\sigma) + K_{\sigma\mu} \gamma_\sigma D_\mu \right) \Psi = 0, \quad (2)$$

где $\hat{D} = D_\mu \gamma_\mu$, матрицы γ_μ удовлетворяют перестановочным соотношениям $\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}$; $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$.

На основании лагранжиана (1) и уравнения (2) в работе [7] показано согласование с низкоэнергетическим представлением амплитуды комптоновского рассеяния на нуклоне [1; 2]. Для решения уравнения (2), когда частица взаимодействует с полем плоской электромагнитной волны, будем использовать подход из [12].

В случае плосковолнового поля вектор-потенциал зависит от $\varphi = kx = k_\mu x_\mu$, т. е.

$$A_\mu = A_\mu(\varphi). \quad (3)$$

При решении уравнения (2) будем считать, что

$$k^2 = k_\mu^2 = 0$$

и потенциал (3) удовлетворяет условию Лоренца:

$$\partial_\mu A_\mu = A'_\mu k_\mu = 0,$$

где $A'_\mu = \frac{\partial A_\mu(\varphi)}{\partial \varphi}$. В этом случае тензор электромагнитного поля выражается в следующем виде:

$$F_{\mu\nu} = k_\mu A'_\nu - k_\nu A'_\mu.$$

Если воспользоваться соотношением

$$\tilde{F}_{\sigma\nu} \tilde{F}_{\nu\mu} = F_{\sigma\nu} F_{\nu\mu} + \frac{1}{2} \delta_{\mu\sigma} F_{\nu\rho} F_{\nu\rho},$$

то тензор $K_{\sigma\mu}$ можно представить так:

$$K_{\sigma\mu} = \frac{2\pi}{m} \left[(\alpha_E + \beta_M) F_{\sigma\nu} F_{\nu\mu} + \frac{\beta_M}{2} \delta_{\mu\sigma} F_{\nu\rho} F_{\nu\rho} \right]. \quad (4)$$

Поскольку потенциалы $A'_\mu(\varphi)$ удовлетворяют условию Лоренца, то из (4) следует

$$K_{\sigma\mu} = \frac{2\pi}{m} (\alpha_E + \beta_M) k_\sigma k_\mu (A')^2. \quad (5)$$

Удлиненная производная $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ от тензора (5) равна нулю:

$$D_\mu K_{\sigma\mu} = \frac{2\pi}{m} (\alpha_E + \beta_M) \hat{k}_\sigma k^2 \left[(A')^2 \right]' = 0.$$

Таким образом, уравнение (2) можно записать в виде

$$\left(\hat{D} + m + K_{\sigma\mu} \gamma_\sigma D_\mu \right) \Psi = 0. \quad (6)$$

Следуя работам [10–12], решение уравнения (6) представим как

$$\Psi = \chi(\varphi) e^{i(px - \varepsilon(\varphi))}, \quad (7)$$

где $\varepsilon(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{b^2 + m^2}{2kp} d\varphi'$, $b_\mu = p_\mu - eA_\mu$. В этом случае функция $\chi(\varphi)$ удовлетворяет уравнению

$$\hat{k} \chi' + \left[(m + i\hat{c}) + i\Omega \hat{k} \right] \chi = 0, \quad (8)$$

где обозначено

$$c_\mu = b_\mu - k_\mu \frac{b^2 + m^2}{2kp}, \quad c^2 = -m^2; \quad \Omega = \frac{2\pi}{m}(\alpha_E + \beta_M)(pk)(A')^2.$$

Умножив уравнение (8) на матрицу \hat{k} , получим

$$\hat{k}(m + i\hat{c})\chi = 0.$$

Тогда, согласно [10], функцию χ можно представить в виде

$$\chi(\varphi) = (m - i\hat{c})\hat{k}\chi_1(\varphi). \quad (9)$$

Подстановка (9) в (8) приводит к уравнению

$$k\chi_1' + i\Omega\hat{k}\chi_1 = 0. \quad (10)$$

Решение для (10) представляется следующим образом:

$$k\chi_1(\varphi) = e^{-i\int_0^\varphi \Omega(\varphi')d\varphi'} \hat{k}\chi_0, \quad (11)$$

где χ_0 – биспинор, который не зависит от φ и удовлетворяет уравнению Дирака для свободно движущейся частицы.

Учитывая соотношения (9) и (11) в определении функции (7), получим выражение общего решения уравнения (2) взаимодействия частицы с поляризуемостями с полем плоской электромагнитной волны:

$$\psi(x) = (m - i\hat{c})\hat{k}\chi_0 e^{i\left(px - \varepsilon(\varphi) - \int_0^\varphi \Omega(\varphi')d\varphi'\right)}. \quad (12)$$

Если у частицы отсутствуют поляризуемости, т. е. $\alpha_E + \beta_M = 0$, то волновая функция (12) переходит в известное решение Волкова [14; 15].

Мезон спина 0 в поле плоской электромагнитной волны

Для получения точного решения ковариантного дифференциального уравнения первого порядка взаимодействия с учетом поляризуемостей теоретическим методом [10] воспользуемся формализмом Даффина – Кеммера – Петью. В этом формализме лагранжиан взаимодействия электромагнитного поля с мезоном спина 0 имеет вид [8]

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{\psi}\partial_\mu\beta_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + ie\bar{\psi}\hat{A}\psi + K_{\sigma\nu}\theta_{\sigma\nu}. \quad (13)$$

В уравнении (13) $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$ – пятимерные волновые функции скалярных частиц, а четырехмерный импульс определяется компонентами $a_\mu \{\vec{a}, a_4 = ia_0\}$. Пятимерные матрицы $\beta = \beta_\mu^5$ являются матрицами Даффина – Кеммера и удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\beta_\mu\beta_\nu\beta_\rho + \beta_\rho\beta_\nu\beta_\mu = \delta_{\mu\nu}\beta_\rho + \delta_{\rho\nu}\beta_\mu.$$

Тензоры в (13) определены следующим образом:

$$K_{\sigma\nu} = \frac{2\pi}{m}[\alpha_E F_{\sigma\mu} F_{\mu\nu} + \beta_M \tilde{F}_{\sigma\mu} \tilde{F}_{\mu\nu}],$$

$$\theta_{\sigma\nu} = \frac{1}{2}\bar{\psi}\beta_\sigma\tilde{\partial}_\nu\psi,$$

где стрелки над производными указывают их действие на волновые функции частицы в пятимерном пространстве; α_E и β_M – электрическая и магнитная поляризуемости пиона.

Уравнение взаимодействия пиона с электромагнитным полем с учетом заряда и поляризуемостей, как следует из (13), можно записать в виде

$$\left[\hat{D} + m + \frac{1}{2}D_\mu K_{\sigma\mu}\beta_\sigma + K_{\sigma\mu}\beta_\sigma D_\mu \right] \psi = 0, \quad (14)$$

где $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$; $\hat{D} = D_\mu\beta_\mu$.

С использованием метода функций Грина в работе [8] установлено, что амплитуда комптоновского рассеяния, которая следует из лагранжиана (13), в низкоэнергетическом пределе имеет вид [12]

$$M = \left(\frac{e^2}{m} + 4\pi\omega^2\alpha_E \right) \left(\vec{e}^{(\lambda_2)*} \vec{e}^{(\lambda_1)} \right) + 4\pi\omega^2\beta_M \left[\vec{n}_2 \vec{e}^{(\lambda_2)*} \right] \left[\vec{n}_1 \vec{e}^{(\lambda_1)} \right],$$

где ω – энергия фотонов; \vec{n}_1 и \vec{n}_2 – единичные векторы, направленные по импульсам падающего и рассеянного фотонов \vec{k}_1 и \vec{k}_2 ; $\vec{e}^{(\lambda_1)}$ и $\vec{e}^{(\lambda_2)}$ – соответствующие векторы поляризации.

Поскольку установлено, что α_E и β_M являются поляризуемостями комптоновского рассеяния, рассмотрим решение уравнения (14) в случае взаимодействия пиона с полем плоской электромагнитной волны с учетом поляризуемостей.

Потенциал A_μ поля плоской электромагнитной волны зависит от координат через инвариантную фазу $\varphi = kx$:

$$A_\mu = A_\mu(\varphi) \quad (15)$$

– и удовлетворяет условию Лоренца

$$\partial_\mu A_\mu = 0,$$

которое, согласно (15), примет вид

$$\partial_\mu A_\mu = k_\mu A'_\mu = 0,$$

где $k \{ \vec{k}, k_4 = i\omega \}$, $k^2 = 0$; $A'_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial \varphi}$.

В случае когда внешнее поле является плоской электромагнитной волной, решение уравнения (14) определим, следуя работе [10]:

$$\Psi(x) = f(\varphi) e^{i(px)}. \quad (16)$$

Подставляя (16) в (14) и учитывая, что

$$K_{\sigma\mu} = \left(\frac{2\pi}{m} \right) (\alpha_E + \beta_M) k_\sigma k_\mu (A')^2,$$

а производная от тензора $K_{\sigma\mu}$ равна нулю, приходим к равенству

$$D_\mu K_{\sigma\mu} \beta_\sigma = 0,$$

и тогда получим уравнение

$$\hat{k} f' + \{ i\hat{b} + m + \Omega \hat{k} \} f = 0, \quad (17)$$

где $b_\mu = p_\mu - qA_\mu$; $\Omega = \left(\frac{2\pi}{m} \right) (\alpha_E + \beta_M) (pk) (A')^2$.

Согласно [10], решение уравнения (17) можно представить в виде

$$f(\varphi) = \chi(\varphi) e^{-i\varepsilon(\varphi)},$$

где $\varepsilon(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{b^2 + m^2}{2kp} d\varphi'$.

В результате из (17) получим

$$\hat{k} \chi' + \left[(m + i\hat{c}) + i\Omega \hat{k} \right] \chi = 0. \quad (18)$$

В уравнении (18)

$$c_\mu = b_\mu - k_\mu \frac{b^2 + m^2}{2kp}, \quad c^2 = -m^2.$$

Следуя [10], представим χ в виде пятимерного столбца

$$\chi = \begin{pmatrix} mu_0 \\ u_\mu \end{pmatrix},$$

где $\mu = 1, 2, 3, 4$.

Поскольку $\hat{k} = k_\mu \beta_\mu$, то, используя явный вид пятимерных матриц, можно показать, что

$$\hat{k} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В таком случае свертки $\hat{k}\chi$ и $\hat{c}\chi$ имеют вид

$$\hat{k}\chi = \begin{pmatrix} k_\mu u_\mu \\ m u_0 k_\mu \end{pmatrix}, \quad \hat{c}\chi = \begin{pmatrix} c_\mu u_\mu \\ m u_0 c_\mu \end{pmatrix}.$$

В итоге (18) распадается на два уравнения вида

$$\begin{aligned} (ku)' + m^2 u_0 + i(cu) + i\Omega(ku) &= 0, \\ u_\mu + (k_\mu u'_0) + i u_0 c_\mu + i\Omega u_0 k_\mu &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Из второго уравнения системы (19) следует, что

$$u_\mu = -(k_\mu u'_0) - i u_0 c_\mu - i\Omega u_0 k_\mu.$$

Умножив это равенство на вектор k_μ , получим

$$(ku) = -i u_0 (ck),$$

а производная примет вид

$$(ku)' = -i(u_0 c)' k. \quad (20)$$

Подставляя (20) в первое уравнение системы (19), приходим к выводу, что

$$(u'_0 + i\Omega u_0) \hat{c}k = 0. \quad (21)$$

Решением для (21) является

$$u_0(\varphi) = \exp\left[-i \int \Omega d\varphi\right].$$

Из второго уравнения системы (20) следует

$$u_\mu = -i u_0 c_\mu.$$

Таким образом, общее решение уравнения (14) имеет вид

$$\Psi(x) = N \begin{pmatrix} im \\ c_\mu \end{pmatrix} e^{i\left(px - \varepsilon(\varphi) - \int_0^\varphi \Omega d\varphi'\right)},$$

где N – нормированный множитель.

Заключение

Для формализма Даффина – Кеммера – Петью получен лагранжиан взаимодействия электромагнитного поля с частицей спина 0, обладающей дипольными электрической и магнитной поляризуемостями. Выполнено согласование эффективных релятивистских лагранжианов взаимодействия частиц спина 0 и $\frac{1}{2}$ с электромагнитным полем с амплитудами комптоновского рассеяния, которые установлены на основе низкоэнергетических теорем.

Волновые функции типа Д. М. Волкова для частиц спина 0 и $\frac{1}{2}$ в поле плоской электромагнитной волны, как правило, получают путем решения ковариантных дифференциальных уравнений второго порядка. В этой работе точные решения релятивистских волновых уравнений поляризующихся частиц найдены на основе дифференциальных уравнений первого порядка.

Библиографические ссылки

1. Петрунькин ВА. Двухфотонные взаимодействия элементарных частиц при малых энергиях. *Труды ФИАН*. 1968;41:165–223.
2. Максименко НВ, Шульга СГ. Низкоэнергетическое разложение амплитуды комптоновского рассеяния на адроне и одновременные коммутаторы токов. *Ядерная физика*. 1990;52(2-8):524–534.
3. Raguza S. Third-order spin polarizabilities of the nucleon: I. *Physical Review D*. 1993;47(9):3757–3767.
4. Максименко НВ, Мороз ЛГ. Феноменологическое описание поляризуемостей элементарных частиц в полевой теории. В: *Международная школа молодых ученых по физике высоких энергий и релятивистской ядерной физике*. Дубна: Объединенный институт ядерных исследований; 1979. с. 533–543.
5. Андреев ВВ, Максименко НВ. Поляризуемость элементарных частиц в теоретико-полевым подходе. *Проблемы физики, математики и техники*. 2011;4(9):7–11.
6. Vakulina EV, Maksimenko NV. Spin Polarizabilities and Characteristics of Spin-1 Hadrons Related to Parity Nonconservation in the Duffin – Kemmer – Petiau Formalism. *Physics of Particles and Nuclei Letters*. 2017;14(5):713–718. DOI: 10.1134/S1547477117050120.
7. Andreev VV, Deryuzhkova OM, Maksimenko NV. Covariant equations of motion of a spin $\frac{1}{2}$ particle in an electromagnetic field with allowance for polarizabilities. *Russian Physics Journal*. 2014;56(9):1069–1075. DOI: 10.1007/s11182-014-0141-x.
8. Вакулина ЕВ, Максименко НВ. Поляризуемость пиона в формализме Даффина – Кеммера. *Проблемы физики, математики и техники*. 2013;3:16–18.
9. Ритус ВИ. Квантовые эффекты при взаимодействии элементарных частиц с интенсивным электромагнитным полем. В: Гинзбург ВЛ, редактор. *Квантовая электродинамика явлений в интенсивных полях. Труды ФИАН. Том III*. Москва: Наука; 1979. с. 5–151.
10. Федоров ФИ. *Группа Лоренца*. Минск: Наука и техника; 1979. 384 с.
11. Радюк АФ. Поляризуемая частица со спином $\frac{1}{2}$ в поле плоской электромагнитной волны и в постоянном магнитном поле. В: *Ковариантные методы в теоретической физике*. Минск: Институт физики АН БССР; 1986. с. 93–101.
12. Крылов ВБ, Радюк АФ, Федоров ФИ. *Спиновые частицы в поле плоской электромагнитной волны*. [Препринт № 113]. Минск: Институт физики АН БССР; 1976. 59 с.
13. Берестецкий ВБ, Лифшиц ЕМ, Питаевский ЛП. *Квантовая электродинамика*. Москва: Наука; 1980. 704 с.
14. Волков ДМ. Электрон в поле плоских неполяризованных электромагнитных волн с точки зрения уравнения Дирака. *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 1937;7:1286–1289.
15. Pardy M. Volkov solution for two laser beams and ITER. arXiv:hep-ph/05071414v1.

References

1. Petrun'kin VA. [Two-photon interactions of elementary particles at low energies]. *Trudy FIAN*. 1968;41:165–223. Russian.
2. Maksimenko NV, Shulga SG. Low-energy expansion of the Compton scattering amplitude on hadron and simultaneous current switches. *Yadernaya fizika*. 1990;52(2-8):524–534. Russian.
3. Raguza S. Third-order spin polarizabilities of the nucleon: I. *Physical Review D*. 1993;47(9):3757–3767.
4. Maksimenko NV, Moroz LG. Fenomenologicheskoe opisanie polyarizuemostei elementarnykh chastits v polevoi teorii. In: *Mezhdunarodnaya shkola molodykh uchenykh po fizike vysokikh energii i relyativistskoi yadernoi fizike* [International School of young scientists in high energy physics and relativistic nuclear physics]. Dubna: Joint Institute for Nuclear Research; 1979. p. 533–543. Russian.
5. Andreev VV, Maksimenko NV. The polarizability of elementary particles in the field theory approach. *Problems of physics, mathematics and technics*. 2011;4(9):7–11. Russian.
6. Vakulina EV, Maksimenko NV. Spin Polarizabilities and Characteristics of Spin-1 Hadrons Related to Parity Nonconservation in the Duffin – Kemmer – Petiau Formalism. *Physics of Particles and Nuclei Letters*. 2017;14(5):713–718. DOI: 10.1134/S1547477117050120.
7. Andreev VV, Deryuzhkova OM, Maksimenko NV. Covariant equations of motion of a spin $\frac{1}{2}$ particle in an electromagnetic field with allowance for polarizabilities. *Russian Physics Journal*. 2014;56(9):1069–1075. DOI: 10.1007/s11182-014-0141-x.
8. Vakulina EV, Maksimenko NV. Polarizability of pion in Duffin – Kemmer formalism. *Problems of physics, mathematics and technics*. 2013;3:16–18. Russian.
9. Ritus VI. [Quantum effects in the interaction of elementary particles with an intense electromagnetic field]. In: Ginzburg VL, editor. *Kvantovaya elektrodinamika yavlenii v intensivnykh polyakh. Trudy FIAN. Tom III* [Quantum electrodynamics of phenomena in intense fields. Proceedings of the Physical Institute of the Academy of Sciences. Volume 111]. Moscow: Nauka; 1979. p. 5–151. Russian.
10. Fedorov FI. *Gruppa Lorentsa* [Lorentz Group]. Minsk: Nauka i tekhnika; 1979. 384 p. Russian.
11. Raduk AF. [Polarizing particle with spin $\frac{1}{2}$ in the field of a plane electromagnetic wave and in a constant magnetic field]. In: *Kovariantnye metody v teoreticheskoi fizike* [Covariant methods in theoretical physics]. Minsk: Institut fiziki AN BSSR; 1986. p. 93–101. Russian.
12. Krylov VB, Raduk AF, Fedorov FI. *Spinovye chastitsy v pole ploskoi elektromagnitnoi volny* [Spin particles in the field of a plane electromagnetic wave]. [Preprint No. 113]. Minsk: Institut fiziki AN BSSR; 1976. 59 p. Russian.
13. Beresteckiy VB, Lifshic EM, Pitaevskiy LP. *Kvantovaya elektrodinamika* [Kvantovaya elektrodinamika]. Moscow: Nauka; 1980. 704 p. Russian.
14. Volkov DM. Electron in the field of flat unpolarized electromagnetic waves from the point of view of the Dirac equation. *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki*. 1937;7:1286–1289. Russian.
15. Pardy M. Volkov solution for two laser beams and ITER. arXiv:hep-ph/05071414v1.

УДК 535.371+615.277.3

ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ИСТОЧНИКА ФОТОВОЗДЕЙСТВИЯ ПРИ ФОТОХИМИОТЕРАПИИ ОПУХОЛЕВЫХ ТКАНЕЙ ЛАБОРАТОРНЫХ ЖИВОТНЫХ

**М. П. САМЦОВ¹⁾, Д. С. ТАРАСОВ¹⁾,
Е. С. ВОРОПАЙ²⁾, Л. С. ЛЯШЕНКО²⁾, П. Т. ПЕТРОВ³⁾,
В. М. НАСЕК³⁾, А. О. САВИН³⁾, Р. Д. ЗИЛЬБЕРМАН³⁾**

¹⁾Институт прикладных физических проблем им. А. Н. Севченко БГУ,
ул. Курчатова, 7, 220108, г. Минск, Беларусь

²⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

³⁾Институт биоорганической химии Национальной академии наук Беларуси,
ул. Академика В. Ф. Купревича, 5, корп. 2, 220141, г. Минск, Беларусь

Приведены результаты исследований в опытах *in vitro* и *in vivo* эффективности повреждения опухолевых тканей при фотодинамической терапии с фотосенсибилизатором на основе индотрикарбодцианинового красителя с использованием излучения полупроводникового лазера с длиной волны 740 нм или светодиода с максимумом

Образец цитирования:

Самцов МП, Тарасов ДС, Воропай ЕС, Ляшенко ЛС, Петров ПТ, Насек ВМ, Савин АО, Зильберман РД. Оптимизация параметров источника фотОВОЗДЕЙСТВИЯ при фотохимиотерапии опухолевых тканей лабораторных животных. *Журнал Белорусского государственного университета. Физика*. 2019;1:19–26.

For citation:

Samtsov MP, Tarasov DS, Voropay ES, Lyashenko LS, Petrov PT, Nasek VM, Savin AO, Zilberman RD. Photodynamic therapy using the photosensitizer based on tricarbo-cyanine dye with polyethylene glycol on a model for tumor bearing laboratory animals. *Journal of the Belarusian State University. Physics*. 2019;1:19–26. Russian.

Авторы:

Михаил Петрович Самцов – доктор физико-математических наук, доцент; заведующий лабораторией спектроскопии.

Дмитрий Сергеевич Тарасов – научный сотрудник лаборатории спектроскопии.

Евгений Семенович Воропай – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры лазерной физики и спектроскопии физического факультета.

Людмила Сергеевна Ляшенко – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры лазерной физики и спектроскопии физического факультета.

Петр Тимофеевич Петров – кандидат химических наук; заведующий отделом фармакологии и фармации.

Владимир Михайлович Насек – кандидат медицинских наук; заведующий лабораторией токсикологии.

Александр Олегович Савин – научный сотрудник лаборатории токсикологии.

Роман Дмитриевич Зильберман – научный сотрудник лаборатории токсикологии.

Authors:

Michael P. Samtsov, doctor of science (physics and mathematics), docent; head of the laboratory of spectroscopy.

samtsov@bsu.by

Dmitriy S. Tarasov, researcher at the laboratory of spectroscopy.

dmitrij-tarasov@list.ru

Eugeni S. Voropay, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of laser physics and spectroscopy, faculty of physics.

voropay@bsu.by

Liudmila S. Lyashenko, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of laser physics and spectroscopy, faculty of physics.

lyashenko@bsu.by

Peter T. Petrov, PhD (chemistry); head of the department of pharmacology and pharmacy.

petr_petrov@tut.by

Vladimir M. Nasek, PhD (medicine); head of the laboratory of toxicology.

labtox@yandex.by

Aliaksandr O. Savin, researcher at the laboratory of toxicology.

labtox@yandex.by

Raman D. Zilberman, researcher at the laboratory of toxicology.

labtox@yandex.by

на 780 нм. Установлено, что при воздействии квантами света с разной энергией на фотосенсибилизатор в клетках HeLa и при условии поглощения им одинакового количества фотонов в единицу времени доля погибших раковых клеток для обоих случаев одинакова. В экспериментах на лабораторных животных *in vivo* для штамма опухолей (саркома M-1) показано, что при увеличении длины волны фотовоздействия с 740 до 780 нм и поддержании одинакового числа поглощенных квантов света в единицу времени в единице объема опухолей глубина их повреждения возрастает в 1,5 раза. Наблюдаемые изменения связаны как с различием в пропускании тканей *in vivo* при увеличении длины волны использованного светового излучения, так и с ростом локальной концентрации кислорода вследствие фотодиссоциации оксигемоглобина.

Ключевые слова: фотосенсибилизатор; опухолевые ткани; фотодинамическая терапия; некроз; излучение лазера; светодиод; линзовый растр.

PHOTODYNAMIC THERAPY USING THE PHOTOSENSITIZER BASED ON TRICARBOCYANINE DYE WITH POLYETHYLENE GLYCOL ON A MODEL FOR TUMOR BEARING LABORATORY ANIMALS

M. P. SAMTSOV^a, D. S. TARASOV^a,
E. S. VOROPAY^b, L. S. LYASHENKO^b, P. T. PETROV^c,
V. M. NASEK^c, A. O. SAVIN^c, R. D. ZILBERMAN^c

^aA. N. Sevchenko Institute of Applied Physical Problems, Belarusian State University,
7 Kurčatava Street, Minsk 220108, Belarus

^bBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

^cInstitute of Bioorganic Chemistry, National Academy of Sciences of Belarus,
5 Akademika V. F. Kupreviča Street, 2 building, Minsk 220141, Belarus

Corresponding author: D. S. Tarasov (dmitrij-tarasov@list.ru)

Comparative studies of the effectiveness of photodynamic therapy during the experiments *in vitro* and *in vivo* have been performed when using radiation of a semiconductor laser with the wavelength 740 nm and of a light-emitting diode with the wavelength 780 nm. It has been established that the percentage of dead cancer cells is the same when the photosensitizer in HeLa cells is subjected to the photoeffect of light quanta with different energies and when absorption of the identical numbers of photons per unit time by the photosensitizer is ensured. In the experiments with laboratory animals *in vivo* for a strain of M-1 sarcoma tumors it has been established that, due to an increase in the photoexposure wavelength from 740 to 780 nm and owing to the maintained the same numbers of absorbed light quanta per unit time per unit volume of the tumors, a depth of their damage increased by a factor of 1.5. The observed changes are associated both with the differences in the transmission of tissues *in vivo* as the wavelength of light radiation increases and with the growing local oxygen concentration due to the photodissociation of oxyhemoglobin.

Key words: photosensitizer; tumor tissues; photodynamic therapy; necrosis.

Введение

Эффективность фотодинамической терапии (ФДТ) злокачественных опухолей в первую очередь определяется применяемым фотосенсибилизатором [1–4], а также зависит от условий и характеристик аппаратных средств фотовоздействия [5]. Как правило, в качестве источника света используется лазерное излучение с длиной волны в области максимума полосы поглощения фотосенсибилизатора. Вместе с тем появились светодиоды, с помощью которых в опухолевых тканях можно обеспечивать сравнимую с лазерами плотность мощности излучения. Для поверхностных локализаций опухолей такие источники света обладают преимуществами по сравнению с лазерами в силу значительно меньшей стоимости. В то же время при разработке аппаратуры и регламента ее использования в клинической практике необходимо сопоставление эффективности процесса ФДТ для различных применяемых источников.

Объекты и методика эксперимента

Проведено сравнение влияния параметров лазерного и светодиодного источников света на эффективность фототерапии злокачественных опухолей у подопытных животных. Использовался полупроводниковый лазер с длиной волны излучения 740 нм и максимальной мощностью 1 Вт и светодиод с длиной волны в максимуме полосы испускания 780 нм и световой мощностью до 1 Вт. В качестве

фотосенсибилизатора применялся водорастворимый, обладающий высокой биосовместимостью индо-трикарбоцианиновый краситель [6; 7]. В экспериментах *in vivo* эффективность фотохимиотерапевтического действия красителя оценивалась по глубине некроза солидных опухолей лабораторных животных. При расчете эффективной поглощенной световой дозы учитывалось поглощение красителя в модельных средах, в частности в клетках HeLa. Для регистрации распределения интенсивности по сечению пучка излучения применялась камера компании *ORMINS* (Беларусь).

Исследования проводили на монослой опухолевых клеток HeLa (плоскоклеточный рак шейки матки человека), который выращен в питательной среде 199 с добавлением 10 % сыворотки крови телят и 100 мг/мл канамицина. По завершении фотооблучения флаконы выдерживали 20 ч в термостате при 37 °С в темноте. Затем монослой обрабатывали 0,02 % раствором Версена и проводили подсчет количества клеток с помощью камеры Горяева. Долю живых клеток в опытных группах определяли по отношению к контролю. На каждую точку использовали по 3 флакона с клетками.

В качестве экспериментальных модельных систем *in vivo* использованы солидные перевиваемые опухоли белых беспородных крыс – саркома М-1 (Са М-1). Исследования проводили спустя 9–10 сут после перевивки Са М-1. В каждой контрольной и опытной группе было не менее 5 крыс. Для оценки глубины некрозов в опухолях через 24 ч после сеанса ФДТ крысам внутривенно вводился 0,6 % раствор синьки Эванса (1 мл/100 г массы тела животного). Затем через 2 ч животные были выведены из эксперимента с использованием общепринятых методов эвтаназии (хлороформ), опухоли иссечены, фиксированы в 10 % растворе формалина в течение 2 ч и заморожены. После этого сделаны гистолографические срезы опухолей (2 мм толщиной по диаметру опухоли) с последующей фиксацией их изображений с помощью фотокамеры.

Мощность падающего на образцы света определялась с помощью измерителя LM-2. Спектры поглощения регистрировались спектрофотометром PV 1251A фирмы *Solar* (Беларусь). Спектры флуоресценции красителя *in vivo* регистрировались с применением спектрометрического комплекса, разработанного в Институте прикладных физических проблем имени А. Н. Севченко БГУ [8; 9]. Подвод возбуждающего излучения ($\lambda = 683$ нм) к образцу и сбор света флуоресценции в спектрометрическом комплексе осуществлялись посредством световода.

Результаты и их обсуждение

Сравнение эффективности фотохимиотерапии при использовании источников света с различным спектральным составом следует проводить с учетом того, что степень повреждения клеток в значительной мере зависит от плотности мощности падающего света [10–13]. Следует учитывать, что в основе ФДТ лежат фотохимические реакции, скорость протекания которых зависит как от свойств фотосенсибилизатора, параметров светового излучения, так и от наличия в среде кислорода [14]. Последнее обстоятельство связано с потреблением кислорода во время сеанса ФДТ, что приводит к значительному уменьшению уровня оксигенации опухолевых тканей при использовании достаточно высокой плотности мощности светового потока и, соответственно, уменьшению эффективности их повреждения [14; 15]. Поэтому фотоповреждение опухолевых клеток при световом воздействии излучением с длиной волны 740 и 780 нм необходимо проводить при выполнении ряда условий.

Для создания одинаковой скорости расхода кислорода и красителя в процессе фотовоздействия для каждой из использованных длин волн излучения обеспечивалось одинаковое количество поглощенных фотосенсибилизатором квантов света в единицу времени в биологических структурах. Это достигалось путем выбора плотности мощности падающего на образец света для каждой длины волны. Соотношение этих величин определялось путем анализа спектра пропускания T полиметинового красителя в клетках HeLa (рис. 1), так как величина $(1 - T)$ пропорциональна количеству поглощенных фотосенсибилизатором фотонов. Поэтому для обеспечения условия поглощения фотосенсибилизатором одинакового количества квантов света в единицу времени при использовании для фотовоздействия света разных источников (с длиной волны 740 или 780 нм) отношение плотности мощности одного источника света к плотности мощности другого выбиралось равным обратной величине соотношения значений $(1 - T)$ для двух соответствующих длин волн. Установлено, что для обеспечения одинакового числа поглощенных фотосенсибилизатором квантов света в единицу времени для указанных источников плотность мощности излучения на 780 нм должна быть больше в 2,3 раза по сравнению с излучением на 740 нм (с учетом различий энергии фотонов для использованных источников света).

Фотовоздействие осуществлялось в течение одинакового времени для каждого источника света. Основанием для использования спектра поглощения красителя в клетках HeLa при определении коэффициента для фотовоздействия в тканях *in vivo* является то, что спектры флуоресценции фотосенсибилизатора в клеточной культуре HeLa и в тканях *in vivo* совпадают по положению и форме (см. рис. 1).

При этом следует учитывать, что в спектральном диапазоне, соответствующем полосе флуоресценции исследованного красителя, коэффициент рассеяния биотканей принимает практически постоянное значение [16], следовательно, не может оказывать существенного влияния на положение и форму его спектра.

В то же время значительное влияние на спектрально-люминесцентные характеристики исследованного класса соединений оказывает полярность среды [11]. Поэтому наблюдаемое совпадение спектров флуоресценции фотосенсибилизатора *in vivo* и *in vitro*, обусловленное одинаковым микроокружением молекул в этих системах, дает основание предположить идентичность в них и спектров поглощения.

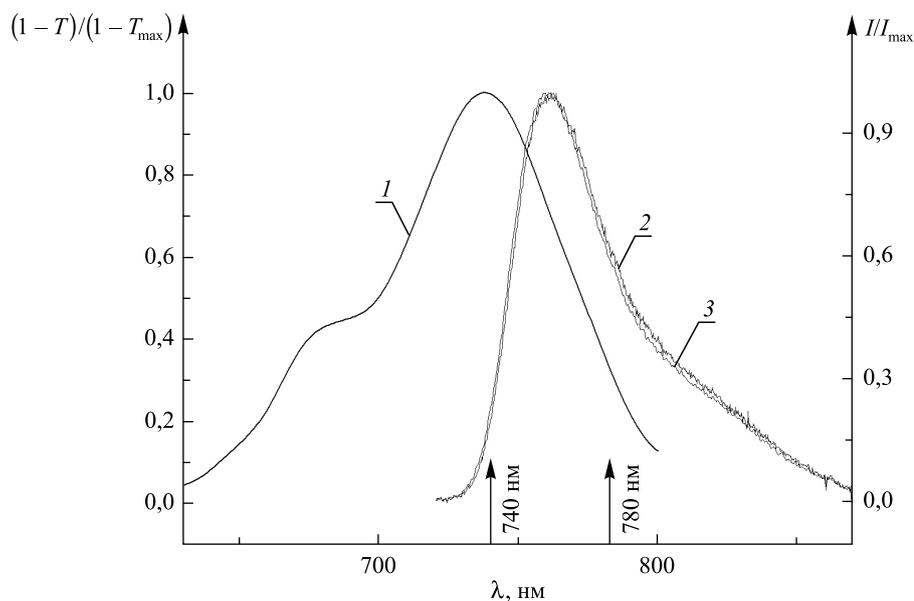
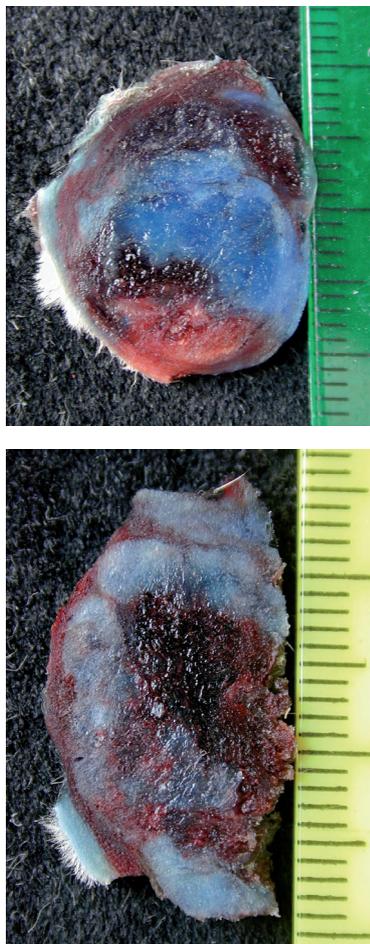


Рис. 1. Спектр поглощения (1) и флуоресценции (2, 3) фотосенсибилизатора в клетках HeLa (1, 3), *in vivo* с учетом влияния поглощения биоткани (2)
Fig. 1. Absorption (1) and fluorescence (2, 3) spectrum of the photosensitizer in cells HeLa (1, 3), *in vivo* in view of impact absorption biological tissue (2)

В результате проведения экспериментальных исследований *in vitro* установлено, что при указанных условиях фотовоздействия доля погибших клеток HeLa для обоих использованных источников света практически одинакова. Оптическая плотность суспензии клеток HeLa, содержащей порядка $2 \cdot 10^6$ клеток в 1 cm^3 , не превышает $D < 0,006$ в спектральном диапазоне 600–900 нм, т. е. без фотосенсибилизатора в клетках практически отсутствует поглощение. При этом клеточная культура оказалась средой, в которой пропускание в спектральной области источников света (740 и 780 нм) имеет одинаковое значение. Следовательно, для прозрачной биологической среды отсутствуют какие-либо различия в активности фотосенсибилизатора при воздействии излучением в пределах основной полосы его поглощения. В сеансах фотохимиотерапии на перевиваемых опухолях экспериментальных животных использовалось такое же соотношение величин плотности мощности падающего излучения при применении этих же источников света. Установлено, что средняя глубина повреждения перевиваемых опухолей Ca M-1 крыс при воздействии светом с длиной волны 780 нм в 1,5 раза больше по сравнению с воздействием излучением с длиной волны 740 нм, т. е. при фотовоздействии в указанном спектральном диапазоне наблюдается рост глубины повреждения опухолевых тканей с увеличением длины волны использованного источника излучения. Коэффициенты поглощения биоткани на длинах волн 780 и 740 нм имеют достаточно близкие значения [17–19], вместе с тем наблюдаются существенные (до полутора раз) различия в глубине некроза при фотовоздействии источниками света с длинами волн 780 и 740 нм.

Проведено исследование влияния однородности пучка падающего на образец света по сечению пучка на степень и эффективность повреждения опухолевых тканей в результате ФДТ. Для этого с помощью камеры (ORMINS) регистрировалось распределение интенсивности излучения по сечению пучка на разных расстояниях от лазера. Оказалось, что распределение излучения по сечению светового пучка полупроводникового лазера ($\lambda = 740 \text{ nm}$) является в значительной степени неоднородным (рис. 2, а), в различных точках сечения освещенность различалась на 1–2 порядка. Отклонение от средней по 10 точкам достигало 55 %, среднее квадратичное отклонение составляло 18 %. Такая высокая неоднородность лазерного пучка может привести к неравномерному фотовоздействию во время сеанса ФДТ и, как следствие, – к фрагментарному повреждению опухоли.

a/a



b/b

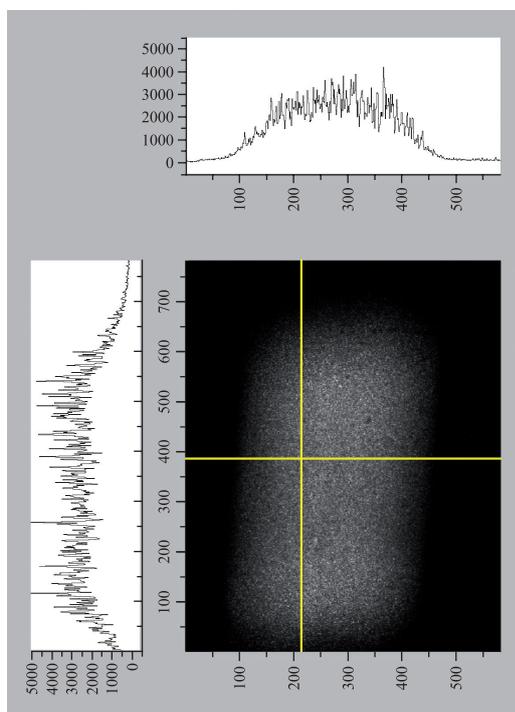
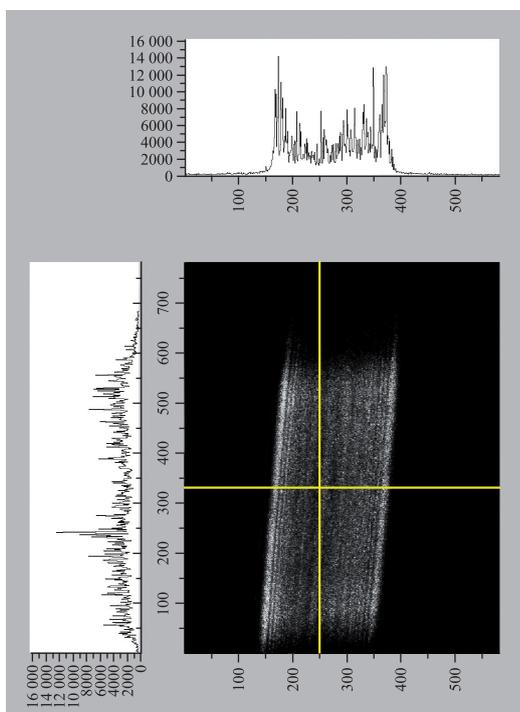
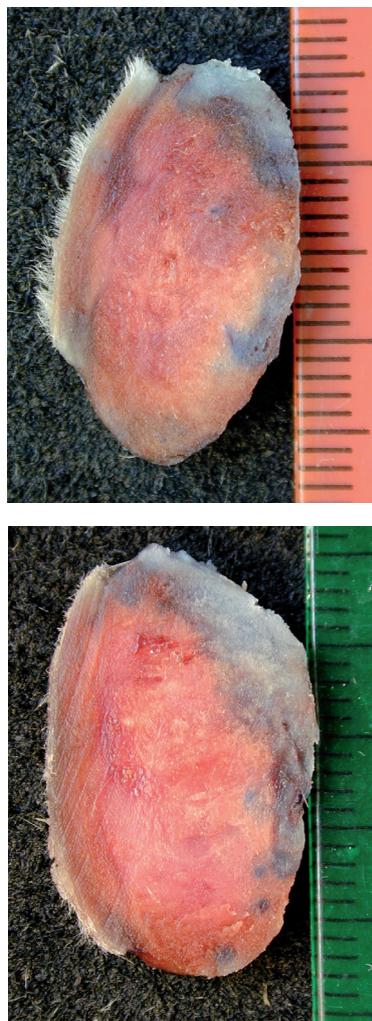


Рис. 2. Распределение интенсивности на экране излучения полупроводникового лазера с длиной волны 740 нм и соответствующие некрозы опухолей *in vivo*:
a – без рассеивателя; *b* – с аperiодическим линзовым растром

Fig. 2. Intensity distribution over the beam section of the semiconductor laser radiation with a wavelength of 740 nm and the corresponding necrosis of tumors *in vivo*:
a – without a scatterer; *b* – with an aperioidic lenticular raster

Для повышения однородности на выходе из лазера устанавливался рассеиватель излучения. Наиболее эффективным оказался аperiodический линзовый растр. Растровые компоненты, как правило, используются для получения требуемого распределения света и равномерного освещения объектов в системах лазерной обработки, осветительном оборудовании, микроскопах, медтехнике, в качестве проекционных экранов в устройствах визуального наблюдения [20; 21]. Снимки поверхности рассеивателя, сделанные при использовании микрообъективов с 10-кратным увеличением, приведены на рис. 3. Поверхность такого рассеивателя представляет собой массив из плоско-выпуклых собирающих линз неправильной формы. Размер линз варьируется в интервале 20–160 мкм, за счет чего достигается выравнивание освещенности по сечению пучка и на поверхности образца. При этом светораспределение в силу высокой контрастности освещающих пучков имеет вид, подобный светораспределению в спектре Фраунгофера дифракционной решетки, сглаженный за счет конечных размеров источника света. Огибающая светораспределения в идеальном случае должна иметь вид трапеции.

Использование линзового растра позволило уменьшить перепады интенсивности соседних точек в сечении пучка более чем в 5 раз, т. е. существенно снизить разброс интенсивности по сечению. Так, отношение интенсивности наиболее освещенных областей к интенсивности наименее освещенных не превышало 1,6, отклонение огибающей от средней не превосходило 27 %, а среднее квадратичное отклонение уменьшилось до 8 %.

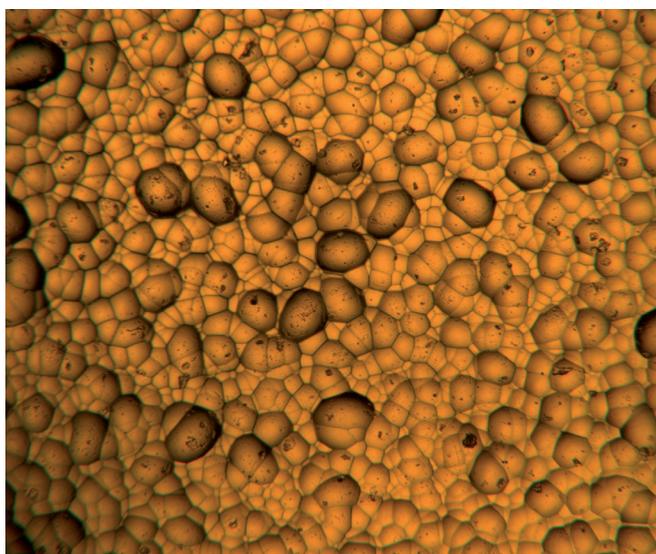


Рис. 3. Поверхность аperiodического линзового растра при 10-кратном увеличении

Fig. 3. Image of the aperiodic lens raster surface at tenfold magnification

При применении такого рассеивателя результативность сеансов фотохимиотерапевтического воздействия заметно улучшилась. Так, в случае одинаковой экспозиционной дозы света 200 Дж/см^2 и средней плотности мощности 150 мВт/см^2 при проведении сеанса ФДТ с использованием лазера с установленным рассеивателем получены некрозы с глубиной повреждения до 2 см, а без рассеивателя – только 5 мм (рис. 2, б).

Используемый в работе светодиодный источник без дополнительных оптических устройств обладает относительно однородным распределением излучения по сечению пучка. Установка аperiodического линзового растра на выходе светодиодного источника снизила отклонение от огибающей, при этом профиль излучения имеет достаточно гладкую колоколообразную форму (рис. 4).

В результате проведения сеанса фотохимиотерапии с такой же, как для лазера ($\lambda = 780 \text{ нм}$), эффективной экспозиционной дозой света 200 Дж/см^2 и средней плотностью мощности 150 мВт/см^2 по всей площади засветки опухолевых узлов некрозы тканей были сплошными, площадь некроза опухолей составила 76–89 % (см. рис. 4).

Наиболее значительным фактором повышения эффективности повреждения опухолевых тканей с увеличением длины волны фотовоздействия представляется увеличение выхода в ткани свободного кислорода вследствие фотодиссоциации молекул оксигемоглобина крови [22]. При выполнении условия поглощения фотосенсибилизатором в единичном объеме опухоли одинакового числа фотонов в единицу времени для источника света с длиной волны 780 нм реально падающая доза света была выше, чем для 740 нм. Это

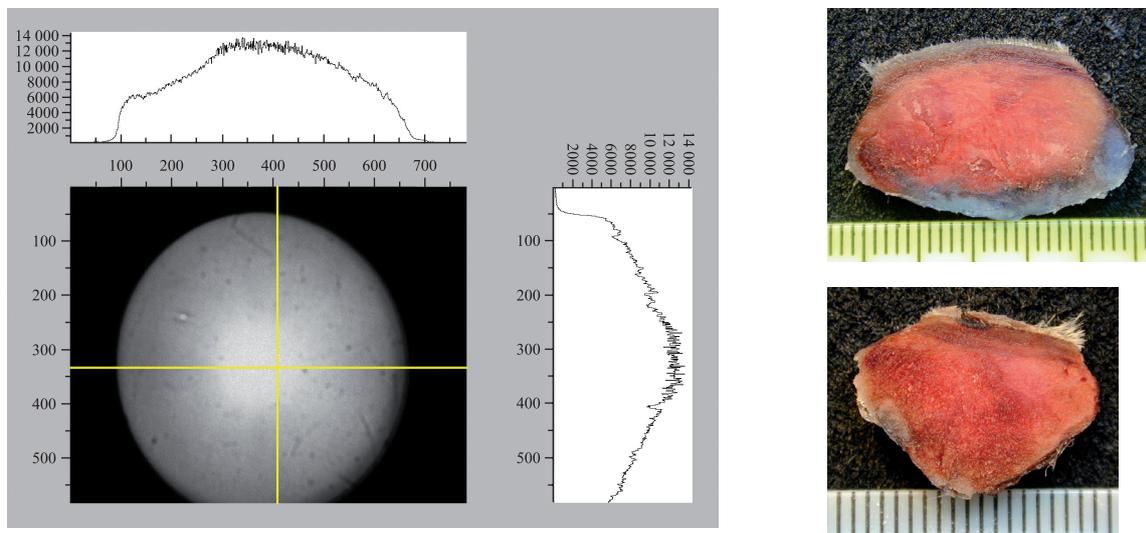


Рис. 4. Распределение интенсивности на экране излучения полупроводникового светодиода с длиной волны 780 нм и соответствующие некрозы опухолей *in vivo*

Fig. 4. The intensity distribution on the screen of the semiconductor LED radiation with a wavelength of 780 nm and the corresponding tumor necrosis *in vivo*

вызывает нагрев тканей и приводит к увеличению скорости кровотока, что способствует более быстрому подходу новых порций сенсibilизатора к облучаемому участку опухоли и может повлиять на величину повреждения. Таким образом, все указанные факторы повышают эффективность ФДТ.

Заключение

На основании проведенных сравнительных исследований эффективности ФДТ при использовании для облучения полупроводникового лазера с длиной волны 740 нм и светодиода с длиной волны в максимуме излучения 780 нм установлено, что, несмотря на близкие по величине коэффициенты пропускания биоткани на указанных длинах волн, глубина некроза для светодиодного источника примерно в 1,5 раза больше. Предполагается, что различия в глубине повреждения опухолей при фотовоздействии источниками с разной длиной волны света определяются не только отличиями в пропускании тканей, но и возможной неодинаковой эффективностью фотодиссоциации молекул гемоглобина в кровеносных сосудах.

Библиографические ссылки

1. Ericson MB, Wennberg AM, Larkö O. Review of photodynamic therapy in actinic keratosis and basal cell carcinoma. *Therapeutics and clinical risk management*. 2008;4(1):1–9. DOI: 10.2147/TCRM.S1769.
2. Dougherty TJ, Gomer CJ, Henderson BW, Jori G, Kessel D, Korbelik M, et al. Photodynamic therapy. *Journal of the National Cancer Institute*. 1998;90(12):889–905. DOI: 10.1093/jnci/90.12.889.
3. Oniszczyk A, Wojtunik-Kulesza KA, Oniszczyk T, Kasprzak K. The potential of photodynamic therapy (PDT) – Experimental investigations and clinical use. *Biomedicine & Pharmacotherapy*. 2016;83:912–929. DOI: 10.1016/j.biopha.2016.07.058.
4. Abrahamse H, Hamblin MR. New photosensitizers for photodynamic therapy. *Biochemical Journal*. 2016;473(4):347–364. DOI: 10.1016/j.biopha.2016.07.058.
5. Странадко ЕФ, Армичев АВ, Гейниц АВ. Источники света для фотодинамической терапии. *Лазерная медицина*. 2011;15(3):63–69.
6. Самцов МП (Беларусь), Луговский АП (Беларусь), Воропай ЕС (Беларусь), Петров ПТ (Беларусь), Луговский АА (Беларусь), Демид ДИ (Беларусь), Истомин ЮП (Беларусь), авторы; Белорусский государственный университет, научно-исследовательское учреждение «Институт прикладных физических проблем им. А. Н. Севченко» БГУ, правообладатели. Водорастворимый индотрикарбодиазирин краситель в качестве фотосенсибилизатора для фотодинамической терапии злокачественных опухолей. Республика Беларусь 17638. 30 июля 2012.
7. Lugovski A, Samtsov M, Kaplevsky K, Petrov P, Voropay E, Tarasau D, et al. Novel indotricarbocyanine dyes covalently bonded to polyethylene glycol for theranostics. *Journal of Photochemistry and Photobiology A*. 2016;316:31–36. DOI: 10.1016/j.jphotochem.2015.10.008.
8. Самцов МП, Радько АЕ, Каплевский КН, Шевченко КА. Лазерный спектрометрический комплекс для флуоресцентной диагностики области локализации опухолей. В: *Квантовая электроника. Материалы V Международной научно-технической конференции; 22–25 ноября 2004 г.; Минск, Беларусь*. Минск: БГУ; 2004. с. 20–24.
9. Ермалицкий ФА, Радько АЕ, Каплевский КН, Шевченко КА. Спектрометрический комплекс для фотохимиотерапии с мощным светодиодом [Интернет]. Минск: Академия управления при Президенте Республики Беларусь; 2008 [цитировано 21 июля 2017]. Доступно по: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/29842>.
10. Самцов МП, Воропай ЕС, Каплевский КН, Мельников ДГ, Ляшенко ЛС, Истомин ЮП. Влияние энергии фотона на эффективность фотохимиотерапии. *Журнал прикладной спектроскопии*. 2009;76(4):576–582. DOI: 10.1007/s10812-009-9223-x.
11. Воропай ЕС, Самцов МП, Каплевский КН, Мельников ДГ, Ляшенко ЛС. Фотодинамическая лазерная терапия и диагностика областей локализации на основе новых типов фотосенсибилизаторов. *Известия Российской академии наук. Серия физическая*. 2007;71(1):145–149.

12. Coutier S, Mitra S, Bezdetnaya L, Parache RM, Georgakoudi I, Foster TH, et al. Effects of Fluence Rate on Cell Survival and Photobleaching in Meta-Tetra-(hydroxyphenyl) chlorin – photosensitized Colo 26 Multicell Tumor Spheroids. *Photochemistry and photobiology*. 2001;73(3):297–303. DOI: 10.1562/0031-8655(2001)073<0297:EOFROC>2.0.CO;2.
13. Pass HI. Photodynamic therapy in oncology: mechanisms and clinical use. *JNCI: Journal of the National Cancer Institute*. 1993;85(6):443–456. DOI: 10.1093/jnci/85.6.443.
14. Странадко ЕФ. Механизмы действия фотодинамической терапии. *Российский онкологический журнал*. 2000;4:52–56.
15. Hasan T, Ortel B, Moor ACE, Pogue BW. Photodynamic therapy of cancer. *Cancer Medicine*. 1997;50:739–751.
16. Matcher SJ, Elwell CE, Cooper CE, Cope M, Delpy DT. Performance comparison of several published tissue near-infrared spectroscopy algorithms. *Analytical biochemistry*. 1995;227(1):54–68. DOI: 10.1006/abio.1995.1252.
17. Taroni P, Pifferi A, Torricelli A, Comellia D, Cubeddua R. *In vivo* absorption and scattering spectroscopy of biological tissues. *Photochemical & Photobiological Sciences*. 2003;2(2):124–129. DOI: 10.1039/B209651J.
18. Loschenov VB, Konov VI, Prokhorov AM. Photodynamic therapy and fluorescence diagnostics. *Laser physics*. 2000;10(6):1188–1207.
19. Ballangrud AM, Barajas O, Georgousis A, Miller GG, Moore RB, McPhee MS, et al. *In vivo* light transmission spectra in EMT6/Ed murine tumors and Dunning R3327 rat prostate tumors during photodynamic therapy. *Lasers in Surgery and Medicine*. 1997;21(2):124–133. DOI: 10.1002/(SICI)1096-9101(1997)21:2<124::AID-LSM3>3.0.CO;2-S.
20. Жидкова НА, Калинина ОД, Кучин АА, Натаровский СН, Немкова ОН, Скобелева НБ. Использование линзовых растров в осветителях микроскопов отраженного света. *Оптико-механическая промышленность*. 1988;8:23–24.
21. Шредер Г, Трайбер Х. *Техническая оптика*. Москва: Техносфера; 2006. 424 с.
22. Асимов ММ, Асимов РМ, Рубинов АН. Спектр действия лазерного излучения на гемоглобин кровеносных сосудов кожи. *Журнал прикладной спектроскопии*. 1998;65(6):878–880. DOI: 10.1007/BF02675749.

References

1. Ericson MB, Wennberg AM, Larkö O. Review of photodynamic therapy in actinic keratosis and basal cell carcinoma. *Therapeutics and clinical risk management*. 2008;4(1):1–9. DOI: 10.2147/TCRM.S1769.
2. Dougherty TJ, Gomer CJ, Henderson BW, Jori G, Kessel D, Korbek M, et al. Photodynamic therapy. *Journal of the National Cancer Institute*. 1998;90(12):889–905. DOI: 10.1093/jnci/90.12.889.
3. Oniszczuk A, Wojtunik-Kulesza KA, Oniszczuk T, Kasprzak K. The potential of photodynamic therapy (PDT) – Experimental investigations and clinical use. *Biomedicine & Pharmacotherapy*. 2016;83:912–929. DOI: 10.1016/j.biopha.2016.07.058.
4. Abrahamse H, Hamblin MR. New photosensitizers for photodynamic therapy. *Biochemical Journal*. 2016;473(4):347–364. DOI: 10.1016/j.biopha.2016.07.058.
5. Stranadko EPh, Arnichev AV, Geynits AV. Light sources for photodynamic therapy. *Laser medicine*. 2011;15(3):63–69. Russian.
6. Samtsov MP (BY), Lugovskii AP (BY), Voropai ES (BY), Petrov PT (BY), Lugovskii AA (BY), Demid DI (BY), Istomin YuP (BY), authors; Belarusian State University, nauchno-issledovatel'skoe uchrezhdenie «A. N. Sevchenko Institute of Applied Physical Problems, Belarusian State University, assignee. Water-soluble indotricarbocyanine dye as a photosensitizer for photodynamic therapy of malignant tumors. Republic of Belarus 17638. 2012 July 30. Russian.
7. Lugovski A, Samtsov M, Kaplevsky K, Petrov P, Voropay E, Tarasau D, et al. Novel indotricarbocyanine dyes covalently bonded to polyethylene glycol for theranostics. *Journal of Photochemistry and Photobiology A*. 2016;316:31–36. DOI: 10.1016/j.jphotochem.2015.10.008.
8. Samtsov MP, Rad'ko AE, Kaplevskii KN, Shevchenko KA. [Laser spectrometry complex for fluorescent diagnosis of the tumor localization area]. In: *Kvantovaya elektronika. Materialy V Mezhdunarodnoi nauchno-tekhnicheskoi konferentsii; 22–25 noyabrya 2004 g.; Minsk, Belarus'* [Quantum electronics. Proceedings of the V International scientific conference; 2004 November 22–25; Minsk, Belarus]. Minsk: Belarusian State University; 2004. p. 20–24. Russian.
9. Ermalitskii FA, Rad'ko AE, Kaplevskii KN, Shevchenko KA. [Spectrometric complex for photochemotherapy with a powerful LED] [Internet]. Minsk: Academy of Public Administration under the aegis of the President of the Republic of Belarus; 2008 [cited 2017 July 21]. Available from: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/29842>. Russian.
10. Samtsov MP, Voropay ES, Kaplevsky KN, Melnikau DG, Lyashenko LS, Istomin YuP. Influence of photon energy on the efficiency of photochemotherapy. *Journal of Applied Spectroscopy*. 2009;76(4):576–582. DOI: 10.1007/s10812-009-9223-x. Russian.
11. Voropai ES, Samtsov MP, Kaplevskii KN, Mel'nikov DG, Lyashenko LS. Photodynamic laser therapy and diagnosis of localization areas based on new types of photosensitizers. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Seriya fizicheskaya*. 2007;71(1):145–149. Russian.
12. Coutier S, Mitra S, Bezdetnaya L, Parache RM, Georgakoudi I, Foster TH, et al. Effects of Fluence Rate on Cell Survival and Photobleaching in Meta-Tetra-(hydroxyphenyl) chlorin – photosensitized Colo 26 Multicell Tumor Spheroids. *Photochemistry and photobiology*. 2001;73(3):297–303. DOI: 10.1562/0031-8655(2001)073<0297:EOFROC>2.0.CO;2.
13. Pass HI. Photodynamic therapy in oncology: mechanisms and clinical use. *JNCI: Journal of the National Cancer Institute*. 1993;85(6):443–456. DOI: 10.1093/jnci/85.6.443.
14. Stranadko EF. Mechanism of photodynamic action. *Russian Journal of Oncology*. 2000;4:52–56. Russian.
15. Hasan T, Ortel B, Moor ACE, Pogue BW. Photodynamic therapy of cancer. *Cancer Medicine*. 1997;50:739–751.
16. Matcher SJ, Elwell CE, Cooper CE, Cope M, Delpy DT. Performance comparison of several published tissue near-infrared spectroscopy algorithms. *Analytical biochemistry*. 1995;227(1):54–68. DOI: 10.1006/abio.1995.1252.
17. Taroni P, Pifferi A, Torricelli A, Comellia D, Cubeddua R. *In vivo* absorption and scattering spectroscopy of biological tissues. *Photochemical & Photobiological Sciences*. 2003;2(2):124–129. DOI: 10.1039/B209651J.
18. Loschenov VB, Konov VI, Prokhorov AM. Photodynamic therapy and fluorescence diagnostics. *Laser physics*. 2000;10(6):1188–1207.
19. Ballangrud AM, Barajas O, Georgousis A, Miller GG, Moore RB, McPhee MS, et al. *In vivo* light transmission spectra in EMT6/Ed murine tumors and Dunning R3327 rat prostate tumors during photodynamic therapy. *Lasers in Surgery and Medicine*. 1997;21(2):124–133. DOI: 10.1002/(SICI)1096-9101(1997)21:2<124::AID-LSM3>3.0.CO;2-S.
20. Zhidkova NA, Kalinina OD, Kuchin AA, Natarovskii SN, Nemkova ON, Skobeleva NB. [Application of lens raster illuminators reflected light microscopes]. *Optiko-mekhanicheskaya promyshlennost'*. 1988;8:23–24. Russian.
21. Shreder G, Traiber Kh. *Tekhnicheskaya optika* [Technical optics]. Moscow: Tekhnosfera; 2006. 424 p. Russian.
22. Asimov MM, Asimov RM, Rubinov AN. Spectrum of the effect of laser radiation on hemoglobin of the blood vessels of skin. *Journal of Applied Spectroscopy*. 1998;65(6):878–880. DOI: 10.1007/BF02675749. Russian.

ФИЗИКА

КОНДЕНСИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

CONDENSED STATE PHYSICS

УДК 620.191:621.373.820

ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ ПЛЕНОК СИЛИЦИДА ПЛАТИНЫ, СФОРМИРОВАННЫХ С ПРИМЕНЕНИЕМ БЫСТРОЙ ТЕРМООБРАБОТКИ

**В. М. АНИЩИК¹⁾, В. А. ГОРУШКО²⁾,
В. А. ПИЛИПЕНКО¹⁾, В. В. ПОНАРИДОВ¹⁾, В. А. СОЛОДУХА³⁾**

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

²⁾Государственный центр «Белмикроанализ» филиала НТЦ «Белмикросистемы» ОАО «Интеграл»,
ул. Казинца, 121А, 220108, г. Минск, Беларусь

³⁾ОАО «Интеграл», ул. Казинца, 121А, 220108, г. Минск, Беларусь

Приведены результаты исследования изменения удельного сопротивления системы Pt – Si при формировании силицида платины методом его диффузионного синтеза с применением быстрой термообработки и изменением температуры в широких пределах (200–550 °С). Пленки платины толщиной 35 нм наносились на подложку

Образец цитирования:

Анищик ВМ, Горушко ВА, Пилипенко ВА, Понаридов ВВ, Солодуха ВА. Электропроводность пленок силицида платины, сформированных с применением быстрой термообработки. *Журнал Белорусского государственного университета. Физика.* 2019;1:27–31.

For citation:

Anishchik VM, Harushka VA, Pilipenka UA, Ponariadov VV, Saladukha VA. Conductivity of platinum silicide films formed with application of rapid thermal treatment. *Journal of the Belarusian State University. Physics.* 2019;1:27–31. Russian.

Авторы:

Виктор Михайлович Анищик – доктор физико-математических наук, профессор; декан физического факультета.

Валентина Алексеевна Горушко – ведущий инженер.

Владимир Александрович Пилипенко – член-корреспондент НАН Беларуси, доктор технических наук; профессор кафедры физики полупроводников и наноэлектроники физического факультета.

Владимир Васильевич Понаридов – кандидат физико-математических наук, доцент; заместитель декана физического факультета.

Виталий Александрович Солодуха – кандидат технических наук; генеральный директор.

Authors:

Victor M. Anishchik, doctor of science (physics and mathematics), full professor; dean of the faculty of physics.

anishchik@bsu.by

Valiantsina A. Harushka, leading engineer.

office@bms.by

Uladzimir A. Pilipenka, corresponding member of the National Academy of Sciences of Belarus, doctor of science (engineering); professor at the department of semiconductor physics and nanoelectronics, faculty of physics.

office@bms.by

Vladimir V. Ponariadov, PhD (physics and mathematics), do-
cent; deputy dean of the faculty of physics.

ponariadov@bsu.by

Vitali A. Saladukha, PhD (engineering); general director.

vsaladukha@integral.by

монокристаллического кремния путем магнетронного распыления мишени из платины с криогенной откачкой до давления $P \leq 5 \cdot 10^{-5}$ Па в атмосфере чистого аргона. Быстрая термическая обработка проводилась с помощью облучения нерабочей стороны пластины некогерентным световым потоком в атмосфере азота. Установлено, что при температуре от 200 до 300 °С происходит рост удельного сопротивления пленки за счет образования фазы Pt₂Si. Повышение температуры обработки до 350 °С приводит к уменьшению удельного сопротивления, что обусловлено образованием при такой температуре пленки, состоящей из двух фаз силицида платины Pt₂Si и PtSi, а при 450 °С наблюдается увеличение удельного сопротивления, что соответствует удельному сопротивлению пленки с содержанием лишь одной фазы силицида платины PtSi. Дальнейшее повышение температуры до 550 °С не влияет на величину удельного сопротивления, что свидетельствует о завершении формирования моносилицида платины при температуре 450 °С. Показано, что изменение удельного сопротивления пленки платины на кремнии при обработке от 200 до 400 °С обусловлено действием *d*-электронов металла при формировании высокоомной фазы Pt₂Si ($\rho = 35,2$ мкОм · см), а в случае образования при температуре свыше 450 °С – действием низкоомной фазы PtSi ($\rho = 28,0$ мкОм · см) как *d*-электронов металла, так и *s*- и *p*-электронов кремния.

Ключевые слова: быстрая термическая обработка; силицид платины; удельное сопротивление; твердофазный синтез.

CONDUCTIVITY OF PLATINUM SILICIDE FILMS FORMED WITH APPLICATION OF RAPID THERMAL TREATMENT

V. M. ANISHCHIK^a, V. A. HARUSHKA^b,
U. A. PILIPENKA^a, V. V. PONARIADOV^a, V. A. SALADUKHA^c

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

^b«Belmikroanaliz» of the branch «Belmikrosistemy», JSC «Integral»,
121A Kazinca Street, Minsk 220108, Belarus

^cJSC «Integral», 121A Kazinca Street, Minsk 220108, Belarus

Corresponding author: V. V. Ponariadov (ponariadov@bsu.by)

This paper presents the results obtained in studies of variations in resistivity of Pt – Si system in the process of the platinum silicide film formation by the diffusion synthesis method with the use of rapid thermal treatment when temperature varies over a wide range (200–550 °C). Films 35 nm thick were deposited on monocrystalline silicon substrates by magnetron sputtering of the platinum target using cryopumping down to the pressure no less than $5 \cdot 10^{-5}$ Pa in the atmosphere of pure argon. Rapid thermal treatment consisted in irradiation of the unload side of a plate with an incoherent luminous flux in the nitrogen atmosphere. It was found that at temperatures from 200 to 300 °C resistivity of the film is growing due to the Pt₂Si phase formation. An increases of temperature up to 350 °C results in lowering of resistivity attributed to the formation of a film comprising two phases of platinum silicide: Pt₂Si and PtSi, whereas in the case of thermal treatment at 450 °C one can observe an increase in resistivity corresponding to that of a film containing a single phase of platinum silicide – PtSi. Further increase of temperature up to 550 °C had no effect on the resistivity value pointing to the fact that the formation of platinum monosilicide was completed at 450 °C. It is demonstrated that variations in resistivity of platinum films on silicon in the case of thermal treatment at temperatures from 200 to 400 °C are due to the action of *d*-electrons of this metal during the formation of the high-resistance phase Pt₂Si ($\rho = 35.2$ μΩ · cm). The formation of the low-resistance phase PtSi ($\rho = 28.0$ μΩ · cm) at $T \geq 450$ °C is associated with variations in resistivity both due to metal *d*-electrons and silicon *s*- and *p*-electrons.

Key words: rapid thermal treatment; platinum silicide; specific resistance; solid phase synthesis.

Введение

С увеличением плотности тока в полупроводниковых приборах и интегральных микросхемах возникает проблема стабильности межслойных соединений и контактов к активным и пассивным элементам схемы. Так как с уменьшением линейных размеров полупроводниковых приборов уменьшается глубина залегания *p* – *n*-переходов, то это ограничивает применение в качестве токопроводящих систем алюминия, резко снижающего их надежность в силу своей подверженности электромиграции.

В современной технологии создания интегральных микросхем и полупроводниковых приборов одним из перспективных направлений является использование в качестве токопроводящих систем силицидов тугоплавких металлов. Это обусловлено тем, что они обеспечивают формирование контактов к мелкозалегающим $p-n$ -переходам, барьеров Шоттки, межсоединений на основе системы силицид – поликристаллический кремний.

К преимуществам силицидов относят их устойчивость к химическим реактивам, термообработке, окислительной атмосфере, стабильность механических и электрических свойств, низкие механические напряжения, стойкость к электромиграции, минимальное проникновение в глубь $p-n$ -переходов [1]. Основной метод их формирования – твердофазный синтез за счет взаимодействия кремния с соответствующей пленкой металла при температуре от 400 до 1000 °С, которая является одним из важнейших параметров данного процесса. Температура, время и среда – определяющие факторы в формировании фазового состава, кристаллической решетки, размера зерна, механических и электрических параметров получаемого силицида. В этом плане термообработка играет ключевую роль в диффузионном синтезе силицидов. Однако длительное применение столь высоких температур приводит к существенному изменению микрорельефа границы раздела силицид – кремний. При этом чем выше температура и время обработки, тем более развитым формируется указанный микрорельеф [2]. В случае диодов Шоттки это приводит к значительному увеличению токов утечки. Высокие температуры сопровождаются также нежелательными диффузионными процессами в уже сформированных слоях, образованием и ростом структурных нарушений, механических и термических напряжений. Использование быстрой термической обработки для получения силицидов позволяет заметно снизить время их формирования без существенного изменения температуры процесса и тем самым исключить вышеуказанные отрицательные явления.

Методика эксперимента

Для исследования изменения удельного сопротивления системы Pt – Si при формировании силицида платины методом его диффузионного синтеза с применением быстрой термообработки пленки платины толщиной 35 нм наносились на подложку монокристаллического кремния КЭФ 0,5 (111) путем магнетронного распыления мишени из платины с чистотой 99,93 % на установке MRC-603 с криогенной откачкой до давления $P \leq 5 \cdot 10^{-5}$ Па. В качестве рабочей среды использовался аргон, чистота которого составляла 99,993 %. Быстрая термическая обработка проводилась в режиме теплового баланса путем облучения нерабочей стороны пластины некогерентным световым потоком в атмосфере азота в течение 7 с при 200–550 °С. Источником излучения в установке служили кварцевые галогенные лампы накаливания. Контроль температуры осуществлялся термометрическим методом, обеспечивающим измерение реальной температуры образца с точностью до $\pm 0,5$ °С.

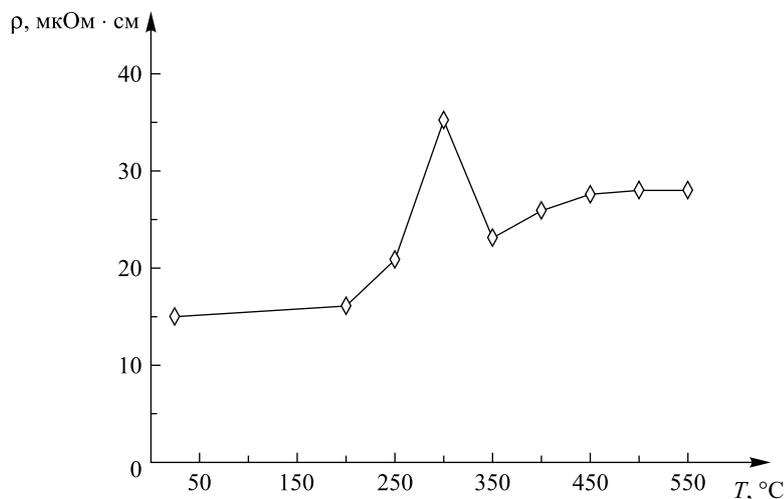
Измерение поверхностного сопротивления R_s , характеризующего объемное сопротивление (интегральное сопротивление), приходящееся на квадрат поверхности, проводилось на четырехзондовой установке RS-30. Через два токовых зонда пропускался ток 100 мА, а на двух потенциальных зондах измерялась величина падения напряжения. Погрешность измерений при доверительной вероятности 0,997 составляла ± 4 % [3]. Величина удельного сопротивления ρ (Ом · см) пленки рассчитывалась по формуле

$$\rho = R_s h,$$

где R_s – поверхностное сопротивление, Ом/□; h – толщина пленки, см.

Результаты эксперимента и их обсуждение

Удельное сопротивление силицидов является наиболее важным критерием при оценке их в качестве материала токопроводящих систем полупроводниковых приборов и интегральных микросхем. Исследование изменения данного параметра системы Pt – Si при формировании силицида платины методом его диффузионного синтеза с применением быстрой термообработки показало (см. рисунок), что при температуре от 200 до 300 °С происходит рост удельного сопротивления пленки от 16,1 до 35,2 мкОм · см за счет образования фазы Pt₂Si. Это значение хорошо согласуется с литературными данными для фазы Pt₂Si, сформированной с применением длительных термообработок, которое составляет 34–36 мкОм · см [1]. Повышение температуры обработки до 350 °С приводит к уменьшению удельного сопротивления до 20,9 мкОм · см, что обусловлено образованием при такой температуре пленки, состоящей из двух фаз силицида платины Pt₂Si и PtSi. При 450 °С наблюдается увеличение удельного сопротивления до 28,0 мкОм · см, что соответствует, по литературным данным [1], удельному сопротивлению пленки с содержанием лишь одной фазы силицида платины PtSi. Дальнейшее повышение температуры до 550 °С не вносит изменений в величину удельного сопротивления, что свидетельствует о завершении формирования моносилицида платины при 450 °С.



Зависимость удельного сопротивления ρ пленки формируемого силицида Pt от температуры T быстрой термообработки системы Pt – Si

Resistivity ρ of the formed Pt silicide film as a function of temperature T during rapid thermal treatment of the Pt – Si system

Из приведенной зависимости видно, что сформированный при низких температурах быстрой термической обработки силицид платины, обогащенный металлом, обладает более высоким удельным сопротивлением, чем силицид, сформированный при более высоких температурах. Для объяснения такого поведения величины удельного сопротивления при переходе от силицида Pt_2Si к $PtSi$ рассмотрим процесс формирования их электронной структуры, определяющей электропроводность данных токопроводящих систем.

Электронная структура платины представляет собой элемент, внешними уровнями которого являются $5d$ (предпоследний) с одним незаполненным состоянием из 10 возможных и $6s$ с одним заполненным состоянием из 2 имеющихся. У кремния на последнем уровне $3p$ заполнены 2 из 6 состояний. При образовании кристалла из одноименных атомов с отдельными квантовыми состояниями образуется зона, содержащая в соответствии с принципом Паули $2N$ вакантных мест для электронов. В случае формирования кристалла из разных элементов происходит перекрытие их внешних зон с образованием зоны новой кристаллической решетки, которая может быть как полностью, так и частично заполнена электронами. Поскольку на электропроводность оказывают влияние только частично заполненные зоны, то удельное сопротивление силицида платины определяется перекрытием внешних d - и s -зон платины с внешними s - и p -зонами кремния, другими словами, $d-s-p$ -гибридизацией с участием d - и s -электронов платины и s - и p -электронов кремния.

Формирование $d-s-p$ -гибридизации в ходе твердофазного синтеза различных фаз силицида платины происходит следующим образом. Из $5d$ -уровня платины образуется $5d$ -зона с $10N$ вакантными местами, из которых $9N$ заполнены электронами, находящимися в атомах платины в $5d$ -состояниях. Уровень платины $6s$ формирует зону $6s$ с $2N$ вакантными местами, половина из которых заполнена электронами, находящимися в атомах платины в $6s$ -состояниях. Образование силицида платины приводит к тому, что $2N$ электронов кремния из его $3p$ -зоны переходят на более низко лежащие свободные состояния $5d$ и зоны $6s$ платины, заполняя их. При этом зона кремния $3p$ оказывается пустой, а зоны $5d$ и $6s$ формируемого силицида платины увеличиваются на $2N$ валентных электронов, что приводит к полному заполнению вакантных мест в данных зонах. Поскольку для фазы силицида платины, обогащенного металлом, основную роль в электрической проводимости играют d -электроны металла, то удельное сопротивление Pt_2Si имеет более высокое значение, чем $PtSi$, где данные электроны играют такую же роль, как s - и p -электроны кремния.

Заключение

Проведение быстрой термической обработки при низких температурах (не более 300 °C) приводит к образованию фазы силицида платины, обогащенной металлом и имеющей более высокое удельное сопротивление. При температурах свыше 450 °C образуется силицид платины, не обогащенный металлом, в котором d -, s - и p -электроны играют одинаковую роль в электропроводности, обеспечивая уменьшение удельного сопротивления за счет наличия в кремнии незаполненной $3p$ -зоны.

Библиографические ссылки

1. Мьюрарка ШП. *Силициды для СБИС*. Баранов ВВ, переводчик; Чистяков ЮД, редактор. Москва: Мир; 1986. 176 с.
2. Комаров ФФ, Мильчанин ОВ, Ковалева ТБ, Солодуха ВА, Соловьёв ЯА, Турцевич АС. Низкотемпературный метод формирования контактного слоя силицида платины для силовых диодов Шоттки. *Доклады НАН Беларуси*. 2013;57(2):38–42.
3. Батавин ВВ, Концевой ЮА, Федорович ЮВ. *Измерение параметров полупроводниковых материалов*. Москва: Радио и связь; 1985.

References

1. Mewrarka ShP. *Silitsidy dlya SBIS* [Silicides for VLSIs]. Baranov VV, translator; Chistyakov YuD, editor. Moscow: Mir; 1986. 176 p. Russian.
2. Komarov FF, Mil'chanin OV, Kovaleva TB, Solodukha VA, Solov'ev YaA, Turtsevich AS. [Low temperature method of the platinum silicide contact layer formation for power diodes Shottky]. *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*. 2013;57(2):38–42. Russian.
3. Batavin VV, Kontsevoi YuA, Fedorovich YuV. *Izmerenie parametrov poluprovodnikovyykh materialov* [Parameter measurements of semiconductor materials]. Moscow: Radio i svyaz'; 1985. Russian.

Статья поступила в редколлегию 31.10.2018.
Received by editorial board 31.10.2018.

УДК 538.971

УПРУГИЕ СВОЙСТВА СЛОИСТЫХ НАНОКОМПОЗИТОВ НА ОСНОВЕ НИТРИДОВ ТИТАНА И КРЕМНИЯ

И. В. САФРОНОВ¹⁾, В. В. УГЛОВ¹⁾, В. И. ШИМАНСКИЙ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Проведено теоретическое исследование формирования упругих свойств многослойных пленок для перспективного класса наноконкомпозитов на основе нитридов переходных металлов и кремния. Цель работы – изучение влияния соотношения толщин слоев и периода модуляции на упругие свойства слоистых TiN/Si₃N₄-наноконкомпозитов. Для оценки эффективного модуля Юнга наноконкомпозита в направлении, перпендикулярном слоям, использовались схемы усреднения по Фойгту и Рейссу с применением методики многомасштабного моделирования. Установлено, что при увеличении соотношения толщины нанокристаллического TiN-слоя к толщине аморфного Si₃N₄-слоя, а также периода модуляции имеет место увеличение эффективного модуля Юнга слоистого наноконкомпозита. Показано, что в диапазоне толщин нанокристаллических TiN-слоев от 10 до 2 нм наблюдается значительное уменьшение их упругих модулей. С имеющимися экспериментальными данными сравнивались результаты моделирования. Они могут быть использованы для прогнозирования упругих свойств слоистых наноконкомпозитов.

Ключевые слова: слоистые наноконкомпозиты; TiN/Si₃N₄; эффективный модуль Юнга; текстурированный слой; аморфный слой.

ELASTIC PROPERTIES OF THE MULTILAYERED NANOCOMPOSITES BASED ON TITANIUM AND SILICON NITRIDES

I. V. SAFRONOV^a, V. V. UGLOV^a, V. I. SHYMANSKI^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: I. V. Safronov (fiz.safronov@mail.ru)

A theoretical study of the formation of multilayer film elastic properties for a promising class of nanocomposites based on transition metal nitrides and silicon has been carried out. The purpose of the work is to investigate the influence of thickness layers ratio as well as modulation period on the elastic properties of the multilayered TiN/Si₃N₄ nanocomposites. The Foight and Race's average schemes with a multiscale modeling were used to evaluation the effective Young modulus in the normal direction to the layered in the films. Increase in nanocrystalline TiN to amorphous Si₃N₄ thickness ratio as well as modulation period results in growth of the effective Young modulus of the multilayered nanocomposite. The elastic moduli of the nanocrystalline layers were shown to fall with TiN layers thickness decrease from 10 to 2 nm. The results of the simulation are compared to existing experimental data. The obtained results can be used to predict the elastic properties of layered nanocomposites.

Key words: multilayered nanocomposites; TiN/Si₃N₄; effective young's modulus; textured layer; amorphous layer.

Образец цитирования:

Сафронов ИВ, Углов ВВ, Шиманский ВИ. Упругие свойства слоистых наноконкомпозитов на основе нитридов титана и кремния. *Журнал Белорусского государственного университета. Физика.* 2019;1:32–39.

For citation:

Safronov IV, Uglov VV, Shymanski VI. Elastic properties of the multilayered nanocomposites based on titanium and silicon nitrides. *Journal of the Belarusian State University. Physics.* 2019;1:32–39. Russian.

Авторы:

Игорь Васильевич Сафронов – младший научный сотрудник кафедры физики твердого тела физического факультета.
Владимир Васильевич Углов – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой физики твердого тела физического факультета.
Виталий Игоревич Шиманский – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры физики твердого тела физического факультета.

Authors:

Igor V. Safronov, junior researcher at the department of solid state physics, faculty of physics.
fiz.safronov@mail.ru
Vladimir V. Uglov, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of solid state physics, faculty of physics.
uglov@bsu.by
Vitali I. Shymanski, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of solid state physics, faculty of physics.
shymanskiv@mail.ru

Введение

Матричные и слоистые нанокompозиты на основе нитридов переходных металлов (Ti, Zr, Hf, V, Nb, W, ...)N и кремния SiN_x являются перспективными материалами, которые могут найти применение в промышленности и энергетике в виде защитных покрытий и пленок. Данные наноматериалы обладают рядом уникальных свойств: высокой прочностью, повышенным упругим восстановлением, коррозионной, термической и радиационной стойкостью [1–5]. Актуальным является выявление закономерностей влияния морфологии и структурно-фазового состояния на физические свойства рассматриваемых классов нанокompозитов.

Цель настоящей работы – изучение влияния соотношения толщин слоев и периода модуляции на упругие свойства слоистых TiN/Si₃N₄-нанокompозитов методами компьютерного моделирования. Теоретические исследования по данной проблематике для рассматриваемого класса нанокompозитов ранее не проводились.

Методика исследований

В качестве модели наноструктуры слоистого TiN/Si₃N₄-нанокompозита рассматривалась среда, представляемая последовательностью чередующихся анизотропных и изотропных наноразмерных TiN- и Si₃N₄-слоев, имеющих поликристаллическую и аморфную структуры соответственно. Учитывалось, что поликристаллический TiN-слой имеет смешанную текстуру роста [6–9]. Вследствие несмешиваемости нитридных фаз и наличия резких границ раздела [10] нами не вводилась в рассмотрение третья фаза, связанная с межфазными границами.

Для оценки эффективных упругих модулей слоистого TiN/Si₃N₄-нанокompозита использовались схемы усреднения по Фойгту и Рейссу (метод среднего поля) с применением методики многомасштабного моделирования. Эффективные модули Юнга нанокompозита в направлении, перпендикулярном слоям, по Фойгту (верхняя оценка) и Рейссу (нижняя оценка) определялись соответственно как

$$E_{\text{eff}}^V = \left\langle f_c \langle E_c \rangle_{[mnp]} + (1 - f_c) E_a \right\rangle, \quad (1)$$

$$E_{\text{eff}}^R = \frac{1}{S_{11}^R} = \frac{1}{\left\langle f_c \langle S_{11}^c \rangle_{[mnp]} + (1 - f_c) S_{11}^a \right\rangle}, \quad (2)$$

где $f_c = \frac{h_c}{h_c + h_a}$ – объемная доля нанокристаллической фазы (пластинчатых включений-слоев), h_c , h_a – толщины нанокристаллического и аморфного слоев; $\langle E_c \rangle_{[mnp]}$, $\langle S_{11}^c \rangle_{[mnp]}$ – усредненные по кристаллографическим ориентациям модуль Юнга и компонента тензора упругих податливостей нанокристаллического слоя; E_a , S_{11}^a – модуль Юнга и компонента тензора упругих податливостей аморфного слоя; $\langle \dots \rangle$ – усреднение по объему представительного элемента (по двум смежным слоям в случае двухслойного приближения).

Для нахождения эффективных модулей Юнга слоистого TiN/Si₃N₄-нанокompозита по формулам (1), (2) предварительно необходимо вычислить упругие модули составляющих фаз. Моделирование упругих свойств нанокристаллической и аморфной фаз осуществлялось с помощью методов молекулярной статистики и функционала электронной плотности, реализованных в известных программных пакетах *LAMMPS* [11] и *Quantum ESPRESSO* [12]. Подробное описание методики можно найти в [13].

Результаты и их обсуждение

Упругие модули наноразмерных TiN- и Si₃N₄-слоев. Поликристаллический TiN-слой представлялся состоящим из столбчатых нанокристаллов (нанозерен) с тремя преимущественными ориентациями – (111), (200) и (220), каждая из которых характеризуется своим текстурным коэффициентом [7]. В первом приближении форма столбчатых нанокристаллов считалась призматической (рис. 1), что обусловлено способом формирования рассматриваемых покрытий методом вакуумного осаждения (магнетронное распыление) [6–9], при котором последовательно протекают явления зародышеобразования, роста островков, их столкновения и неполной коалесценции из-за отсутствия объемной диффузии [14; 15]. Определенные ориентации нанокристаллов проявляются на так называемой стадии конкурирующего роста, что обусловлено разной скоростью роста по кристаллографическим направлениям, связанной с различной подвижностью адатомов на гранях, и поверхностной диффузией, а также конкуренцией между вкладами поверхностной энергии или энергии границ раздела и упругой энергии

деформации [14; 15]. Соотношения между поперечным размером d и высотой h_c , которая сопоставима с толщиной одного TiN-слоя, для нанокристаллов брались из [8]. По этим исходным данным построена аппроксимационная зависимость поперечного размера нанокристалла от его высоты для рассматриваемого диапазона толщин TiN-слоя от 2 до 20 нм (рис. 2). Поперечный размер, форма и преимущественные ориентации нанокристаллов считались неизменными по толщине TiN-слоя.

На рис. 3 представлены результаты моделирования компонент тензора упругих констант C_{ij}^c столбчатых TiN-нанокристаллов различных размеров. В отличие от равноосных нанокристаллов полиэдрической формы [13] в данном случае дополнительно имеются константы, характеризующие упругие свойства вдоль вытянутой оси 3 (z): $C_{33}^c \neq C_{11}^c = C_{22}^c$, $C_{13}^c = C_{23}^c \neq C_{12}^c$, $C_{44}^c = C_{55}^c \neq C_{66}^c$, появление которых обусловлено не изменением симметрии решетки, а размерным эффектом. Разница между $C_{11}^c = C_{22}^c$ и C_{33}^c , C_{12}^c и $C_{13}^c = C_{23}^c$, C_{66}^c и $C_{44}^c = C_{55}^c$ исчезнет, когда поперечный размер столбчатого нанокристалла составит

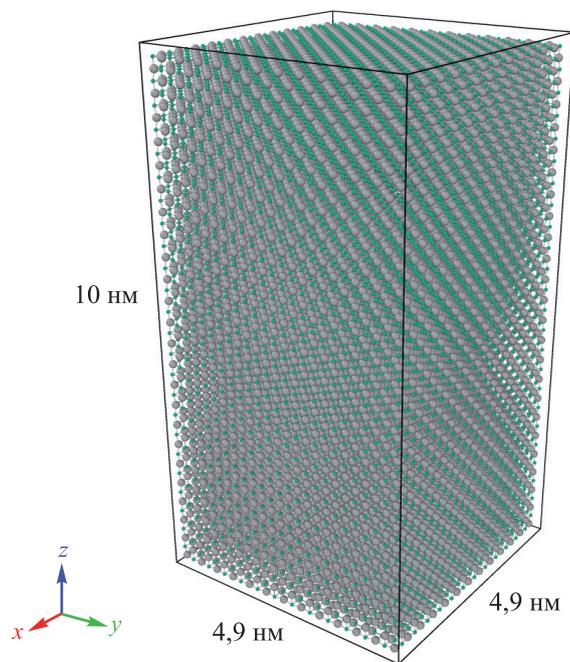


Рис. 1. Столбчатый TiN-нанокристалл высотой 10 нм
 Fig. 1. Columnar TiN-nanocrystal with a height of 10 nm

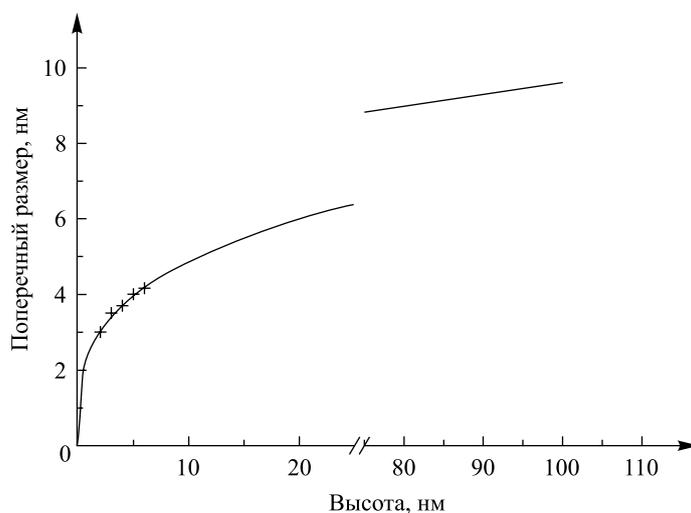


Рис. 2. Аппроксимационная зависимость поперечного размера столбчатого нанокристалла от его высоты

Fig. 2. Approximated dependence of the columnar nanocrystal cross size on the height

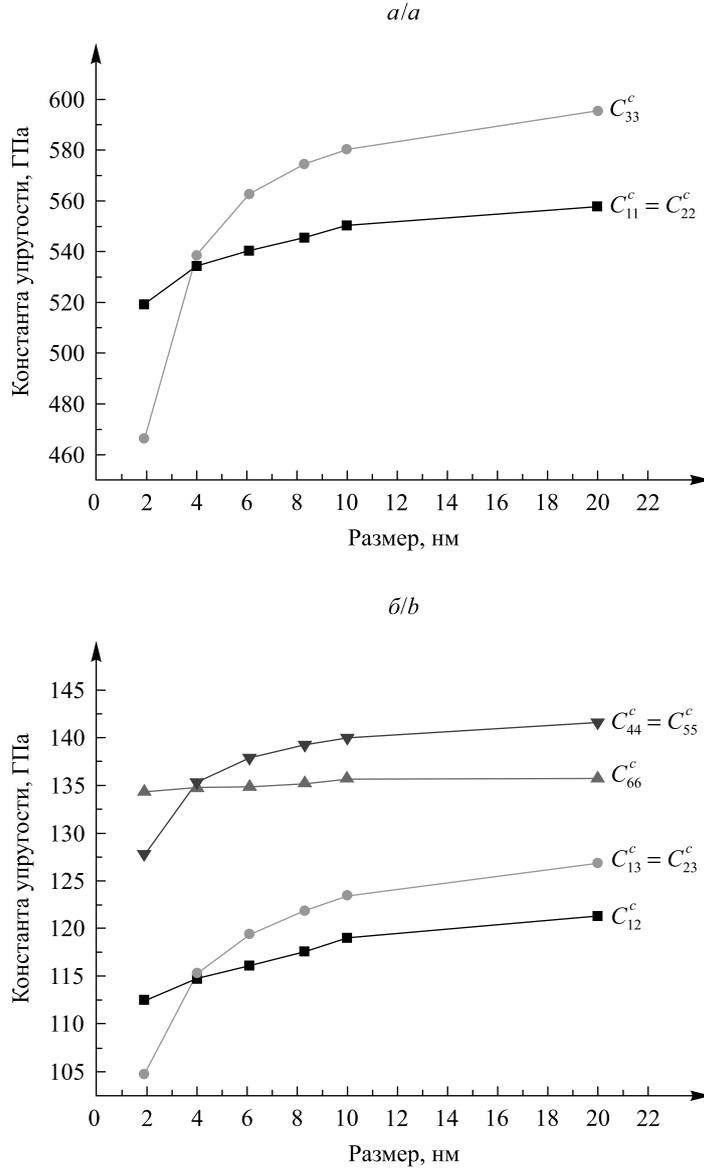


Рис. 3. Зависимость компонент тензора упругих констант столбчатых TiN-нанокристаллов от размера: $a - C_{11}^c, C_{33}^c$; $b - C_{12}^c, C_{13}^c, C_{44}^c, C_{66}^c$

Fig. 3. The dependence of the elastic constants for the columnar TiN-nanocrystals on the size: $a - C_{11}^c, C_{33}^c$; $b - C_{12}^c, C_{13}^c, C_{44}^c, C_{66}^c$

около 10 нм, что имеет место при высоте нанокристалла более 90 нм (исходя из анализа аппроксимационной зависимости на рис. 2). Уменьшение констант упругости нанокристаллов вместе с уменьшением размера обусловлено снижением их энергии связи [13].

Для оценки модуля Юнга текстурированного TiN-слоя вычислены соответствующие модули столбчатых нанокристаллов вдоль направлений [111], [200] и [220], определяемые через константу упругой податливости $S_{11}^{[mnp]}$ по формулам [16]:

$$E_{[mnp]} = \frac{1}{S_{11}^{[mnp]}},$$

$$S_{11}^{[mnp]} = S_{11}^c - 2 \left(S_{11}^c - S_{12}^c - \frac{1}{2} S_{44}^c \right) (\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2),$$

$$S_{11}^c = \frac{C_{11}^c + C_{12}^c}{(C_{11}^c + 2C_{12}^c)(C_{11}^c - C_{12}^c)}, \quad S_{12}^c = \frac{-C_{12}^c}{(C_{11}^c + 2C_{12}^c)(C_{11}^c - C_{12}^c)}, \quad S_{44}^c = \frac{1}{C_{44}^c},$$

где α_i ($i = 1, 2, 3$) – направляющие косинусы между вектором $\vec{R}_{[mnp]}$ и базисными векторами \vec{a}_i прямой решетки в кристаллофизической (ортогональной) системе координат.

Модуль Юнга текстурированного TiN-слоя (оценка по Фойгту) в перпендикулярном направлении оценивался через соответствующие модули столбчатых нанокристаллов посредством усреднения с помощью текстурных (весовых) коэффициентов $w_{[mnp]}$:

$$\langle E_c \rangle = w_{[111]} E_{[111]} + w_{[220]} E_{[220]} + w_{[200]} E_{[200]}.$$

Аналогично проводилось усреднение константы упругой податливости текстурированного слоя:

$$\langle S_{11}^c \rangle = w_{[111]} S_{11}^{[111]} + w_{[220]} S_{11}^{[220]} + w_{[200]} S_{11}^{[200]}.$$

Результаты моделирования упругих свойств текстурированного TiN-слоя в зависимости от его толщины представлены на рис. 4. Согласно экспериментальным данным [6; 7], для нанокристаллических TiN-пленок толщиной примерно 336–400 нм модуль Юнга принимает значения 280–342 ГПа. Несответствие расчетных значений экспериментальным связано с тем, что получаемые тонкие пленки являются менее плотными вследствие наличия пор по сравнению с объемным материалом [9]. Так, относительная массовая плотность ρ_r может составлять 0,5–0,8, что подтверждается рентгеновской рефлектометрией [17]. Поэтому необходимо ввести поправку на пористость путем умножения упругих модулей (а упругих податливостей, как обратных величин, – путем деления) на относительную массовую плотность как на коэффициент. Это показано на рис. 4, что удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными. Далее при расчетах величину введенного коэффициента полагаем равной среднему значению $\bar{\rho}_r = 0,65$.

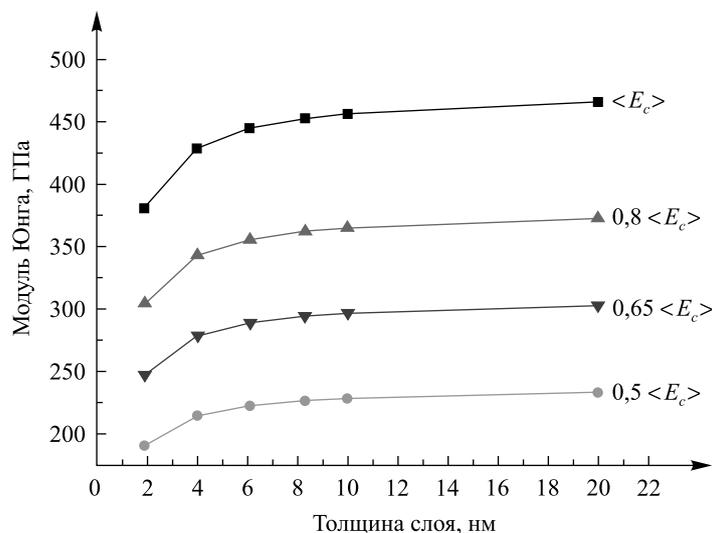


Рис. 4. Зависимость модуля Юнга текстурированного TiN-слоя от толщины (оценка по Фойгту)

Fig. 4. The dependence of the Young modulus for the textured TiN-layer on the thickness (the Foight's evaluation)

Аморфный Si_3N_4 -слой выбирался с толщиной более 5,0 нм. Значение модуля Юнга из эксперимента для аморфной Si_3N_4 -пленки толщиной примерно 284 нм составляет около 200 ГПа [18], что заметно ниже, чем расчетное 315 ГПа для аморфной матрицы [13]. Существенную разницу между указанными значениями модулей можно объяснить тем, что плотность аморфной пленки, полученной экспериментально, ниже плотности объемной матрицы (3,1 г/см³). В работе [19] с помощью методов молекулярной динамики созданы аморфные структуры Si_3N_4 с различными плотностями от 2,4 до 3,4 г/см³, для которых были определены структурные характеристики (длины связей и углы) и механические свойства. Экспериментальное значение $E_a = 200$ ГПа [18] соответствует теоретическому [19] в случае, если массовая плотность составляет около 2,7 г/см³. Изменение модуля Юнга с плотностью в данном случае связано с варьированием структурных характеристик аморфного Si_3N_4 , т. е. с изменением топологии структуры случайной тетраэдрической сетки связей.

Для дальнейшего расчета эффективного модуля Юнга слоистого TiN/Si₃N₄-нанокompозита примем экспериментальное значение модуля Юнга для аморфного слоя, считая его неизменным для Si₃N₄-слоев с двумя рассматриваемыми фиксированными толщинами 5 и 10 нм.

Зависимость эффективных упругих модулей слоистого TiN/Si₃N₄-нанокompозита от соотношения толщин слоев и периода модуляции. На рис. 5 показаны величины эффективных модулей Юнга, оцененных по Фойгту и Рейссу (формулы (1) и (2)) для слоистого TiN/Si₃N₄-нанокompозита, в зависимости от объемной доли нанокристаллической фазы для двух вариантов толщины аморфной фазы. Выполненные классические оценки верхней (по Фойгту) и нижней (по Рейссу) границ упругих модулей показывают несущественное отличие их значений. В качестве эффективного модуля Юнга для слоистого TiN/Si₃N₄-нанокompозита можно принять среднее значение $\langle E_{eff} \rangle$ из двух оценок упругого модуля.

С увеличением доли TiN-фазы, как более жесткой, наблюдается увеличение модуля упругости (см. рис. 5). Так как при изменении толщины TiN-слоя толщина Si₃N₄-слоя оставалась фиксированной (равной 5 и 10 нм для двух рассматриваемых случаев), то период модуляции $H = h_c + h_a$ являлся переменной величиной. С его ростом и одновременным уменьшением толщины аморфного слоя (с 10 до 5 нм) имеет место увеличение упругих модулей слоистого нанокompозита (рис. 6).

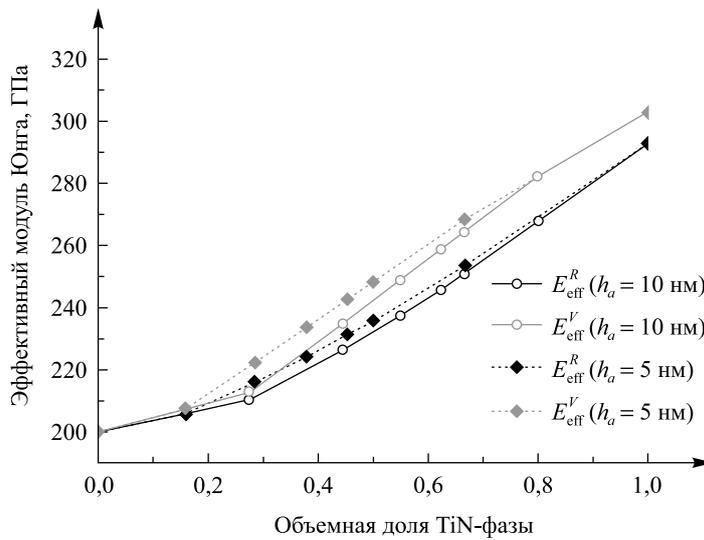


Рис. 5. Зависимость эффективного модуля Юнга слоистого TiN/Si₃N₄-нанокompозита от соотношения толщин слоев

Fig. 5. The dependence of the effective Young modulus for multilayered TiN/Si₃N₄-nanocomposite on the thicknesses ratio

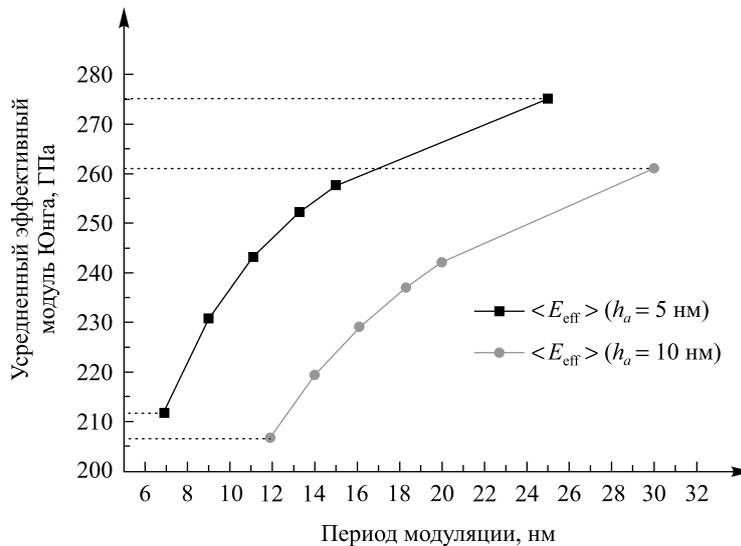


Рис. 6. Зависимость эффективного модуля Юнга слоистого TiN/Si₃N₄-нанокompозита от периода модуляции

Fig. 6. The dependence of the effective Young modulus for multilayered TiN/Si₃N₄-nanocomposite on the modulation period

В пределе при $f_c \rightarrow 1$ и толщинах TiN-слоя h_c более 10 нм упругие модули нанокристаллической фазы достигают значений, характерных для наноразмерных TiN-пленок с соответствующей массовой плотностью. Так же как и для матричного нанокompозита [13], путем изменения объемной доли нанокристаллической фазы (соотношения толщин слоев двух фаз) и периода модуляции можно варьировать упругие модули слоистого нанокompозита до 30 % (зависит от плотностей слоев), добиваясь необходимых упругих свойств.

Полученные теоретические результаты хорошо согласуются с экспериментально известной для многослойных ZrN/SiN_x-покрытий общей тенденцией поведения модуля Юнга в зависимости от объемной доли нанокристаллической фазы и периода модуляции [18].

Заключение

Установлены закономерности формирования упругих свойств слоистого TiN/Si₃N₄-нанокompозита, определяемые зависимостью эффективного модуля Юнга от соотношения толщин слоев и периода модуляции. Показано, что при увеличении соотношения толщины нанокристаллической TiN-фазы к толщине аморфной Si₃N₄-фазы и периода модуляции имеет место рост эффективного модуля Юнга, в пределе при $f_c \rightarrow 1$ и толщинах TiN-слоя $h_c > 10$ нм принимающего значение упругих модулей TiN-пленки с соответствующей массовой плотностью.

Увеличение эффективного модуля Юнга слоистого нанокompозита с ростом объемной доли нанокристаллической фазы объясняется проявлением армирующих свойств включений в виде слоев и статистической природой упругих свойств гетерогенного материала. Повышение эффективного упругого модуля с увеличением толщины нанокристаллического слоя и периода модуляции связано с ростом упругих модулей самих нанокристаллов вследствие повышения их энергии связи.

Библиографические ссылки

1. Niederhofer A, Bolom T, Nesladek P, Moto K, Eggs C, Patil DS, et al. The role of percolation threshold for the control of the hardness and thermal stability of super- and ultrahard nanocomposites. *Surface and Coatings Technology*. 2001;146:183–188. DOI: 10.1016/S0257-8972(01)01469-4.
2. Wan Q, Yang B, Liu HD, Mei QS, Chen YM. Ion irradiation tolerance of Ti—Si—N nanocomposite coating. *Surface and Coatings Technology*. 2016;305:165–169. DOI: 10.1016/j.surfcoat.2016.08.044.
3. Raveh A, Zukerman I, Shneck R, Avni R, Fried I. Thermal stability of nanostructured superhard coatings: a review. *Surface and Coatings Technology*. 2007;201(13):6136–6142. DOI: 10.1016/j.surfcoat.2006.08.131.
4. Veprek S, Veprek-Heijman MG, Zhang R. Chemistry, physics and fracture mechanics in search for superhard materials, and the origin of superhardness in *nc*-TiN/*a*-Si₃N₄ and related nanocomposites. *Journal of Physics and Chemistry of Solids*. 2007;68(5–6):1161–1168. DOI: 10.1016/j.jpcs.2007.01.013.
5. Veprek S. Recent search for new superhard materials: Go nano! *Journal of Vacuum Science and Technology A: Vacuum, Surfaces, and Films*. 2013;31(5):050822. DOI: 10.1116/1.4818590.
6. Kumar DD, Kumar N, Kalaiselvam S, Dash S, Jayavel R. Micro-tribo-mechanical properties of nanocrystalline TiN thin films for small scale device applications. *Tribology International*. 2015;88:25–30. DOI: 10.1016/j.triboint.2015.02.031.
7. He C, Zhang J, Song G, Ma G, Du Z, Wang J, et al. Microstructure and mechanical properties of reactive sputtered nanocrystalline (Ti, Al)N films. *Thin Solid Films*. 2015;584:192–197. DOI: 10.1016/j.tsf.2014.12.027.
8. Li TQ, Noda S, Komiyama H. Initial growth stage of nanoscaled TiN films: formation of continuous amorphous layers and thickness-dependent crystal nucleation. *Journal of Vacuum Science and Technology A: Vacuum, Surfaces, and Films*. 2003;21(5):1717–1723. DOI: 10.1116/1.1598975.
9. Abadias G, Leroy WP, Mahieu S, Depla D. Influence of particle and energy flux on stress and texture development in magnetron sputtered TiN films. *Journal of Physics D: Applied Physics*. 2013;46(5):055301–055309. DOI: 10.1088/0022-3727/46/5/055301.
10. Yu L, Donga S, Xu J, Kojima I. Microstructure and hardening mechanisms in *a*-Si₃N₄/*nc*-TiN nanostructured multilayers. *Thin Solid Films*. 2008;516(8):1864–1870. DOI: 10.1016/j.tsf.2007.09.022.
11. Plimpton S. Fast parallel algorithms for short-range molecular dynamics. *Journal of Computational Physics*. 1995;117(1):1–19. DOI: 10.1006/jcph.1995.1039.
12. Quantum ESPRESSO [Internet]. [Cited 2018 November 8]. Available from: <https://www.quantum-espresso.org>.
13. Safronov IV, Shymanski VI, Uglov VV, Kvasov NT, Dorozhkin NN. Modeling of microstructure and elastic properties of *nc*-TiN/*a*-Si₃N₄ nanocomposite. *Computational Materials Science*. 2016;123:256–262. DOI: 10.1016/j.commatsci.2016.06.006.
14. Barna PB, Adamik M. Fundamental structure forming phenomena of polycrystalline films and the structure zone models. *Thin Solid Films*. 1998;317(1–2):27–33. DOI: 10.1016/S0040-6090(97)00503-8.
15. Petrov I, Barna PB, Hultman L, Greene JE. Microstructural evolution during film growth. *Journal of Vacuum Science and Technology A: Vacuum, Surfaces, and Films*. 2003;21(5):S117–S128. DOI: 10.1116/1.1601610.
16. Най Дж. *Физические свойства кристаллов*. Шувалов ЛА, переводчик. Москва: Издательство иностранной литературы; 1960. 386 с.
17. Mahieu S, Leroy WP, van Aeken K, Wolter M, Colaux J, Lucas S, et al. Sputter deposited transition metal nitrides as back electrode for CIGS solar cells. *Solar Energy*. 2011;85(3):538–544. DOI: 10.1016/j.solener.2010.12.021.

18. Abadias G, Uglov VV, Saladukhin IA, Zlotski SV, Tolmachova G, Dub SN, et al. Growth, structural and mechanical properties of magnetron-sputtered ZrN/SiN_x nanolaminated coatings. *Surface and Coatings Technology*. 2016;308:158–167. DOI: 10.1016/j.surfcoat.2016.06.099.
19. Le V-V, Nguyen T-T, Pham K-H. The structural correlation and mechanical properties in amorphous silicon nitride under densification. *Journal of Non-Crystalline Solids*. 2013;363:6–12. DOI: 10.1016/j.jnoncrsol.2012.12.011.

References

1. Niederhofer A, Bolom T, Nesladek P, Moto K, Eggs C, Patil DS, et al. The role of percolation threshold for the control of the hardness and thermal stability of super- and ultrahard nanocomposites. *Surface and Coatings Technology*. 2001;146:183–188. DOI: 10.1016/S0257-8972(01)01469-4.
2. Wan Q, Yang B, Liu HD, Mei QS, Chen YM. Ion irradiation tolerance of Ti—Si—N nanocomposite coating. *Surface and Coatings Technology*. 2016;305:165–169. DOI: 10.1016/j.surfcoat.2016.08.044.
3. Raveh A, Zukerman I, Shneck R, Avni R, Fried I. Thermal stability of nanostructured superhard coatings: a review. *Surface and Coatings Technology*. 2007;201(13):6136–6142. DOI: 10.1016/j.surfcoat.2006.08.131.
4. Veprek S, Veprek-Heijman MG, Zhang R. Chemistry, physics and fracture mechanics in search for superhard materials, and the origin of superhardness in *nc*-TiN/*a*-Si₃N₄ and related nanocomposites. *Journal of Physics and Chemistry of Solids*. 2007;68(5–6):1161–1168. DOI: 10.1016/j.jpcs.2007.01.013.
5. Veprek S. Recent search for new superhard materials: Go nano! *Journal of Vacuum Science and Technology A: Vacuum, Surfaces, and Films*. 2013;31(5):050822. DOI: 10.1116/1.4818590.
6. Kumar DD, Kumar N, Kalaiselvam S, Dash S, Jayavel R. Micro-tribo-mechanical properties of nanocrystalline TiN thin films for small scale device applications. *Tribology International*. 2015;88:25–30. DOI: 10.1016/j.triboint.2015.02.031.
7. He C, Zhang J, Song G, Ma G, Du Z, Wang J, et al. Microstructure and mechanical properties of reactive sputtered nanocrystalline (Ti, Al)N films. *Thin Solid Films*. 2015;584:192–197. DOI: 10.1016/j.tsf.2014.12.027.
8. Li TQ, Noda S, Komiyama H. Initial growth stage of nanoscaled TiN films: formation of continuous amorphous layers and thickness-dependent crystal nucleation. *Journal of Vacuum Science and Technology A: Vacuum, Surfaces, and Films*. 2003;21(5):1717–1723. DOI: 10.1116/1.1598975.
9. Abadias G, Leroy WP, Mahieu S, Depla D. Influence of particle and energy flux on stress and texture development in magnetron sputtered TiN films. *Journal of Physics D: Applied Physics*. 2013;46(5):055301–055309. DOI: 10.1088/0022-3727/46/5/055301.
10. Yu L, Donga S, Xu J, Kojima I. Microstructure and hardening mechanisms in *a*-Si₃N₄/*nc*-TiN nanostructured multilayers. *Thin Solid Films*. 2008;516(8):1864–1870. DOI: 10.1016/j.tsf.2007.09.022.
11. Plimpton S. Fast parallel algorithms for short-range molecular dynamics. *Journal of Computational Physics*. 1995;117(1):1–19. DOI: 10.1006/jcph.1995.1039.
12. Quantum ESPRESSO [Internet]. [Cited 2018 November 8]. Available from: <https://www.quantum-espresso.org>.
13. Safronov IV, Shymanski VI, Uglov VV, Kvasov NT, Dorozhkin NN. Modeling of microstructure and elastic properties of *nc*-TiN/*a*-Si₃N₄ nanocomposite. *Computational Materials Science*. 2016;123:256–262. DOI: 10.1016/j.commatsci.2016.06.006.
14. Barna PB, Adamik M. Fundamental structure forming phenomena of polycrystalline films and the structure zone models. *Thin Solid Films*. 1998;317(1–2):27–33. DOI: 10.1016/S0040-6090(97)00503-8.
15. Petrov I, Barna PB, Hultman L, Greene JE. Microstructural evolution during film growth. *Journal of Vacuum Science and Technology A: Vacuum, Surfaces, and Films*. 2003;21(5):S117–S128. DOI: 10.1116/1.1601610.
16. Nye JF. *Physical Properties of Crystals*. London: Oxford University Press; 1957. 145 p.
Russian edition: Nye JF. *Fizicheskie svoistva kristallov*. Shuvalov LA, translator. Moscow: Izdatel'stvo inostrannoi literatury; 1960. 386 p.
17. Mahieu S, Leroy WP, van Aeken K, Wolter M, Colaux J, Lucas S, et al. Sputter deposited transition metal nitrides as back electrode for CIGS solar cells. *Solar Energy*. 2011;85(3):538–544. DOI: 10.1016/j.solener.2010.12.021.
18. Abadias G, Uglov VV, Saladukhin IA, Zlotski SV, Tolmachova G, Dub SN, et al. Growth, structural and mechanical properties of magnetron-sputtered ZrN/SiN_x nanolaminated coatings. *Surface and Coatings Technology*. 2016;308:158–167. DOI: 10.1016/j.surfcoat.2016.06.099.
19. Le V-V, Nguyen T-T, Pham K-H. The structural correlation and mechanical properties in amorphous silicon nitride under densification. *Journal of Non-Crystalline Solids*. 2013;363:6–12. DOI: 10.1016/j.jnoncrsol.2012.12.011.

ФИЗИКА ЯДРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

ATOMIC NUCLEUS AND ELEMENTARY PARTICLE PHYSICS

УДК 530.1

МИНИМАЛЬНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И КОНЦЕПЦИЯ ИЗМЕРИМОСТИ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ, ГРАВИТАЦИИ И ТЕРМОДИНАМИКЕ

А. Э. ШАЛЫТ-МАРГОЛИН¹⁾

¹⁾Институт ядерных проблем БГУ, ул. Бобруйская, 11, 220030, г. Минск, Беларусь

В настоящее время подавляющее большинство исследователей согласны с тем, что минимальная длина должна появляться в высоких (планковских) энергиях. Однако современные низкоэнергетические теории при далеких от планковских энергиях (квантовая механика, квантовая теория поля, гравитация и т. д.) являются непрерывными, т. е. минимальная длина в них нулевая. В настоящей статье представлен альтернативный подход, в котором гипотетическая минимальная длина ненулевая на всех масштабах энергий. Формулируются понятия измеримости и измеримых величин, в рамках которых отсутствуют абстрактные бесконечно малые приращения пространственно-временных координат. В результате известные низкоэнергетические теории (квантовая теория или гравитация) неизбежно заменяются дискретными теориями, очень близкими к первоначальным, но имеющими совершенно другой математический аппарат. В этом случае реальная дискретность проявляется только в высоких энергиях, близких к планковским. Аналогичное (дуальное) понятие измеримости определяется в термодинамике на основе минимальной обратной температуры. Отмечено, что с помощью введенных формулировок можно получить некоторые следствия для гравитационной термодинамики черных дыр на всех масштабах энергий. Кроме этого, построен измеримый вариант общей теории относительности и показано, что он представляет ее деформацию. В общем виде продемонстрировано, что все основные ингредиенты общей теории относительности имеют измеримые аналоги.

Ключевые слова: измеримость; квантовая теория; гравитация; термодинамика.

Образец цитирования:

Шалыт-Марголин А.Э. Минимальные величины и концепция измеримости в квантовой теории, гравитации и термодинамике. *Журнал Белорусского государственного университета. Физика.* 2019;1:40–50 (на англ.).

For citation:

Shalyt-Margolin AE. Minimal quantities and measurability conception in quantum theory, gravity and thermodynamics. *Journal of the Belarusian State University. Physics.* 2019;1:40–50.

Автор:

Александр Эммануилович Шалыт-Марголин – доктор физико-математических наук; главный научный сотрудник лаборатории фундаментальных взаимодействий.

Author:

Alexander E. Shalyt-Margolin, doctor of science (physics and mathematics); chief researcher of the laboratory of fundamental interactions.
a.shalyt@mail.ru

MINIMAL QUANTITIES AND MEASURABILITY CONCEPTION IN QUANTUM THEORY, GRAVITY AND THERMODYNAMICS

A. E. SHALYT-MARGOLIN^a

^aResearch Institute for Nuclear Problems, Belarusian State University,
11 Babrujskaja Street, Minsk 220030, Belarus

At the present time the majority of researchers agree that a minimal length is involved at high (Planck's) energies. But all the currently used low-energy theories (quantum mechanics and quantum field theory, gravity, etc.) are continuous, i. e. the minimal length in them is zero. This article presents an alternative approach when the hypothetical minimal length is nonzero at all the energy scales. By this approach the definition of measurability and of measurable quantities is given, within the scope of which there is no abstract infinitesimal increment of space-time coordinates. As a result, the initial low-energy continuous theory (quantum theory or general relativity) inevitably must be replaced by a discrete theory that gives very close results but operates with absolutely other mathematical apparatus. A real discreteness is exhibited only at high energies which are close to the Planck energies. A analogous concept (dual) of measurability is defined in thermodynamics on the basis of a hypothetical minimal inverse temperature. Based on this notions, some implications are obtained, in particular, for gravitational thermodynamics of black holes at all the energy scales, quantum corrections of the basic quantities in the general case. Besides, the measurable variant of General Relativity (GR) is constructed and it is shown that this variant represents its deformation. In the general form it is demonstrated that all the basic ingredients of GR have their measurable analogs.

Key words: measurability; quantum theory; gravity; thermodynamics.

Introduction

The mathematical apparatus of the present-day fundamental physical theories (Quantum Theory, Special and General Relativity, etc.) is based on the initial assumption that variations of a physical system *are independent of the existing energies*. Specifically, in the above-mentioned theories the principal mathematical instruments are the infinitesimal variations (increments) dt , dx_i , dp_i , dE , $i = 1, 2, 3$. The apparatus based on the use of these variations comes from mathematical analysis and is completely adequate for classical mechanics, where continuous space-time forms the base. But in this approach, due to the introduction of ultraviolet and infrared divergences into a Quantum Theory (QT) [1] and also due to the absence of correct passage to the high-energy (ultraviolet) region in Gravity (GR) [2], we are facing very serious problems.

The present manuscript is based on the author's works [3–8]. The main target of this papers is to construct a correct quantum theory and gravity in terms of the variations (increments) *dependent on the existent energies*, i. e., the theory should not involve above infinitesimal variations (increments). By the author's opinion, these problems are solvable but beyond the paradigm of continuous space-time.

To solve these problems, in the above-mentioned works, using the minimal length and minimal time, the author investigates a discrete space-time model, for which at low energies (far from the Planck energies) the results are to a high accuracy close to those obtained with a continuous space-time model. And at high (Planck's) energies the indicated model is fundamentally discrete, leading to principally new results. All variations in any physical system considered in such a discrete model should be dependent on the existent energies.

The primary instrument for such a discrete model is the measurability notion introduced in [4] and more precise in [7; 8].

In [5; 6] is demonstrated that a similar measurability notion (in essence dual) may be also introduced in thermodynamics on the basis of a minimal inverse temperature, leading to very interesting inferences for thermodynamics of black holes at all the energy scales.

Necessary preliminary information

It is assumed that there is a minimal (universal) unit for measurement of the length ℓ corresponding to some maximal energy $E_\ell = \frac{\hbar c}{\ell}$ and a universal unit for measurement of time τ : $\tau = \frac{\ell}{c}$. Without loss of generality, we can consider ℓ and τ at Plank's level, i. e. $\ell = \kappa l_p$, $\tau = \kappa t_p$, where the numerical constant κ is on the order of 1, i. e. $E_\ell \propto E_p$ with the corresponding proportionality factor.

Then we consider a set of all nonzero momenta

$$P = \{p_{x_i}\}, i = 1, 2, 3; |p_{x_i}| \neq 0$$

and subset (Primarily Measurable Momenta, or PMM)

$$p_{x_i} \equiv p_{N_i} = \frac{\hbar}{N_i \ell}, \quad (1)$$

where N_i is an integer number and p_{x_i} is the momentum corresponding to the coordinate x_i .

From these formula it is not unreasonable to propose the following definition.

Definition 1. Primary Measurability. 1.1. Any variation in Δx_i for the coordinates x_i and Δt of the time t is considered primarily measurable if

$$\Delta x_i = N_{\Delta x_i} \ell, \quad \Delta t = N_{\Delta t} \tau, \quad (2)$$

where $N_{\Delta x_i} \neq 0$ and $N_{\Delta t} \neq 0$ are integer numbers.

1.2. Let us define any physical quantity as primary or elementary measurable when its value is consistent with formulae (1) and (2).

Then we consider formula (2) and definition 1 with the addition of the momenta $p_{x_0} \equiv p_{N_0} = \frac{\hbar}{N_0 \ell}$, where N_0 is an integer number corresponding to the time coordinate ($N_{\Delta t}$ in formula (2)).

For convenience, we denote Primarily Measurable Quantities satisfying definition 1 in the abbreviated form as PMQ.

It is clear that PMQ is inadequate for studies of the physical processes. To illustrate, the space-time quantities

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{N_i} &= p_{N_i c} \frac{\ell^2}{c \hbar}, \\ \frac{\ell}{N_i} &= p_{N_i} \frac{\ell^2}{\hbar}, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (3)$$

where p_{N_i} , $p_{N_i c}$ are PMM, up to the fundamental constants are coincident with p_{N_i} , $p_{N_i c}$ and they may be involved at any stage of the calculations but, evidently, they are not PMQ in the general case.

Note: $\ell = \kappa l_p$; $l_p^2 = G \frac{\hbar}{c^3}$; $\frac{\ell^2}{\hbar} = \frac{\kappa^2 G}{c^3}$. Thus, it is reasonable to use definition 2.

Definition 2. Generalized Measurability. We define any physical quantity at all energy scales as generalized measurable or, for simplicity, measurable if any of its values may be obtained in terms of PMQ specified by points 1.1, 1.2 of definition 1.

The main target of the author is to form a quantum theory and gravity only in terms of measurable quantities (or of PMQ).

Now we consider separately the two cases.

A) Low Energies, $E \ll E_p$.

Domain $P_{LE} \subset P$ (LE is abbreviation of «Low Energies») defined by the conditions

$$P_{LE} = \{p_{x_i}\}, i = 1, 2, 3; P_\ell \gg |p_{x_i}| \neq 0,$$

where $P_\ell = \frac{E_\ell}{c}$ – maximal momentum.

In this case Primarily Measurable Momenta takes the form

$$N_i = \frac{\hbar}{p_{x_i} \ell},$$

or

$$p_{x_i} \equiv p_{N_i} = \frac{\hbar}{N_i \ell},$$

$$|N_i| \gg 1.$$

As the energies $E \ll E_\ell$ are low, i. e. ($|N_i| \gg 1$), primary measurable momenta are sufficient to specify the whole domain of the momenta to a high accuracy P_{LE} . Of course, all the calculations of point A) also comply with the primary measurable momenta $p_{N_i c} \equiv p_{N_i}$. Because of this, in what follows we understand P_{LE} as a set of the primary measurable momenta $p_{x_\mu} = p_{N_\mu}$, ($\mu = 0, \dots, 3$) with $|N_\mu| \gg 1$.

Remark 1. It should be noted that, as all the experimentally involved energies E are low, they meet the condition $E \ll E_\ell$, specifically for LHC the maximal energies are $\approx 10 \text{ TeV} = 10^4 \text{ GeV}$, that is by 15 orders of magnitude lower than the Planck energy $\approx 10^{19} \text{ GeV}$. But since the energy E_ℓ is on the order of the Planck energy $E_\ell \approx E_p$, in this case all the numbers N_i for the corresponding momenta will meet the condition $\min |N_i| \approx 10^{15}$. So, all the experimentally involved momenta are considered to be primary measurable momenta, i. e. P_{LE} at low energies $E \ll E_\ell$.

In this way in the proposed paradigm at low energies $E \ll E_p$ any momentum with p_{x_μ} , $\mu = 0, \dots, 3$, takes the form $p_{x_\mu} = p_{N_\mu}$, where N_μ – integer with the property $|N_\mu| \gg 1$.

Further for the fixed point x_μ we use the notion $p_{x_\mu} = p_{N_{x_\mu}}$ or $p_{x_\mu} = p_{N_{\Delta x_\mu}}$.

Naturally, the small variation Δp_{x_μ} at the point $p_{x_\mu} = p_{N_{x_\mu}}$ of the momentum space P_{LE} is represented by the primary measurable momentum $p_{N'_{x_\mu}}$ with the property $|N'_{x_\mu}| > |N_{x_\mu}|$.

The problem is as follows: is any possibility that Δp_{x_μ} is infinitesimal? For the special point $p_{x_\mu} = p_{N_{x_\mu}}$ the answer is negative.

Indeed, the «nearest» points to $p_{N_{x_\mu}}$ are $p_{N_{x_\mu}-1}$ and $p_{N_{x_\mu}+1}$.

It is obvious that

$$\begin{aligned} |p_{N_{x_\mu}} - p_{N_{x_\mu}-1}| &= |p_{N_{x_\mu}(N_{x_\mu}-1)}|, \\ |p_{N_{x_\mu}} - p_{N_{x_\mu}+1}| &= |p_{N_{x_\mu}(N_{x_\mu}+1)}|. \end{aligned}$$

It is easily seen that the difference $|p_{N_{x_\mu}(N_{x_\mu}+1)}| - |p_{N_{x_\mu}(N_{x_\mu}-1)}|$ for $|N_{x_\mu}| \gg 1$ is infinitesimal, i. e., to within a high accuracy, we have $|p_{N_{x_\mu}(N_{x_\mu}+1)}| = |p_{N_{x_\mu}(N_{x_\mu}-1)}|$. And a small variation of $|\Delta p_{x_\mu}|$ at the point $p_{x_\mu} = p_{N_{x_\mu}}$ has a minimum that equals $|p_{N_{x_\mu}(N_{x_\mu}+1)}|$. Clearly, with an increase in $|N_{x_\mu}|$, we can obtain no matter how small $|p_{N_{x_\mu}(N_{x_\mu}+1)}|$.

So, in the proposed paradigm at low energies $E \ll E_p$ a set of the primarily measurable P_{LE} is discrete, and in every measurement of $\mu = 0, \dots, 3$ there is the discrete subset $P_{x_\mu} \subset P_{LE}$:

$$P_{x_\mu} \doteq \left\{ \dots, p_{N_{x_\mu}-1}, p_{N_{x_\mu}}, p_{N_{x_\mu}+1}, \dots \right\}.$$

In this case, as compared to the canonical quantum theory, in continuous space-time we have the following substitution:

$$\begin{aligned} dp_\mu &\mapsto \Delta p_{N_{x_\mu}} = p_{N_{x_\mu}} - p_{N_{x_\mu}+1} = p_{N_{x_\mu}(N_{x_\mu}+1)}, \\ \frac{\partial}{\partial p_\mu} &\mapsto \frac{\Delta}{\Delta p_\mu}, \quad \frac{\partial F}{\partial p_\mu} \mapsto \frac{\Delta F(p_{N_{x_\mu}})}{\Delta p_\mu} = \frac{F(p_{N_{x_\mu}}) - F(p_{N_{x_\mu}+1})}{p_{N_{x_\mu}} - p_{N_{x_\mu}+1}} = \frac{F(p_{N_{x_\mu}}) - F(p_{N_{x_\mu}+1})}{p_{N_{x_\mu}(N_{x_\mu}+1)}}. \end{aligned} \quad (4)$$

It is clear that for sufficiently high integer values of $|N_{x_\mu}|$, formula (4) reproduces a continuous paradigm in the momentum space to any preassigned accuracy.

Similarly for sufficiently high integer values of $|N_t|$ and N_t, \dots, N_x , the quantities $\frac{\tau}{N_t}, \frac{\ell}{N_x}$ may be arbitrary small.

Hence, for sufficiently high integer values of $|N_t|$ and $|N_x|$, the quantities $\frac{\tau}{N_t}, \frac{\ell}{N_x}$ are nothing but a measurable analog the infinitesimal quantities dx_i, dt , i. e. $dx_\mu, \mu = 0, \dots, 3$.

Thus, for sufficiently high integer values of $|N_{x_\mu}|$, $\mu = 0, \dots, 3$, $\frac{\tau}{N_t}, \frac{\ell}{N_{x_i}}$ (which are the primarily measurable momenta P_{x_μ} up to fundamental constant) represent a measurable analog of small (and infinitesimal) space-time increments in the space-time variety $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^4$.

Because of this, for sufficiently high integer values of $|N_{x_\mu}|$, we have the following correspondence

$$dx_\mu \mapsto \frac{\ell}{N_{x_\mu}},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \mapsto \frac{\Delta}{\Delta_{N_{x_\mu}}}, \quad \frac{\partial F}{\partial x_\mu} \mapsto \frac{\Delta F(x_\mu)}{\Delta_{N_{x_\mu}}} = \frac{F\left(x_\mu + \frac{\ell}{N_{x_\mu}}\right) - F(x_\mu)}{\ell/N_{x_\mu}}.$$

Now we formulate the principle of **correspondence to continuous theory (CCT)**. At low energies $E \ll E_p$ (or same $E \ll E_\ell$) the infinitesimal space-time quantities dx_μ , $\mu = 0, \dots, 3$, and also infinitesimal values of the momenta dp_i , $i = 1, 2, 3$, and of the energies dE form the basic instruments («construction materials») for any theory in continuous space-time. Because of this, to construct the measurable variant of such a theory, we should find the adequate substitutes for these quantities.

It is obvious that in the first case the substitute is represented by the quantities $\frac{\ell}{N_{x_\mu}}$, where $|N_{x_\mu}|$ – arbitrary large (but finite!) integer, whereas in the second case by $p_{N_{x_i}} = \frac{\hbar}{N_{x_i} \ell}$, $i = 1, 2, 3$; $\varepsilon_{N_{x_0}} = \frac{c\hbar}{N_{x_0} \ell}$, where N_{x_μ} – integer with the above properties $\mu = 0, \dots, 3$.

In this way in the proposed approach all the primary measurable momenta $p_{N_{x_\mu}}, |N_{x_\mu}| \gg 1$ are small quantities at low energies $E \ll E_\ell$ and primary measurable momenta $p_{N_{x_\mu}}$ with sufficiently large $|N_{x_\mu}| \gg 1$ being analogous to infinitesimal quantities of a continuous theory.

As, according to Remark 1, all the momenta at low energies $E \ll E_p$, to a high accuracy, may be considered to be the primary measurable momenta, we derive that at low energies the primary measurable momenta $p_{N_{x_\mu}}$ generate measurable small space-time variations and at sufficiently high $|N_{x_\mu}|$ – infinitesimal variations.

B) High Energies, $E \approx E_p$.

In this case primary measurable momenta are

$$N_i = \frac{\hbar}{p_{x_i} \ell},$$

or

$$p_{x_i} \equiv p_{N_i} = \frac{\hbar}{N_i \ell},$$

$$|N_i| \approx 1,$$

where N_i is an integer number and p_{x_i} is the momentum corresponding to the coordinate x_i . Evidently, that primary measurable momenta in this case are the discrete set.

The main difference of the case B) from the case A) is in the fact that at High Energies the primary measurable momenta are inadequate for theoretical studies at the energy scales $E \approx E_p$.

This is easily seen when we consider, e. g., the Generalized Uncertainty Principle (GUP), that is an extension of Heisenberg's Uncertainty Principle (HUP), to (Planck) high energies [9–11]

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p} + \alpha' l_p^2 \frac{\Delta p}{\hbar}, \quad (5)$$

where α' is a constant on the order of 1.

Obviously, (5) leads to the minimal length ℓ on the order of the Planck length l_p

$$\Delta x_{\min} = 2\sqrt{\alpha'} l_p \equiv \ell.$$

In his earlier works the author, using simple calculations, has demonstrated that for the equality in (5) at high energies $E \approx E_p$ ($E \approx E_l$), the primary measurable space quantity $\Delta x = N_{\Delta x} \ell$, where $N_{\Delta x} \approx 1$ is an integer number, results in the momentum $p(N_{\Delta x}, GUP)$ [5; 6]

$$\Delta p \equiv p(N_{\Delta x}, GUP) = \frac{\hbar}{1/2(N_{\Delta x} + \sqrt{N_{\Delta x}^2 - 1})\ell}.$$

It is clear that for $N_{\Delta x} \approx 1$ the momentum $\Delta p(N_{\Delta x}, GUP)$ is not a primary measurable momentum.

On the contrary, at low energies $E \ll E_p$ ($E \ll E_l$), the primary measurable space quantity $\Delta x = N_{\Delta x} \ell$, where $N_{\Delta x} \gg 1$ is an integer number, due to the validity of the limit

$$\lim_{N_{\Delta x} \rightarrow \infty} \sqrt{N_{\Delta x}^2 - 1} = N_{\Delta x},$$

leads to the momentum $\Delta p(N_{\Delta x}, GUP)$:

$$\Delta p \equiv \Delta p(N_{\Delta x}, HUP) = \frac{\hbar}{1/2(N_{\Delta x} + \sqrt{N_{\Delta x}^2 - 1})\ell} \approx \frac{\hbar}{N_{\Delta x} \ell} = \frac{\hbar}{\Delta x}.$$

It is inferred that, for sufficiently high integer values of $N_{\Delta x}$ the momentum $\Delta p(N_{\Delta x}, HUP)$ within any high accuracy may be considered to be the primary measurable momentum. This example illustrates that primary measurable momenta are insufficient for studies in the high-energy domain $E \approx E_p$ and we should use the generalized measurable momenta.

As noted above, the main target of the author is to construct a quantum theory at all energy scales in terms of measurable quantities.

Remark 2. As long as ℓ is a minimal measurable length and τ is a minimal measurable time, values of all observable quantities should agree with this condition, i. e. their expressions should not involve the lengths $l < \ell$ and the times $t < \tau$. Because of this, values of the length $\frac{\ell}{N_i}$ and of the time $\frac{\tau}{N_i}$ from formula (3) could not appear in expressions for observable quantities being involved only in intermediate calculations, especially at the summation for replacement of the infinitesimal quantities dx_p, dt on passage from a continuous theory to its measurable variant.

We can assume that at low energies $E \ll E_p$ all the observable quantities are PMQ.

Space-time metrics in measurable format

according to the above-mentioned results, the measurable variant of gravity should be formulated in terms of the small measurable space-time quantities $\frac{\ell}{N_{\Delta x_\mu}}$ or same primary measurable momenta $p_{N_{\Delta x_\mu}}$.

Let us consider the case of the random metric $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x)$ where $x \in \mathbb{R}^4$ is some point of the four-dimensional space \mathbb{R}^4 defined in measurable terms. The phrase «some point of the four-dimensional space \mathbb{R}^4 defined in measurable terms» means that all variations at the indicated point are determined in terms of measurable quantities. Specifically, as mentioned above, all small measurable variations take the form $\frac{\ell}{N_{\Delta x_\mu}} \propto p_{N_{\Delta x_\mu}}$, where $p_{N_{\Delta x_\mu}}$ are primary measurable momenta and $|N_{\Delta x_\mu}| \gg 1$.

Now, any such point $x \in \{x^\lambda\} \in \mathbb{R}^4$ and any set of integer numbers $\{N_{\Delta x^\lambda}\}$ dependent on the point $\{x^\lambda\}$ with the property $|N_{\Delta x^\lambda}| \gg 1$ may be correlated to the bundle with the base \mathbb{R}^4 as follows:

$$B_{N_{x^\lambda}} \doteq \left\{ x^\lambda, \frac{\ell}{N_{\Delta x^\lambda}} \right\} \mapsto \{x^\lambda\}. \quad (6)$$

It is clear that $\lim_{|N_{\Delta x^\lambda}| \rightarrow \infty} B_{N_{x^\lambda}} = \mathbb{R}^4$.

Then as a canonically measurable prototype of the infinitesimal space-time interval square [2]

$$ds^2(x) = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$$

we take the expression

$$\Delta s_{\{N_{\Delta x^\chi}\}}^2(x) = g_{\mu\nu}(x, N_{\Delta x^\chi}) \frac{\ell^2}{N_{\Delta x^\mu} N_{\Delta x^\nu}}. \quad (7)$$

Here $g_{\mu\nu}(x, N_{\Delta x^\chi})$ – metric with the property that minimal measurable variation of metric $g_{\mu\nu}(x, N_{\Delta x^\chi})$ in point (7) for coordinate χ^{th} has form

$$\Delta g_{\mu\nu}(x, N_{\Delta x^\chi})_\chi = g_{\mu\nu}\left(x + \frac{\ell}{N_{\Delta x^\chi}}, N_{\Delta x^\chi}\right) - g_{\mu\nu}(x, N_{\Delta x^\chi}).$$

Let us denote by $\Delta_\chi g_{\mu\nu}(x, N_{\Delta x^\chi})$ quantity

$$\Delta_\chi g_{\mu\nu}(x, N_{\Delta x^\chi}) = \frac{\Delta g_{\mu\nu}(x, N_{\Delta x^\chi})_\chi}{\ell/N_{\Delta x^\chi}}.$$

It is obvious that in the case under study the quantity $\Delta g_{\mu\nu}(x, N_{\Delta x^\chi})_\chi$ is a measurable analog for the infinitesimal increment $dg_{\mu\nu}(x)$ of the χ^{th} component $(dg_{\mu\nu}(x))_\chi$ in a continuous theory, whereas the quantity $\Delta_\chi g_{\mu\nu}(x, N_{\Delta x^\chi})$ is a measurable analog of the partial derivative $\partial_\chi g_{\mu\nu}(x)$.

In this manner we obtain the formula (6) induced bundle over the metric manifold $g_{\mu\nu}(x)$:

$$B_{g, N_{\Delta x^\chi}} \doteq g_{\mu\nu}(x, N_{\Delta x^\chi}) \mapsto g_{\mu\nu}(x).$$

The formula (7) may be written in terms of the primary measurable momenta $(p_{N_{\Delta x^\mu}}, p_{N_{\Delta x^\nu}}) = p_{N_{\Delta x^\alpha}}$ as follows:

$$\Delta s_{N_{\Delta x^\chi}}^2(x) = \frac{\ell^4}{\hbar^2} g_{\mu\nu}(x, N_{\Delta x^\chi}) p_{N_{\Delta x^\mu}} p_{N_{\Delta x^\nu}}.$$

Considering that $\ell \propto l_p$ (i. e. $\ell = \kappa l_p$), where $\kappa = \text{const}$ is on the order of 1, in the general case to within the constant $\frac{\ell^4}{\hbar^2}$ we have

$$\Delta s_{N_{\Delta x^\chi}}^2(x) = g_{\mu\nu}(x, N_{\Delta x^\chi}) p_{N_{\Delta x^\mu}} p_{N_{\Delta x^\nu}}.$$

As follows from the previous formulae, the measurable variant of General Relativity should be defined in the bundle $B_{g, N_{\Delta x^\chi}}$.

Measurable form of Einstein equations at low energies and transition to high energies

Thus, we have measurable (discrete) analogs infinitesimal variations and partial derivative:

$$dg_{\mu\nu}(x) \rightarrow \Delta g_{\mu\nu}(x, N_{\Delta x^\chi})_\chi, \partial_\chi g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \Delta_\chi g_{\mu\nu}(x, N_{\Delta x^\chi}).$$

In particular, the Christoffel symbols

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x) = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(x) (\partial_\nu g_{\beta\mu}(x) + \partial_\mu g_{\nu\beta}(x) - \partial_\beta g_{\mu\nu}(x))$$

have the measurable analog

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x, N_{x_\chi}) = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(x, N_{x_\chi}) (\Delta_\nu g_{\beta\mu}(x, N_{x_\chi}) + \Delta_\mu g_{\nu\beta}(x, N_{x_\chi}) - \Delta_\beta g_{\mu\nu}(x, N_{x_\chi})). \quad (8)$$

Similarly, for the Riemann tensor in a continuous theory we have:

$$R_{\nu\alpha\beta}^\mu(x) \equiv \partial_\alpha \Gamma_{\nu\beta}^\mu(x) - \partial_\beta \Gamma_{\nu\alpha}^\mu(x) + \Gamma_{\gamma\alpha}^\mu(x) \Gamma_{\nu\beta}^\gamma(x) - \Gamma_{\gamma\beta}^\mu(x) \Gamma_{\nu\alpha}^\gamma(x).$$

With the use of formula (8), we can get the corresponding measurable analog, i. e. the quantity $R_{\nu\alpha\beta}^{\mu}(x, N_{x_x})$.

In a similar way we can obtain the measurable variant of Ricci tensor, $R_{\mu\nu}(x, N_{x_x}) \equiv R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha}(x, N_{x_x})$, and the measurable variant of Ricci scalar:

$$R(x, N_{x_x}) \equiv R_{\mu\nu}(x, N_{x_x}) g^{\mu\nu}(x, N_{x_x}).$$

So, for the Einstein Equations (EE) in a continuous theory

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (9)$$

we can derive their measurable analog, for short denoted as Einstein Equations Measurable (EEM):

$$R_{\mu\nu}(x, N_{x_x}) - \frac{1}{2} R(x, N_{x_x}) g_{\mu\nu}(x, N_{x_x}) - \frac{1}{2} \Lambda(x, N_{x_x}) g_{\mu\nu}(x, N_{x_x}) = 8\pi G T_{\mu\nu}(x, N_{x_x}), \quad (10)$$

where G – Newton's gravitational constant.

For correspondence with a continuous theory, the following passage to the limit must take place for all the points x :

$$\lim_{|N_{x_x}| \rightarrow \infty} \Lambda(x, N_{x_x}) = \Lambda,$$

where the cosmological constant Λ is taken from formula (9).

Moreover, for high $|N_{x_x}|$, the quantity $\Lambda(x, N_{x_x})$ should be practically independent of the point x , and we have

$$\Lambda(x, N_{x_x}) \approx \Lambda(x', N_{x'_x}) \approx \Lambda, \quad (11)$$

where $x \neq x'$ and $|N_{x_x}| \gg 1$, $|N_{x'_x}| \gg 1$.

Actually, it is clear that formula (11) reflects the fact that (EEM) given by formula represents deformation of the Einstein equations (EE) in the sense of the definition given Ludwig Faddeev in 1989 [12] with the deformation parameter N_{x_x} , and we have

$$\lim_{|N_{x_x}| \rightarrow \infty} (EEM) = (EE).$$

We denote this deformation as $(EEM)[N_{x_x}]$. Since at low energies $E \ll E_p$ and to within the known constants

we have $\frac{\ell}{N_{x_x}} = p_{N_{x_x}}$, the following deformations of (EU) are equivalent to

$$(EEM)[N_{x_x}] \equiv (EEM)[p_{N_{x_x}}].$$

So, on passage from (EE) to the measurable deformation $(EEM)[N_{x_x}]$ (or identically $(EEM)[p_{N_{x_x}}]$) we

can find solutions for the gravitational equations on the metric bundle $B_{g, N_{x_x}} \doteq [g_{\mu\nu}(x, N_{\Delta x^i})]$.

However, minimal measurable increments for the energies $E \approx E_p$ are not of the form $\frac{\ell}{N_{x_x}}$ because the corresponding momenta $\{p_{N_{x_x}}\}$ are no longer primary measurable, as indicated by the results in «Necessary Preliminary Information».

So, in the proposed paradigm the problem of the ultraviolet generalization of the low-energy measurable gravity $(EEM)[N_{x_x}]$ is actually reduced to the problem: what becomes with the primary measurable momenta

$\{p_{N_{x_x}}\}$, $|N_{x_x}| \gg 1$ at high (Planck's) energies. In a relatively simple case of GUP in «Necessary Preliminary

Information» we have the answer.

In more general case [12]

$$\Delta x \Delta p \geq (\hbar l + \beta(\Delta p)^2), \quad (12)$$

$$\Delta x_0 = 2\hbar\sqrt{\beta} \doteq \ell,$$

when (12) is equality, $\Delta p = p_{N_{\Delta x^\mu}}$ – generalized measurable

$$\begin{aligned} l_H(p_{N_{\Delta x^\mu}}) &\doteq \frac{\ell^2}{\hbar} p_{N_{\Delta x^\mu}}, \quad |p_{N_{\Delta x^\mu}}| \approx 1, \\ \Delta s_{N_{\Delta x^\mu}}^2(x, q) &\doteq g_{\mu\nu}(x, N_{x_\chi}, q) l_H(p_{N_{\Delta x^\mu}}) l_H(p_{N_{\Delta x^\nu}}) \doteq \\ &\doteq \frac{\ell^4}{\hbar^2} g_{\mu\nu}(x, N_{x_\chi}, q) p_{N_{\Delta x^\mu}} p_{N_{\Delta x^\nu}}; \quad |N_{x_\chi}| \approx 1, \\ p_{N_{x_\chi}}, \left(|N_{x_\chi}| \approx 1\right) &\stackrel{|N_{x_\chi}| \approx 1 \rightarrow |N_{x_\chi}| \gg 1}{\Rightarrow} p_{N_{x_\chi}}, \left(|N_{x_\chi}| \gg 1\right). \\ l_H(p_{N_{x_\chi}}), \left(|N_{x_\chi}| \approx 1\right) &\stackrel{|N_{x_\chi}| \approx 1 \rightarrow |N_{x_\chi}| \gg 1}{\Rightarrow} \frac{\ell}{N_{x_\chi}}, \left(|N_{x_\chi}| \gg 1\right). \\ \Delta_q g_{\mu\nu}(x, N_{x_\chi}, q) &\doteq g_{\mu\nu}(x + l_H(p_{N_{x_\chi}}), N_{x_\chi}, q) - g_{\mu\nu}(x, N_{x_\chi}, q), \\ \Delta_{x, q} g_{\mu\nu}(x, N_{x_\chi}, q) &\doteq \frac{\Delta_q g_{\mu\nu}(x, N_{x_\chi}, q)}{l_H(p_{N_{x_\chi}})} \Big|_{x_\chi}. \\ EEM[q] &\doteq R_{\mu\nu}(x, N_{x_\chi}, q) - \frac{1}{2} R(x, N_{x_\chi}, q) g_{\mu\nu}(x, N_{x_\chi}, q) - \\ &- \frac{1}{2} \Lambda(x, N_{x_\chi}, q) g_{\mu\nu}(x, N_{x_\chi}, q) = 8\pi G T_{\mu\nu}(x, N_{x_\chi}, q). \end{aligned} \tag{13}$$

$$\lim_{E \ll E_{\max}} EEM[q] = EEM, \text{ or } \lim_{|N_{x_\chi}| \gg 1} EEM[q] = EEM.$$

Gravitational thermodynamics in measurable form and black holes

In the works [5; 6] it was shown that the concept of measurability (dual) can be introduced in thermodynamics based on the minimum inverse temperature. Then the following formula for minimal unit of the inverse temperature $\tilde{\tau}$:

$$\frac{1}{T} = N_{VT} \tilde{\tau}, \quad N_{VT} > 0 \text{ is an integer number,}$$

is the analog of the primary measurability notion into thermodynamics. Similarly, generalized measurability in thermodynamics is introduced as in definition 2.

Now let us show the applicability this results to a quantum theory of black holes. Consider the case of Schwarzschild's black hole.

It should be noted that such spaces and even considerably more general cases have been thoroughly studied from the viewpoint of gravitational thermodynamics in works of professor T. Padmanabhan (for example in [13]).

The case of a static spherically-symmetric horizon in space-time is considered, the horizon being described by the metric

$$ds^2 = -f(r)c^2 dt^2 + f^{-1}(r) dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

The horizon location will be given by a simple zero of the function $f(r)$, at the radius $r = a$.

Then at the horizon $r = a$ Einstein's field equations

$$\frac{c^4}{G} \left[\frac{1}{2} f'(a) a - \frac{1}{2} \right] = 4\pi P a^2, \quad (14)$$

where $P = T_r'$ is the trace of the momentum-energy tensor and radial pressure. Therewith, the condition $f(a) = 0$ and $f'(a) \neq 0$ must be fulfilled.

On the other hand it is known that for horizon spaces one can introduce the temperature that can be identified with an analytic continuation to imaginary time. In the case under consideration

$$k_B T = \frac{\hbar c f'(a)}{4\pi}. \quad (15)$$

It is shown that in the initial (continuous) theory the Einstein equation for horizon spaces in the differential form may be written as a thermodynamic identity (the first principle of thermodynamics)

$$\underbrace{\frac{\hbar c f'(a)}{4\pi}}_{k_B T} \underbrace{\frac{c^3}{G \hbar} d \left(\frac{1}{4} 4\pi a^2 \right)}_{dS} - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{c^4 da}{G}}_{-dE} = \underbrace{Pd \left(\frac{4\pi}{3} a^3 \right)}_{PdV}, \quad (16)$$

where, as noted above, T – temperature of the horizon surface; S – corresponding entropy; E – internal energy; V – space volume.

It is impossible to use (16) in the formalism under consideration because, as follows from the given results da , dS , dE , dV are not measurable quantities.

First, we assume that at low energies $E \ll E_p$, a value of the radius r at the point a is a primarily measurable quantity in the sense of definition 1 i. e. $a = a_{\text{meas}} = N_a \ell$, where $N_a \gg 1$ – integer, and the temperature T from the left-hand side of (15) is the primarily measurable measurability temperature.

Then, in terms of measurable quantities, first we can rewrite (14) as

$$\frac{c^4}{G} \left[\frac{2\pi k_B T}{\hbar c} a_{\text{meas}} - \frac{1}{2} \right] = 4\pi P a_{\text{meas}}^2. \quad (17)$$

We express $a = a_{\text{meas}} = N_a \ell$ in terms of the deformation parameter $\alpha_a = \frac{1}{N_a^2}$ and the temperature T is expressed in terms of $T_{\text{max}} \propto T_p = \frac{E_p}{k_B}$. Then equation (17) may be given as [6]

$$\frac{c^4}{G} \left[\frac{2\pi E_p}{N_{1/T} \hbar c} l_p \alpha_a^{1/2} - \frac{1}{2} \alpha_a \right] = \frac{c^4}{G} \left[\frac{2\pi}{N_{1/T}} \alpha_a^{1/2} - \frac{1}{2} \alpha_a \right] = 4\pi P \ell^2. \quad (18)$$

However (18) are Einstein's equations in low energies at low energies $E \ll E_p$. In this equation, the following substitution occurs upon transition to high energies $E \approx E_p$:

$$N_a \rightarrow \frac{1}{2} \left(N_a + \sqrt{N_a^2 - 1} \right), \quad N_{1/T} \rightarrow \left(N_{1/T} + \sqrt{N_{1/T}^2 - 1} \right), \quad (19)$$

where $N_a \approx 1$, $N_{1/T} \approx 1$ are integer numbers.

Then the equation (18) and the corresponding high-energy equation obtained from it by replacement (19) will be a special case of the general formulae (10), (13). Besides, in terms of measurable quantities and formulae some important implications for gravitational thermodynamics of black holes [14] at all the energy scales have been suggested [6; 7].

It should be noted that currently a lot of works on the theory with a minimum length are published (for example [10; 11; 15] and so on). The proposed approach differs from all the others in that we use space-time and momentum variations depending on the available energies instead of abstract quantities dx_μ , dp_i , dE .

Библиографические ссылки

1. Peskin ME, Schroeder DV. *An Introduction to quantum field theory*. Massachusetts: Addison-Wesley; 1995.
2. Wald RM. *General relativity*. Chicago: University of Chicago Press; 1984.
3. Shalyt-Margolin AE. Minimal length and the existence of some infinitesimal quantities in quantum theory and gravity. *Advances in High Energy Physics*. 2014;2014. Article ID: 195157. DOI: 10.1155/2014/195157.

4. Shalyt-Margolin A. Minimal length, measurability and gravity. *Entropy*. 2016;18(3):80. DOI: 10.3390/e18030080.
5. Shalyt-Margolin A. Measurable quantities in quantum theory and thermodynamics and some their applications. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 2017;20(3):272–285.
6. Shalyt-Margolin A. Minimal length, minimal inverse temperature, measurability and black hole. *Electronic Journal of Theoretical Physics*. 2018;14(37):35–54.
7. Shalyt-Margolin A. Minimal quantities and measurable variant of gravity in the general form. *Advanced Studies in Theoretical Physics*. 2018;12(2):57–78. DOI: 10.12988/astp.2018.71265.
8. Shalyt-Margolin A. Minimal quantities and measurability. Gravity in measurable format and natural transition to high energies. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 2018;21(2):138–163.
9. Adler RJ, Santiago DI. On gravity and the uncertainty principle. *Modern Physics Letters A*. 1999;14(20):1371–1378. DOI: 10.1142/S0217732399001462.
10. Maggiore M. Generalized Uncertainty Principle in Quantum Gravity. *Physical Review D*. 1993;48:65–69. DOI: 10.1016/0370-2693(93)91401-8.
11. Kempf A, Mangano G, Mann RB. Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation. *Physical Review D*. 1995;52(2):1108–1118. DOI: 10.1103/PhysRevD.52.1108.
12. Фаддеев Л. Математический взгляд на эволюцию физики. *Природа*. 1989;5:11–16.
13. Padmanabhan T. Thermodynamical aspects of gravity: new insights. *Reports on Progress in Physics*. 2010;73:046901. DOI: 10.1088/0034-4885/73/4/046901.
14. Frolov VP, Novikov ID. *Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments*. Netherlands: Springer; 1998.
15. Matteo AC Rossi, Tommaso Giani, Matteo GA Paris. Probing deformed quantum commutators. *Physical Review D*. 2016;94:024014. DOI: 10.1103/PhysRevD.94.024014.

References

1. Peskin ME, Schroeder DV. *An Introduction to quantum field theory*. Massachusetts: Addison-Wesley; 1995.
2. Wald RM. *General relativity*. Chicago: University of Chicago Press; 1984.
3. Shalyt-Margolin AE. Minimal length and the existence of some infinitesimal quantities in quantum theory and gravity. *Advances in High Energy Physics*. 2014;2014. Article ID: 195157. DOI: 10.1155/2014/195157.
4. Shalyt-Margolin A. Minimal length, measurability and gravity. *Entropy*. 2016;18(3):80. DOI: 10.3390/e18030080.
5. Shalyt-Margolin A. Measurable quantities in quantum theory and thermodynamics and some their applications. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 2017;20(3):272–285.
6. Shalyt-Margolin A. Minimal length, minimal inverse temperature, measurability and black hole. *Electronic Journal of Theoretical Physics*. 2018;14(37):35–54.
7. Shalyt-Margolin A. Minimal quantities and measurable variant of gravity in the general form. *Advanced Studies in Theoretical Physics*. 2018;12(2):57–78. DOI: 10.12988/astp.2018.71265.
8. Shalyt-Margolin A. Minimal quantities and measurability. Gravity in measurable format and natural transition to high energies. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 2018;21(2):138–163.
9. Adler RJ, Santiago DI. On gravity and the uncertainty principle. *Modern Physics Letters A*. 1999;14(20):1371–1378. DOI: 10.1142/S0217732399001462.
10. Maggiore M. Generalized Uncertainty Principle in Quantum Gravity. *Physical Review D*. 1993;48:65–69. DOI: 10.1016/0370-2693(93)91401-8.
11. Kempf A, Mangano G, Mann RB. Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation. *Physical Review D*. 1995;52(2):1108–1118. DOI: 10.1103/PhysRevD.52.1108.
12. Faddeev L. [Mathematical view of the evolution of physics]. *Природа*. 1989;5:11–16. Russian.
13. Padmanabhan T. Thermodynamical aspects of gravity: new insights. *Reports on Progress in Physics*. 2010;73:046901. DOI: 10.1088/0034-4885/73/4/046901.
14. Frolov VP, Novikov ID. *Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments*. Netherlands: Springer; 1998.
15. Matteo AC Rossi, Tommaso Giani, Matteo GA Paris. Probing deformed quantum commutators. *Physical Review D*. 2016;94:024014. DOI: 10.1103/PhysRevD.94.024014.

Received by editorial board 20.11.2018.

РЕДКИЕ РАСПАДЫ СТРАННЫХ МЕЗОНОВ

Е. З. АВАКЯН¹⁾, С. Л. АВАКЯН¹⁾

¹⁾Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого,
пр. Октября, 48, 246746, г. Гомель, Беларусь

Путем фитирования по константам основных распадов странного сектора мезонов ($f_K, g_{\phi\gamma}, g_{K^*K\gamma}, g_{K^*K\pi}, g_{\phi K\bar{K}}$) определено значение параметра Λ_S , характеризующего размер области конфинмента странного кварка модели конфинмированных кварков. В рамках указанной модели изучен распад K_{1s} , параметры наклона $\lambda'_+, \lambda'_-, \lambda'_0$ форм-факторов которого вычислены с использованием полученного значения $\Lambda_S = 505$ МэВ. Показано, что последовательный учет промежуточных состояний приводит к значительному улучшению найденных численных значений параметров наклона рассматриваемого распада. С 10 % точностью удалось воспроизвести киральное соотношение Каллана – Треймана – Матура – Окубо – Пандита. В работе предсказаны брэнчинги распадов $K^+ \rightarrow \pi^+ e^+ e^-$ и $K^+ \rightarrow \pi^+ \mu^+ \mu^-$. Оказалось, что для адекватного описания данных распадов также необходим учет промежуточных состояний. В случае распадов $K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-$ следует принимать во внимание вклады промежуточных мезонов ($a_1(1260), K_1(1270), \rho(770)$). Изучено влияние бозона Хиггса на амплитуды распадов $K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-$. Вклад диаграмм с промежуточным бозоном Хиггса оказался пренебрежимо мал ввиду большой массы $m_H \cong 125$ ГэВ и маленькой константы взаимодействия Хиггса с фермионами $g_{Hff} = \frac{m_f}{v}$, где $v = (\sqrt{2}G_F)^{-1/2} \approx 246$ ГэВ.

Ключевые слова: низкоэнергетические взаимодействия; кварковые модели; каоны; электрослабые взаимодействия.

RARE DECAYS OF STRANGE MESONS

E. Z. AVAKYAN^a, S. L. AVAKYAN^a

^aSukhoi State Technical University of Gomel,
48 Kastychnika Avenue, Gomel 246746, Belarus

Corresponding author: S. L. Avakyan (avakyan@tut.by)

The value of the parameter Λ_S characterizing the size of the confinement region of the strange quark in the Quark Confinement Model (QCM) was obtained by fitting the constants of the fundamental decays of the strange mesons sector ($f_K, g_{\phi\gamma}, g_{K^*K\gamma}, g_{K^*K\pi}, g_{\phi K\bar{K}}$). The decay K_{1s} was studied in the framework of QCM. The slope parameters $\lambda'_+, \lambda'_-, \lambda'_0$ of the form factors of this decay were calculated using the obtained value $\Lambda_S = 505$ MeV. It is shown that a consistent account of the intermediate states leads to a significant improvement in the obtained numerical values of the slope parameters of the decay under consideration. It should be noted that we managed to reproduce the Callan – Treiman – Maturo – Okubo – Pandit chiral ratio with 10 % accuracy. The branching ratios for $K^+ \rightarrow \pi^+ e^+ e^-$ and $K^+ \rightarrow \pi^+ \mu^+ \mu^-$ decays have been predicted

Образец цитирования:

Авакян ЕЗ, Авакян СЛ. Редкие распады странных мезонов. Журнал Белорусского государственного университета. Физика. 2019;1:51–62.

For citation:

Avakyan EZ, Avakyan SL. Rare decays of strange mesons. Journal of the Belarusian State University. Physics. 2019;1:51–62. Russian.

Авторы:

Елена Зиновьевна Авакян – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры высшей математики факультета автоматизированных и информационных систем.
Сергей Леонович Авакян – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры высшей математики факультета автоматизированных и информационных систем.

Authors:

Elena Z. Avakyan, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of higher mathematics, faculty of automated and information systems.
mikot@tut.by
Sergey L. Avakyan, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of higher mathematics, faculty of automated and information systems.
avakyan@tut.by

in this work. The account of intermediate states turns out to be required for adequate description of hadron interactions. In the case of $K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-$ decays, the contributions of intermediate mesons ($a_1(1260)$, $K_1(1270)$, $\rho(770)$) should be taken into account. It is shown that a consistent account of intermediate hadron states is extremely important for the description of these processes. We also studied the influence of the Higgs boson on the amplitudes of the $K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-$ decays. The contribution of the diagrams with the intermediate Higgs boson turns out to be negligible because of the large mass $m_H \cong 125$ GeV and the small interaction constant $g_{Hff} = \frac{m_f}{v}$, where $v = (\sqrt{2}G_F)^{-1/2} \approx 246$ GeV.

Key words: low energy interactions; quark models; kaons; electroweak interaction.

Введение

Задача исследования низкоэнергетических распадов каонов остается актуальной на протяжении многих десятилетий. Это связано с тем, что в указанных распадах тесно сплетены сильные, слабые и электромагнитные взаимодействия кварков. Изучение распадов K -мезонов позволяет получить информацию о возможных проявлениях новой физики за рамками стандартной модели (СМ). Их можно назвать окном в мир новой физики. С этой точки зрения представляется крайне важным получение достоверных количественных оценок параметров данных распадов в рамках СМ. Каонные распады рассматриваются в целом ряде обзоров, например в [1; 2], изучаются экспериментально (группы BNL KEK – JAEA IHEP, Protvino INFN, Frascati) [3].

В данной работе исследуются распады $K \rightarrow \pi/l\nu_l$ (так называемые K_s -распады) и распады $K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-$. Для первых определены параметры наклона λ'_+ , λ'_- , λ'_0 , а также воспроизведено соотношение Каллана – Треймана – Матура – Окубо – Пандита (КТМОП) [4; 5]. Получены брэнчинги распадов $K^+ \rightarrow \pi^+ e^+ e^-$ и $K^+ \rightarrow \pi^+ \mu^+ \mu^-$. Следует отметить, что найденные значения больше экспериментальных примерно в 1,5 раза, что согласуется с результатами, полученными в других подходах. Однако, как показано в работе, последовательный учет промежуточных адронных состояний позволяет значительно приблизить значения брэнчингов к экспериментальным, что в очередной раз говорит о несомненно важной роли промежуточных мезонов в низкоэнергетической адронной физике.

Также вычислен вклад бозона Хиггса в рассматриваемые распады. Все исследование проводилось в рамках модели конфайнмированных кварков (МКК) [6].

Кварковая модель

МКК базируется на следующих предположениях.

1. Адронные поля возникают в результате интегрирования по глюонным и кварковым переменным в производящем функционале КХД. В результате получается лагранжиан взаимодействия адронов с кварками

$$\mathcal{L}_M = \frac{g_M}{\sqrt{2}} M_i^\mu \bar{q}_m^a \Gamma_\mu \lambda^{mm} q_n^a, \quad (1)$$

где M_i^μ – евклидовы поля, связанные с полями физических частиц; $q^a = (u^a, d^a, s^a)$ – кварковые поля; a – цветовой индекс; Γ_μ – матрицы Дирака; λ_i – матрицы Гелл-Манна; константы взаимодействия g_M мезонов с кварками определяются из так называемого условия связности

$$Z_M = 1 + \frac{3g_M^2}{4\pi^2} \tilde{\Pi}'_M(m_M),$$

где $\tilde{\Pi}'_M(m_M)$ – производная массового оператора соответствующего мезона. Для дальнейших расчетов удобно вместо g_M использовать величину

$$h_M = \frac{3g_M^2}{4\pi^2} = -\frac{1}{\tilde{\Pi}'_M(m_M)}.$$

Все взаимодействия адронов с кварками описываются кварковыми диаграммами, полученными из матрицы S , усредненной по глюонному вакууму:

$$S = \int d\sigma_{VAC} T \exp \left\{ i \int dx \mathcal{L}_{int} \right\}.$$

Пропагатор кварка имеет вид

$$S(x_1, x_2 | B_{VAC}) = \langle 0 | T(q(x_1) \bar{q}(x_2)) | 0 \rangle = i(p + B_{VAC})^{-1} \delta(x_1 - x_2).$$

2. Конфайнмент кварков обеспечивается наличием нетривиального глюонного вакуума. Предполагается, что усреднение по вакуумным глюонным полям B_{VAC} кварковых диаграмм, генерируемых S -матрицей, должно обеспечивать конфайнмент кварков и делать теорию конечной.

Анзац конфайнмента в МКК в случае однопетлевых кварковых диаграмм состоит в замене

$$S = \int d\sigma_{VAC} \text{Tr} \left| M(x_1) S(x_1, x_2 | B_{VAC}) \dots M(x_n) S(x_n, x_1 | B_{VAC}) \right| \rightarrow \\ \rightarrow \int d\sigma_v \text{Tr} \left| M(x_1) S_v(x_1 - x_2) \dots M(x_n) S_v(x_n - x_1) \right|.$$

Здесь

$$S_v(x_1 - x_2) = \int \frac{d^4 p}{i(2\pi)^4} e^{-ip(x_1 - x_2)} \frac{1}{v\Lambda_q - \hat{p}}.$$

Параметр Λ_q характеризует размер области конфайнмента кварка с ароматом $q = u, d, s$. Мера интегрирования $d\sigma_v$ определена так, что

$$\int \frac{d\sigma_v}{v - \hat{z}} = G(z) = a(-z^2) + \hat{z}b(-z^2).$$

Функция $G(z)$ называется функцией конфайнмента. Она не зависит ни от цвета, ни от аромата кварков. $G(z)$ представляет собой целую функцию, убывающую в евклидовой области быстрее любой степени z при $z^2 \rightarrow \infty$. Выбор функции $G(z)$, или, что то же самое, $a(-z^2)$ и $b(-z^2)$, является одним из модельных предположений. Будем использовать $a(-z^2)$ и $b(-z^2)$ в виде

$$a(u) = a_0 e^{-u^2 - a_1 u},$$

$$b(u) = b_0 e^{-u^2 - b_1 u}.$$

Требование выполнения в МКК аномальных тождеств Уорда дает дополнительные соотношения между $a(0)$ и $b(0)$: $a(0) = 2$, $b(0) = -a'(0)$. Используя $a(u)$ и $b(u)$ в приведенной выше форме, можно получить $a_0 = 2$, $a_1 = \frac{b_0}{4}$. Таким образом, свободными параметрами модели являются Λ_q, b_0, b_1 . Параметры модели для нестранного сектора были зафиксированы фитированием по хорошо известным константам низкоэнергетической физики $f_\pi, g_{\rho\gamma}, g_{\pi\gamma\gamma}, g_{\omega\pi\gamma}, g_{\rho\pi\pi}$. Оказалось, что наилучшее описание всей совокупности констант достигается при $b_0 = 2$, $b_1 = 0,2$, $\Lambda_n = 430$ МэВ.

Параметры странного кварка

Для описания странных мезонов необходимо зафиксировать дополнительный параметр Λ_s , описывающий область конфайнмента странного кварка. Для фитирования используем константы основных распадов странных мезонов, происходящих при слабых, электромагнитных и сильных взаимодействиях (табл. 1).

Таблица 1

Константы основных распадов странных мезонов,
использованные для фитирования параметра странного кварка

Table 1

The constants of the main decays
of strange mesons used to fit the strange quark parameter

Распад, переход	Аналитическое выражение	Экспериментальное значение [7]	Значение в МКК
$K^+ \rightarrow \mu^+ \nu$	$f_k = \frac{\Lambda}{\pi} \frac{\sqrt{3}F_p(\mu_K^2, \Lambda, \Delta)}{\sqrt{2F_{pp}(\mu_K^2, \Lambda, \Delta)}}$	157 МэВ	160 МэВ
$\phi \rightarrow \gamma$	$g_{\phi\gamma} = \frac{F_V(\mu_\phi^2)}{\pi\sqrt{8F_{VV}(\mu_\phi^2, \Lambda_s, 0)}}$	0,0758	0,0901

Распад, переход	Аналитическое выражение	Экспериментальное значение [7]	Значение в МКК
$K^* \rightarrow K\gamma$	$g_{K^*K\gamma} = \frac{F_{PVV}(\mu_{K^*}^2, \Lambda, \Delta)}{\Lambda\pi\sqrt{3F_{PP}(\mu_K^2, \Lambda, \Delta)F_{VV}(\mu_{K^*}^2, \Lambda, \Delta)}}$	1,29 ГэВ ⁻¹	1,17 ГэВ ⁻¹
$K^* \rightarrow K\pi$	$g_{K^*K\pi} = \frac{2\pi F_{PVV}(\mu_{K^*}^2, \Lambda, \Delta)}{\Lambda\sqrt{F_{PP}(\mu_K^2, \Lambda, \Delta)F_{PP}(\mu_\pi^2, \Lambda_n, 0)F_{VV}(\mu_{K^*}^2, \Lambda, \Delta)}}$	4,65	4,22
$\varphi \rightarrow K\bar{K}$	$g_{\varphi K\bar{K}}(m_\varphi^2) = \frac{2\pi F_{VPP}(\mu_\varphi^2, \Lambda, \Delta)}{F_{PP}(\mu_K^2, \Lambda, \Delta)\sqrt{F_{VV}(\mu_\varphi^2, \Lambda_s, 0)}}$	4,47	4,02

В табл. 1 функции, входящие в аналитические выражения констант, вычисляются по формулам

$$F_{PP}(x, \Lambda, \Delta) = \int_0^\infty b(u) du + \frac{x}{4\Lambda^2} \int_0^{u_\Delta} du b\left(-\frac{ux}{4\Lambda^2}\right) \frac{1 - \frac{u}{2} + u\Delta}{\sqrt{1 - u + \left(\frac{u\Delta}{2}\right)^2}},$$

$$F_{VV}(x, \Lambda, \Delta) = \int_0^\infty b(u) du + \frac{x}{4\Lambda^2} \int_0^{u_\Delta} du b\left(-u\frac{x}{4\Lambda^2}\right) \frac{1 - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{4} + u\Delta}{\sqrt{1 - u + \left(\frac{u\Delta}{2}\right)^2}},$$

$$F_P(x, \Lambda, \Delta) = \frac{\sqrt{1-\Delta} + \sqrt{1+\Delta}}{2} \left[\int_0^\infty a(u) du + \frac{x}{4\Lambda^2} \int_0^1 du a\left(-u\frac{x}{4\Lambda^2}\right) \sqrt{1 - u + \left(\frac{u\Delta}{2}\right)^2} \right] +$$

$$+ \frac{\Delta}{4} [\sqrt{1-\Delta} - \sqrt{1+\Delta}] \frac{x}{4\Lambda^2} \int_0^{u_\Delta} du u a\left(-u\frac{x}{4\Lambda^2}\right) \sqrt{1 - u + \left(\frac{u\Delta}{2}\right)^2},$$

$$F_V(x) = \int_0^\infty b(u) du + \frac{x}{4} \int_0^1 du b\left(-u\frac{x}{4}\right) \left(1 + \frac{u}{2}\right) \sqrt{1-u},$$

$$F_{PVV}(x, \Lambda, \Delta) = \frac{1}{4} \int_0^{u_\Delta} du a\left(-u\frac{x}{4\Lambda^2}\right) \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - u + \left(\frac{u\Delta}{2}\right)^2}}{1 - \sqrt{1 - u + \left(\frac{u\Delta}{2}\right)^2}} \right),$$

$$F_{VPP}^-(x, \Lambda_1, \Lambda_2) = \int_0^\infty b(u) du + \frac{x}{4\Lambda^2} \int_0^{u_\Delta} du b\left(-u\frac{x}{4\Lambda^2}\right) \sqrt{1 - u + \left(\frac{u\Delta}{2}\right)^2} +$$

$$+ \int_0^1 d^3\alpha \delta\left(1 - \sum_{i=1}^3 \alpha_i\right) \frac{\Lambda_1(2\Lambda_2 - \Lambda_1)}{\Lambda_1^2\alpha_1 + \Lambda_2^2(1 - \alpha_1)} \frac{x\alpha_1\alpha_2}{\Lambda_1^2\alpha_1 + \Lambda_2^2(1 - \alpha_1)} b\left(-\frac{x\alpha_1\alpha_2}{\Lambda_1^2\alpha_1 + \Lambda_2^2(1 - \alpha_1)}\right)$$

и введены обозначения

$$\Lambda^2 = \frac{\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2}{2}, \quad \Delta = \frac{\Lambda_2^2 - \Lambda_1^2}{\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2},$$

$$\mu = \frac{m^2}{4\Lambda^2}, \quad u_\Delta = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \Delta^2}}.$$

Оказалось, что наилучшее согласие (в смысле наименьшего суммарного отклонения) достигается при $\Lambda_s = 505$ МэВ.

Параметры K_l -распадов

Матричный элемент распада $K \rightarrow \pi e \nu_e$ определяется диаграммами, приведенными на рис. 1, и может быть записан в виде

$$M^\mu(p_1, p_2) = F_+(t)(p_1 + p_2)^\mu + F_-(t)(p_1 - p_2)^\mu,$$

где p_1, p_2 – импульсы каона и π -мезона; $t = (p_1 - p_2)^2$; $F_+(t) = F_+^a(t) + F_+^b(t)$; $F_-(t) = F_-^a(t) + F_-^b(t)$. Индексы a и b означают вклады диаграмм a и b (см. рис. 1).

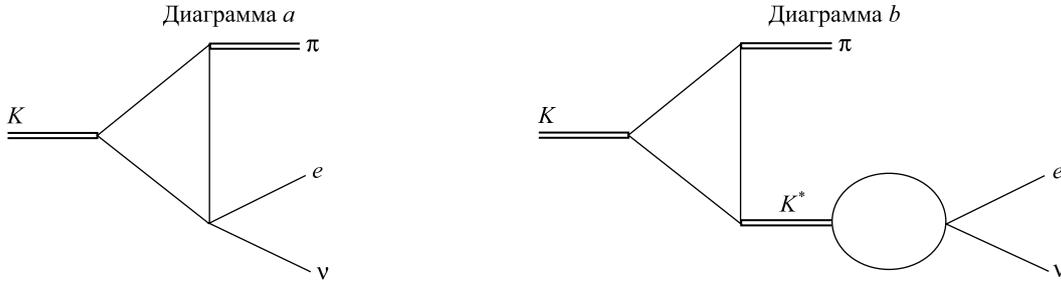


Рис. 1. Диаграммы, описывающие распад $K \rightarrow \pi e \nu$
Fig. 1. Diagrams describing decay $K \rightarrow \pi e \nu$

Указанные вклады в МКК имеют вид

$$F_\pm^a(t) = \sqrt{2h_K h_\pi} F_{VPP}^\mp(t, m_K^2, m_\pi^2, \Lambda_s, \Lambda_u, \Lambda_u),$$

где h_K, h_π, h_{K^*} – константы взаимодействия мезонов с кварками, вычисленные в МКК с помощью условия связности; $F_{VPP}^\pm(t, m_K^2, m_\pi^2, \Lambda_s, \Lambda_u, \Lambda_u)$ – петлевые интегралы, описывающие переход $V \rightarrow PP$: $K \rightarrow \pi e \nu$,

$$F_{VPP}^+(p^2, k_1^2, k_2^2, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) = \frac{s}{4} \Delta \int_0^{u_\Delta} du u b(-us) \sqrt{1 - u + \left(\frac{\Delta u}{2}\right)^2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \delta(1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) b \left(-\frac{P}{\alpha_1 \Lambda_1^2 + \alpha_2 \Lambda_2^2 + \alpha_3 \Lambda_3^2} \right) \times$$

$$\times \frac{P [(\alpha_1 - \alpha_2)(\Lambda_1 - \Lambda_3)(\Lambda_2 - \Lambda_3) + \Lambda_3(\Lambda_1 - \Lambda_2)] + \alpha_1 k_1^2 - \alpha_2 k_2^2}{\alpha_1 \Lambda_1^2 + \alpha_2 \Lambda_2^2 + \alpha_3 \Lambda_3^2},$$

$$F_{VPP}^-(p^2, k_1^2, k_2^2, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) = \frac{1}{2} \int_0^\infty du b(u) + \frac{s}{2} \int_0^{u_\Delta} du b(-us) \sqrt{1 - u + \left(\frac{\Delta u}{2}\right)^2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \delta(1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) b \left(-\frac{P}{\alpha_1 \Lambda_1^2 + \alpha_2 \Lambda_2^2 + \alpha_3 \Lambda_3^2} \right) \times$$

$$\times \frac{P [(\alpha_1 + \alpha_2)(\Lambda_1 - \Lambda_3)(\Lambda_2 - \Lambda_3) + \Lambda_3(\Lambda_1 + \Lambda_2 - \Lambda_3)] + \alpha_1 k_1^2 + \alpha_2 k_2^2}{\alpha_1 \Lambda_1^2 + \alpha_2 \Lambda_2^2 + \alpha_3 \Lambda_3^2}.$$

Здесь $s = \frac{p^2}{4\Lambda^2}$, $P = \frac{\alpha_1\alpha_2 p^2 + \alpha_1\alpha_3 k_1^2 + \alpha_2\alpha_3 k_2^2}{\alpha_1\Lambda_1^2 + \alpha_2\Lambda_2^2 + \alpha_3\Lambda_3^2}$.

Учет вклада промежуточных адронных состояний проведен в так называемом цепочном приближении, в котором пропагатор промежуточного векторного мезона определяется следующим образом:

$$h_V G_V^{\mu\nu}(p) = \frac{1}{\Pi_1(p^2) - \Pi_1(m_V^2)} \left\{ -g^{\mu\nu} + p^\mu p^\nu \frac{\Pi_2(p^2)}{\Pi_1(p^2) - \Pi_1(m_V^2) + p^2 \Pi_2(p^2)} \right\}.$$

После стандартных преобразований имеем выражения для вкладов промежуточного векторного мезона в формфакторы $F_\pm^b(t)$:

$$F_+^b(t) = -F_+^a(t) \frac{t}{\Pi_1(t) - \Pi_1(m_{K^*}^2)} F_{VV}(t),$$

$$F_-^b(t) = F_-^a(t) \frac{m_k^2 - m_\pi^2}{\Pi_1(t) - \Pi_1(m_{K^*}^2)} F_{VV}(t),$$

где $F_{VV}(t)$ – петлевой интеграл, описывающий поперечную часть перехода $V \rightarrow V$.

В рамках алгебры токов Калланом, Трейманом [4], Матуром, Окубо и Пандитом [5] было установлено простое соотношение между $F_+(m_K^2)$ и $F_-(m_K^2)$:

$$F_+(m_K^2) + F_-(m_K^2) = \frac{f_K}{f_\pi}.$$

Вычисляя значения $F_\pm(t)$ при $t = m_K^2 (m_\pi^2 = 0)$, получим

$$F_+(m_K^2) + F_-(m_K^2) = 0,9 \frac{f_K}{f_\pi}.$$

Таким образом, в рамках МКК с 10 % точностью удалось воспроизвести киральное соотношение КТМОП. Следует заметить, что в данном случае вклады промежуточных состояний сокращаются.

Векторный формфактор $F_+(t)$ представляет собой p -волновую проекцию матричного элемента $\langle 0 | \bar{s} \gamma^\mu u | K \pi \rangle$, а s -волновую проекцию определяет скалярный формфактор, являющийся комбинацией $F_\pm(t)$:

$$F_0(t) = F_+(t) + \frac{t}{m_k^2 - m_\pi^2} F_-(t).$$

Удобно рассматривать формфакторы, нормированные к значению в нуле:

$$f_{+,0}(t) = \frac{F_{+,0}(t)}{F_{+,0}(0)}.$$

Обычно для анализа экспериментальных данных используют следующую параметризацию:

$$f_{+,0}(t) = 1 + \lambda'_{+,0} \frac{t}{m_\pi^2} + \frac{1}{2} \lambda''_{+,0} \left(\frac{t}{m_\pi^2} \right)^2 + \dots$$

Параметр наклона $\lambda'_{+,0} = m_\pi^2 f'_{+,0}(0)$.

Полученные значения параметров λ'_+ , λ'_- , λ'_0 , а также усредненные экспериментальные значения приведены в табл. 2.

Таблица 2
 Значения параметров наклона K_s
 Table 2
 The values of the slope parameters K_s

Параметр	МКК	Эксперимент
λ'_-	3	0 [7]
λ'_0	16,5	$11,7 \pm 1,4$ [7]
λ'_+	31	$29,86 \pm 0,2$ [8]

Распад $K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-$

Лагранжиан взаимодействия, определяющий распад $K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-$ в МКК, есть

$$\mathcal{L}_I = \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_{\text{em}} + \mathcal{L}_w^{\text{eff}},$$

где \mathcal{L}_M определен формулой (1); \mathcal{L}_{em} – лагранжиан электромагнитного взаимодействия лептонов и кварков, имеющий стандартный вид:

$$\mathcal{L}_{\text{em}} = eA_\mu (\bar{q}_i^a Q_{ij} \gamma^\mu q_j^a + \bar{l} \gamma^\mu l),$$

A_μ – электромагнитное поле, $Q = \text{diag}\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ – зарядовая матрица.

Для описания слабых взаимодействий кварков воспользуемся эффективным лагранжианом $\mathcal{L}_w^{\text{eff}}$ для переходов с $\Delta S = 1$, к которым и относится рассматриваемый распад. Лагранжиан представляет собой разложение по четырехкварковым операторам [9; 10]:

$$\mathcal{L}_w^{\text{eff}} = \frac{G_F}{2\sqrt{2}} V_{ud} V_{us} \sum_{i=1}^6 c_i O_i,$$

где G_F – константа Ферми; V_{ud} , V_{us} – элементы матрицы Кабиббо – Кобаяши – Маскавы; O_i – локальные четырехкварковые операторы:

$$O_1 = (\bar{d} O_L^\mu s)(\bar{u} O_L^\mu u) - (\bar{d} O_L^\mu u)(\bar{u} O_L^\mu s), \quad \Delta I = \frac{1}{2},$$

$$O_2 = (\bar{d} O_L^\mu u)(\bar{u} O_L^\mu s) + (\bar{d} O_L^\mu s)(\bar{u} O_L^\mu u) + 2(\bar{d} O_L^\mu s)(\bar{d} O_L^\mu d) + 2(\bar{d} O_L^\mu s)(\bar{s} O_L^\mu s), \quad \Delta I = \frac{1}{2},$$

$$O_3 = (\bar{d} O_L^\mu u)(\bar{u} O_L^\mu s) + (\bar{d} O_L^\mu s)(\bar{u} O_L^\mu u) - (\bar{d} O_L^\mu s)(\bar{s} O_L^\mu s), \quad \Delta I = \frac{1}{2},$$

$$O_4 = (\bar{d} O_L^\mu u)(\bar{u} O_L^\mu s) + (\bar{d} O_L^\mu s)(\bar{u} O_L^\mu u) - (\bar{d} O_L^\mu s)(\bar{d} O_L^\mu d), \quad \Delta I = \frac{3}{2},$$

$$O_5 = (\bar{d} O_L^\mu \chi^a s) \sum_{q=u, d, s} (\bar{q} O_R^\mu \chi^a q), \quad \Delta I = \frac{1}{2},$$

$$O_6 = (\bar{d} O_L^\mu s) \sum_{q=u, d, s} (\bar{q} O_R^\mu q), \quad \Delta I = \frac{1}{2}.$$

Здесь $O_L^\mu = \gamma^\mu (1 - \gamma^5)$, $O_R^\mu = \gamma^\mu (1 + \gamma^5)$. Коэффициентные функции c_i могут быть представлены в виде решений ренормгрупповых уравнений:

$$\begin{aligned} c_1 &= -\chi_1^{4/b} (0,98\chi_2^{0,42} + 0,01\chi_2^{0,80}) + 0,04\chi_1^{-2/b} (\chi_2^{0,42} - \chi_2^{-0,30}), \\ c_2 &= 0,2\chi_1^{-2/b} (0,96\chi_2^{-0,30} + 0,03\chi_2^{-0,12}) - 0,02\chi_1^{4/b} (\chi_2^{0,42} - \chi_2^{-0,30}), \\ c_3 &= 10^{-2} \chi_1^{4/b} (3,3\chi_2^{0,42} + 0,3\chi_2^{-0,3} - 3,9\chi_2^{0,80} + 0,3\chi_2^{-0,12}) + \\ &+ 0,01\chi_1^{-2/b} (-0,1\chi_2^{0,42} - 2,9\chi_2^{-0,30} - 1,4\chi_2^{0,80} - 1,4\chi_2^{-0,12}), \\ c_4 &= 10^{-2} \chi_1^{4/b} (4,8\chi_2^{0,42} - 0,6\chi_2^{-0,3} - 2,9\chi_2^{0,80} - 1,3\chi_2^{-0,12}) + \\ &+ 0,01\chi_1^{-2/b} (-0,2\chi_2^{0,42} - 5,8\chi_2^{-0,30} - 1,0\chi_2^{0,80} + 7,0\chi_2^{-0,12}), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \chi_2^{-2/9} \chi_1^{-2/b} \begin{pmatrix} 2 \\ 15 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

где

$$\chi_1 = 1 + b \frac{\bar{g}^2(m_c)}{16\pi^2} \ln \frac{m_w^2}{m_c^2}; \quad \chi_2 = 1 + 9 \frac{\bar{g}^2(m)}{16\pi^2} \ln \frac{m_c^2}{m^2}; \quad b = 11 - \frac{2}{3} N.$$

Из (2) видно, что коэффициенты c_i зависят от точки нормировки μ , бегущей константы α_s и масс тяжелых кварков, поэтому c_i не определены однозначно. Нами проведены вычисления матричных элементов рассматриваемых распадов при различных значениях μ и α_s . Для получения амплитуд распадов $K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-$ параметр μ варьировался в пределах от 0,9 до 1,9 ГэВ, α_s – от 0,05 до 1,0.

Матричный элемент, соответствующий распаду $K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-$ (рис. 2), имеет вид

$$\mathcal{M}(K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-) = \frac{G_F}{2\sqrt{2}} V_{ud} V_{us} e F_+(q^2, m_K^2, m_\pi^2) p^\mu \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} (-ie) \bar{l}(k) \gamma^\nu l(k'),$$

где

$$F_+(q^2, m_K^2, m_\pi^2) = \sqrt{h_K h_\pi} \frac{3\Lambda^2}{8\sqrt{2}\pi} \Phi\left(\frac{q^2}{\Lambda^2}, \frac{m_K^2}{\Lambda^2}, \frac{m_\pi^2}{\Lambda^2}\right). \quad (3)$$

Ширина распада

$$\Gamma(K^+ \rightarrow \pi^+ e^+ e^-) = \frac{G_F^2 \alpha^2}{128\pi^3 m_K^3} V_{ud}^2 V_{us}^2 \frac{9h_K h_\pi}{8\pi} \times \int_{\frac{(m_K - m_\pi)^2}{4m_e^2}}^{(m_K + m_\pi)^2} dq^2 q^2 \left(1 + \frac{2m_e^2}{q^2}\right) \lambda^{3/2}\left(1, \frac{m_K^2}{q^2}, \frac{m_\pi^2}{q^2}\right) \lambda^{1/2}\left(1, \frac{m_e^2}{q^2}, \frac{m_e^2}{q^2}\right) \left| \Lambda^2 \Phi\left(\frac{q^2}{\Lambda^2}, \frac{m_K^2}{\Lambda^2}, \frac{m_\pi^2}{\Lambda^2}\right) \right|^2,$$

здесь $\lambda(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab + ac + bc)$.

Для адекватного описания адронных взаимодействий необходим последовательный учет промежуточных состояний. В случае распадов $K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-$ следует принимать во внимание вклады промежуточных мезонов – $a_1(1260)$, $K_1(1270)$, $\rho(770)$ (см. диаграммы на рис. 3).

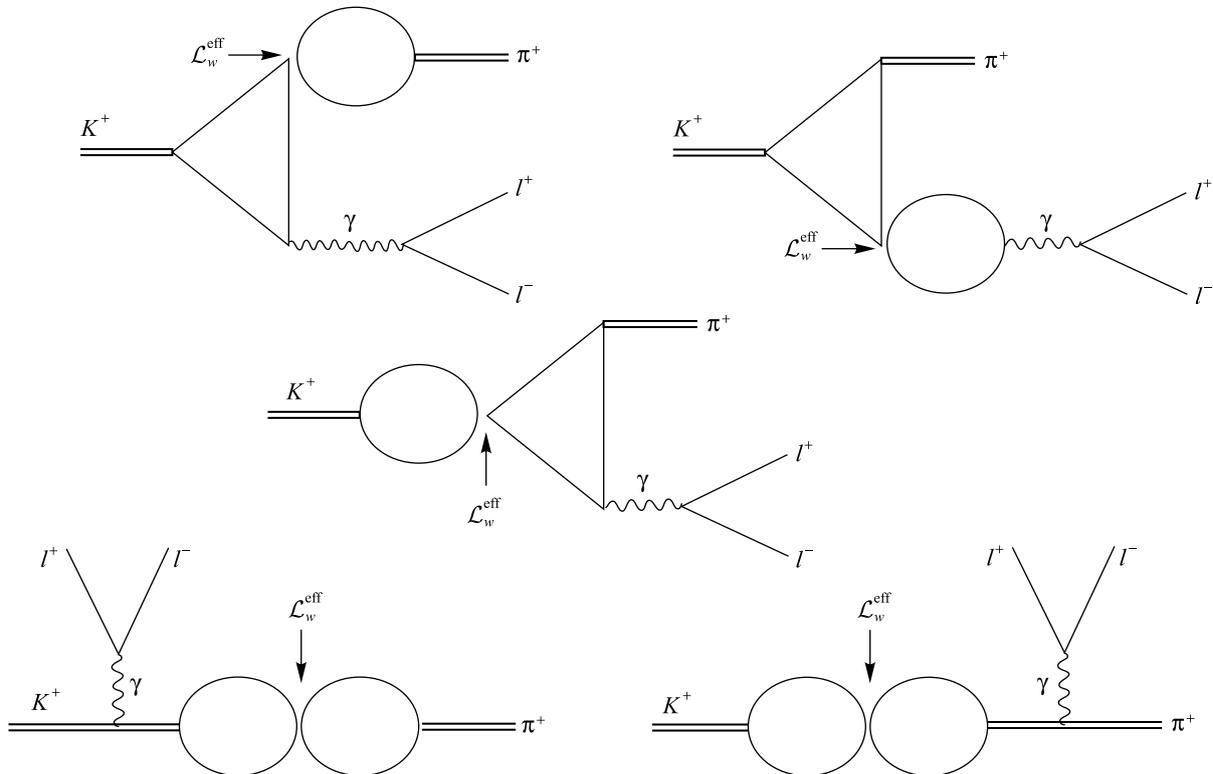


Рис. 2. Диаграммы, описывающие распад $K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-$

Fig. 2. Diagrams describing decay $K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-$

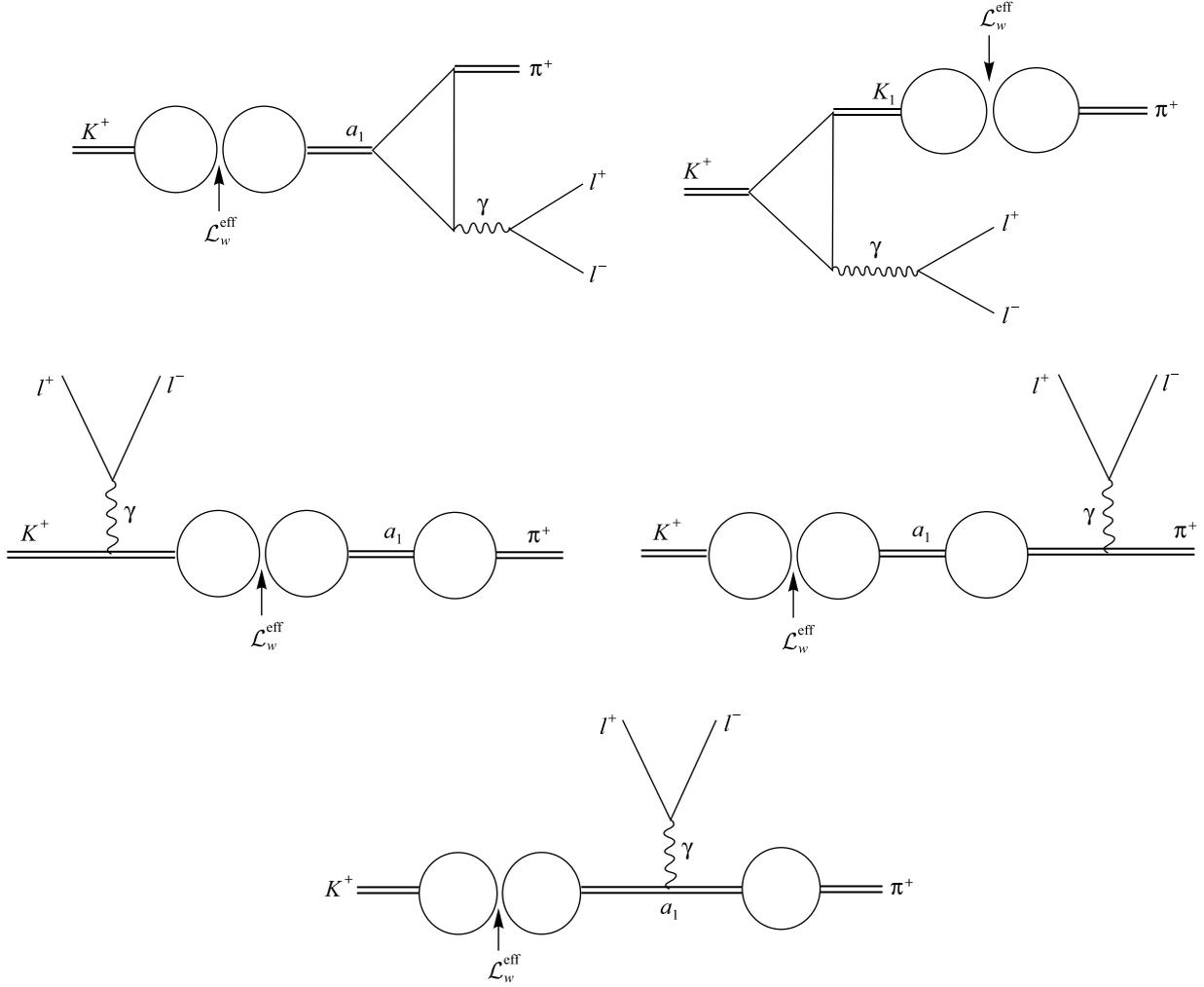


Рис. 3. Диаграммы с промежуточными адронными состояниями, дающими вклад в амплитуды распадов $K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-$

Fig. 3. Diagrams with intermediate hadron states contributing to the $K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-$ decay amplitudes

Последовательный учет диаграмм, изображенных на рис. 3, приводит к изменению формфактора (3).

$$\Phi\left(\frac{q^2}{\Lambda^2}, \frac{m_K^2}{\Lambda^2}, \frac{m_\pi^2}{\Lambda^2}\right) = \Phi_1\left(\frac{q^2}{\Lambda^2}, \frac{m_K^2}{\Lambda^2}, \frac{m_\pi^2}{\Lambda^2}\right) + \Phi_2\left(\frac{q^2}{\Lambda^2}, \frac{m_K^2}{\Lambda^2}, \frac{m_\pi^2}{\Lambda^2}\right),$$

где $\Phi_1\left(\frac{q^2}{\Lambda^2}, \frac{m_K^2}{\Lambda^2}, \frac{m_\pi^2}{\Lambda^2}\right)$ – вклад прямых диаграмм (см. рис. 2):

$$\Phi_1 = \frac{2}{3}(-c_1 - 2c_2 - 2c_3 - 2c_4)G_1 + \frac{4}{9}(-c_1 - 2c_2 + 3c_3 + 3c_4)G_2 - \frac{2}{9}c_5G_3;$$

$\Phi_2\left(\frac{q^2}{\Lambda^2}, \frac{m_K^2}{\Lambda^2}, \frac{m_\pi^2}{\Lambda^2}\right)$ – вклад диаграмм с промежуточными состояниями, причем

$$\Phi_2 = \Phi_A + \Phi_P,$$

Φ_A – вклады аксиальных мезонов, Φ_P – вклад псевдоскалярного мезона,

$$\Phi_A = \frac{2}{3}(c_1 + 2c_2 + 2c_3 + 2c_4)G_{A1} + \frac{4}{9}(-c_1 - 2c_2 + 3c_3 + 3c_4)G_{A2} - \frac{2}{9}c_5G_{A3},$$

$$\Phi_P = \frac{2}{3}(c_1 + 2c_2 + 2c_3 + 2c_4)G_{P1} + \frac{2}{3}c_5G_{P3};$$

$$G_1 = D_{AP}(m_K^2)T_{APV}(m_K^2, m_\pi^2, q^2) + D_{AP}(m_\pi^2)T_{APV}(m_\pi^2, m_K^2, q^2);$$

$$G_2 = q^2 D_{VV}(q^2)T_{PPV}(m_K^2, m_\pi^2, q^2);$$

$$G_3 = (D_{PP}(m_K^2) + D_{PP}(m_\pi^2))T_{PPV}(m_K^2, m_\pi^2, q^2);$$

$$G_{A1} = -2D_{AP}(m_K^2)T_{APV}(m_K^2, m_\pi^2, q^2) \frac{\Pi_1(m_K^2) + m_K^2 \Pi_2(m_K^2)}{\Pi_1(m_K^2) - \Pi_1(m_A^2) + m_K^2 \Pi_2(m_K^2)} -$$

$$- 2D_{AP}(m_\pi^2)T_{APV}(m_\pi^2, m_K^2, q^2) \frac{\Pi_1(m_\pi^2) + m_\pi^2 \Pi_2(m_\pi^2)}{\Pi_1(m_\pi^2) - \Pi_1(m_A^2) + m_\pi^2 \Pi_2(m_\pi^2)};$$

$$G_{A2} = q^2 D_{VV}(q^2) \left(\frac{D_{AP}(m_\pi^2)T_{PPV}(m_\pi^2, m_K^2, q^2)}{\Pi_1(m_\pi^2) - \Pi_1(m_A^2) + m_\pi^2 \Pi_2(m_\pi^2)} - \frac{D_{AP}(m_K^2)T_{PPV}(m_K^2, m_\pi^2, q^2)}{\Pi_1(m_K^2) - \Pi_1(m_A^2) + m_K^2 \Pi_2(m_K^2)} \right);$$

$$G_{A3} = (D_{PP}(m_K^2) + D_{PP}(m_\pi^2)) \left(\frac{D_{AP}(m_K^2)T_{APV}(m_K^2, m_\pi^2, q^2)}{\Pi_1(m_K^2) - \Pi_1(m_A^2) + m_K^2 \Pi_2(m_K^2)} - \frac{D_{AP}(m_\pi^2)T_{APV}(m_\pi^2, m_K^2, q^2)}{\Pi_1(m_\pi^2) - \Pi_1(m_A^2) + m_\pi^2 \Pi_2(m_\pi^2)} \right);$$

$$G_{P1} = (m_K^2 D_{AA}^2(m_K^2) - m_\pi^2 D_{AP}^2(m_\pi^2)) \frac{T_{PPV}(m_K^2, m_\pi^2, q^2)}{2(D_{PP}(m_K^2) - D_{PP}(m_\pi^2))};$$

$$G_{P3} = (D_{PP}^2(m_K^2) - D_{PP}^2(m_\pi^2)) \frac{T_{PPV}(m_K^2, m_\pi^2, q^2)}{2(D_{PP}(m_K^2) - D_{PP}(m_\pi^2))};$$

где

$$D_{AP}(p^2) = -\Lambda \left(A_0 + \mu^2 \int_0^1 du a(-u\mu^2) \sqrt{1-u} \right);$$

$$D_{VV}(p^2) = \frac{1}{3} \left(B_0 + \mu^2 \int_0^1 du b(-u\mu^2) \sqrt{1-u} \left(1 + \frac{u}{2} \right) \right);$$

$$D_{PP}(p^2) = -\Lambda^2 \left(B_1 + 2\mu B_0 + 2\mu^2 \int_0^1 du b(-u\mu^2) \sqrt{1-u} \right);$$

$$D_{AA}(p^2) = -\Lambda^2 \left(2B_1 + \frac{4}{3}\mu B_0 + \frac{4}{3}\mu^2 \int_0^1 du b(-u\mu^2) \sqrt{(1-u)^3} \right).$$

Здесь обозначено

$$A_0 \equiv \int_0^{\infty} du a(u), \quad B_0 \equiv \int_0^{\infty} du b(u), \quad B_1 \equiv \int_0^{\infty} du ub(u),$$

$$\mu^2 \equiv \frac{p^2}{4\Lambda^2}, \quad Q \equiv \frac{p_1^2 \alpha_1 \alpha_3 + p_2^2 \alpha_2 \alpha_3 + q^2 \alpha_1 \alpha_2}{\Lambda^2}.$$

Учет промежуточного $\rho(770)$ -мезона сводится к умножению всех матричных элементов на величину

$$\frac{m_\rho^2 \Pi_2(m_\rho^2)}{m_\rho^2 \Pi_{VV}(m_\rho^2) - q^2 \Pi_2(q^2)}.$$

Найденные брэнчинги распадов $K^+ \rightarrow \pi^+ e^+ e^-$ и $K^+ \rightarrow \pi^+ \mu^+ \mu^-$ с учетом только диаграмм, изображенных на рис. 2, и с учетом диаграмм с промежуточными мезонами приведены в табл. 3.

Таблица 3

Значения брэнчингов $Br(K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-)$, полученных в МКК без учета (Br_1) и с учетом (Br_2) промежуточных адронных состояний, $\times 10^{-7}$

Table 3

The values of the brandings $Br(K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-)$ obtained in the QCM, excluding (Br_1) and taking (Br_2) into account intermediate hadron states, $\times 10^{-7}$

Распад	$Br_{\text{эксперим}}$	Br_1	Br_2
$K^+ \rightarrow \pi^+ e^+ e^-$	$3,11 \pm 0,12$ [11]	$5,58 \pm 0,56$	$3,23 \pm 0,56$
$K^+ \rightarrow \pi^+ \mu^+ \mu^-$	$0,962 \pm 0,025$ [12]	$1,15 \pm 0,12$	$0,73 \pm 0,14$

Из табл. 3 видно, что значение Br_1 , определенное без учета промежуточных адронных состояний, превосходит экспериментальное примерно в 1,5 раза, что согласуется с результатами, полученными в других подходах. Учет промежуточных мезонов приводит к значению Br_2 , которое лучше согласуется с имеющейся экспериментальной картиной.

Особый интерес к распаду $K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-$ обусловлен еще и тем, что вклад в его амплитуду может давать бозон Хиггса.

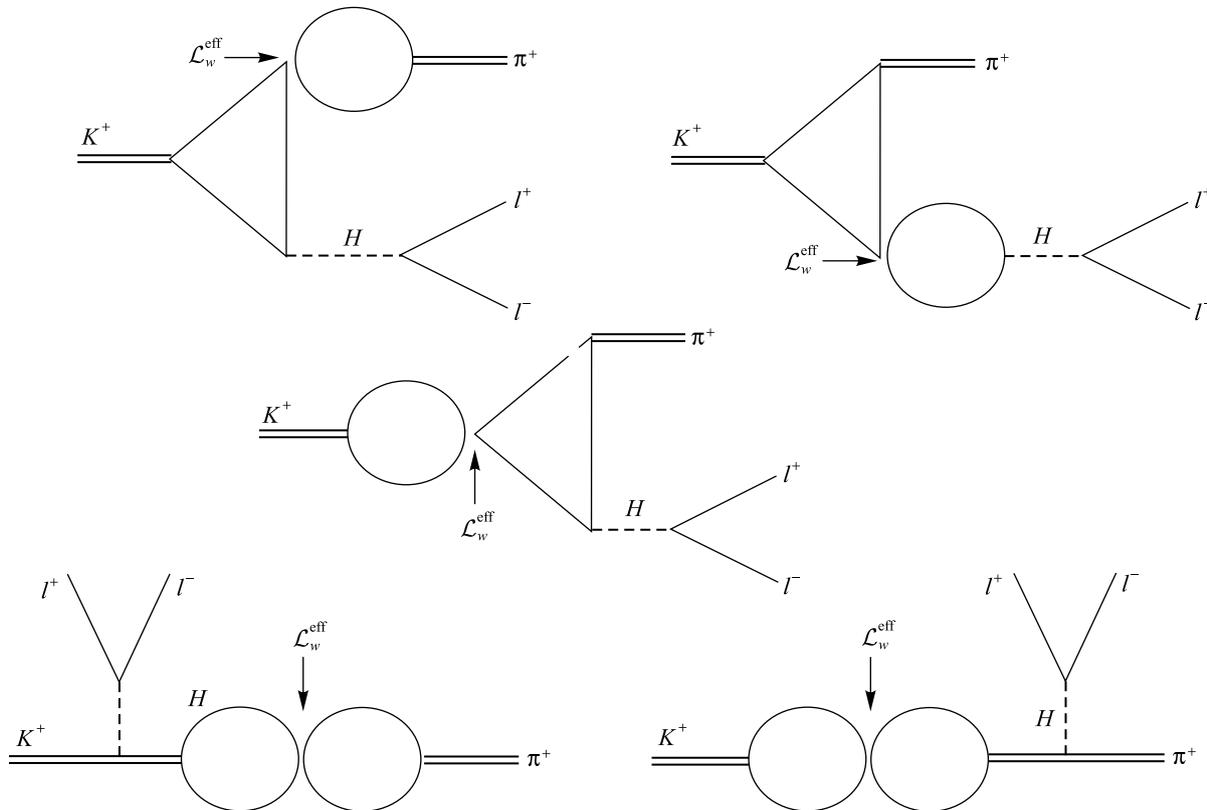


Рис. 4. Диаграммы, описывающие вклад бозона Хиггса в распад $K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-$
Fig. 4. Diagrams describing the Higgs boson contribution to decay $K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-$

С учетом диаграмм, приведенных на рис. 4, вклад бозона Хиггса в ширину распада $K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-$ можно представить в виде

$$\Gamma_H(K^+ \rightarrow \pi^+ e^+ e^-) = \frac{G_F^2 \alpha^2}{128 \pi^3 m_K^3} V_{ud}^2 V_{us}^2 \frac{9 h_K h_\pi}{32 \pi^2} \Lambda^4 \times \\ \times \int_{4m_e^2}^{(m_K - m_\pi)^2} dq^2 q^2 \lambda^{3/2} \left(1, \frac{m_K^2}{q^2}, \frac{m_\pi^2}{q^2} \right) \lambda^{1/2} \left(1, \frac{m_e^2}{q^2}, \frac{m_e^2}{q^2} \right) \frac{g_H^2}{(m_H^2 - q^2)^2} \left| \Lambda^2 \Phi_H \left(\frac{q^2}{\Lambda^2}, \frac{m_K^2}{\Lambda^2}, \frac{m_\pi^2}{\Lambda^2} \right) \right|^2.$$

Ввиду большой массы $m_H \cong 125$ ГэВ и маленькой константы взаимодействия Хиггса с фермионами $g_{Hff} = \frac{m_f}{v}$, где $v = (\sqrt{2} G_F)^{-1/2} \approx 246$ ГэВ, вклад в ширину распада $K^+ \rightarrow \pi^+ l^+ l^-$ пренебрежимо мал.

Заключение

Фитированием по основным константам низкоэнергетических каонных распадов (f_π – константы слабого распада $K \rightarrow \mu\nu$; $g_{\phi\gamma}$ – константы перехода $\phi \rightarrow \gamma$; $g_{K^*K\gamma}$ – константы радиационного распада $K^* \rightarrow K\gamma$; $g_{K^*K\pi}$ и $g_{\phi K\pi}$ – константы сильных распадов $K^* \rightarrow K\pi$ и $\phi \rightarrow K\bar{K}$) получен параметр, характеризующий область конфайнмента странного кварка. Оказалось, что наилучшее согласие (в смысле наименьшего суммарного отклонения) достигается при $\Lambda_S = 505$ МэВ.

Определены параметры λ'_+ , λ'_- , λ'_0 и показано, что учет промежуточного векторного мезона K^* значительно приближает полученные значения к экспериментальным. Также с 10 % точностью удалось воспроизвести киральное соотношение Каллана – Треймана – Матура – Окубо – Пандита.

Вычислены брэнчинги распадов $K^+ \rightarrow \pi^+ e^+ e^-$ и $K^+ \rightarrow \pi^+ \mu^+ \mu^-$. Установлено, что последовательный учет промежуточных векторных, псевдоскалярных и аксиальных мезонов приводит к значительному уменьшению брэнчингов, что хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Библиографические ссылки / References

1. Buchalla G, Komatsubara TK, Muheim F, Silvestrini L, Artuso M, Asneret DM, et al. *B, D and K decays. European Physical Journal C.* 2008;57(1–2):309–492. DOI: 10.1140/epjc/s10052-008-0716-1.
2. Portoles J. Important rare kaon decays. *Nuclear Physics B: Proceedings Supplements.* 2012;225–227:254–259. DOI: 10.1016/j.nuclphysbps.2012.02.053.
3. Komatsubara TK. Experiments with *K*-meson decays. *Progress in Particle and Nuclear Physics.* 2012;67:995–1018. DOI: 10.1016/j.pnpnp.2012.04.001.
4. Callan CG, Treiman SB. Equal time commutators and *K*-meson decays. *Physical Review Letters.* 1966;16:153–157. DOI: 10.1103/PhysRevLett.16.153.
5. Mattur V, Okubo S, Pandit L. Algebra of currents and K_{l_3} decay. *Physical Review Letters.* 1966;16(9):371–374. DOI: 10.1103/PhysRevLett.16.371.
6. Efimov GV, Ivanov MA. *The Quark Confinement Model of Hadrons.* London: IOP Publishing Ltd.; 1993.
7. Beringer J, Arguin J-F, Barnett RM, Copic K, Dahl O, Groom DE, et al. Review of particle physics particle data group. *Physical Review D.* 2012;86(1):010001. DOI: 10.1103/PhysRevD.86.010001.
8. Obraztsov V, «OKA» collaboration. High statistics measurement of the $K^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu$ (Ke3) decay formfactors. *Nuclear and Particle Physics Proceedings.* 2016;273–275:1330–1333. DOI: 10.1016/j.nuclphysbps.2015.09.213.
9. Shifman MA, Vainstein AI, Zakharov VI. Asymptotic freedom, light quarks and the origin of the $\Delta T = \frac{1}{2}$ rule in the non-leptonic decays of strange particles. *Nuclear Physics B.* 1976;120:316–324. DOI: 10.1016/0550-3213(77)90046-3.
10. Gilman FJ, Wise MB. $K \rightarrow \pi e^+ e^-$ in the Six Quark Model. *Physical Review D.* 1980;21:3150.
11. Batley JR, Culling AJ, Kalmus G, Lazzeroni C, Munday DJ, Slater MW, et al. [NA48/2 collaboration]. Precise measurement of the $K^\pm \rightarrow \pi^\pm e^+ e^-$ decay. *Physics Letters B.* 2009;677(5):246–254. DOI: 10.1016/j.physletb.2009.05.040.
12. Batley JR, Kalmus G, Lazzeroni C, Munday DJ, Slater MW, Wotton SA, et al. [NA48/2 collaboration]. New measurement of the $K^\pm \rightarrow \pi^\pm \mu^+ \mu^-$ decay. *Physics Letters B.* 2011;697:107–115. DOI: 10.1016/j.physletb.2011.01.042.

Статья поступила в редколлегию 07.12.2018.
Received by editorial board 07.12.2018.

УДК 539.12

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ ФОРМФАКТОР ВЕКТОРНЫХ МЕЗОНОВ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАРКОВОЙ МОДЕЛИ

В. В. АНДРЕЕВ¹⁾, В. Ю. ГАВРИШ²⁾

¹⁾Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины,
ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель, Беларусь

²⁾Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого,
пр. Октября, 48, 246746, г. Гомель, Беларусь

Исследовано поведение электромагнитных формфакторов переходов вида $V \rightarrow P\ell^+\ell^-$ для векторных мезонов V и псевдоскалярных мезонов P в рамках релятивистской кварковой модели, основанной на точечной форме пуанкаре-инвариантной квантовой механики. На основе самосогласованного описания констант лептонных и радиационных распадов псевдоскалярных и векторных мезонов определено поведение формфакторов в зависимости от переданного импульса для процессов $\omega \rightarrow \pi^0\ell^+\ell^-$ и $\phi \rightarrow \eta\ell^+\ell^-$. Найденные в рамках предложенной модели данные сопоставляются с современными экспериментальными. Показано, что поведение формфакторов хорошо согласуется с экспериментом. Сравнительный анализ результатов, полученных в разных формах пуанкаре-инвариантной квантовой механики, позволит исследовать роль различных приближений, часто используемых в расчетах и на практике, а также проверить унитарную эквивалентность форм динамик.

Ключевые слова: кварк; адрон; радиационный распад; группа Пуанкаре; точечная форма динамики.

ELECTROMAGNETIC FORM-FACTOR OF VECTOR MESONS IN THE RELATIVISTIC QUARK MODEL

V. V. ANDREEV^a, V. Yu. HAURYSH^b

^aFrancisk Skaryna Gomel State University, 104 Saveckaja Street, Gomel 246019, Belarus

^bSukhoi State Technical University of Gomel, 48 Kastrыčnika Avenue, Gomel 246746, Belarus

Corresponding author: V. Yu. Haurysh (mez0n@inbox.ru)

In paper studied the behavior of electromagnetic form-factors of the $V \rightarrow P\ell^+\ell^-$ transitions for vector V and pseudoscalar P mesons within the framework of the relativistic quark model, based on the point form of Poincaré-invariant quantum mechanics. Based on the self-consistent description of the lepton and radiative decay constants of pseudoscalar and vector mesons, the behavior of the form-factors, depending on the transmitted momentum, for the $\omega \rightarrow \pi^0\ell^+\ell^-$ and $\phi \rightarrow \eta\ell^+\ell^-$ processes is obtained. The numerical results within the framework of the proposed model are compared with modern experimental data. Shown, that the behavior of form-factors is in good agreement with experiment. A comparative analysis of the results obtained in different forms of Poincaré-invariant quantum mechanics will allow to research the role of various approximations often used in calculations and in practice, and also check the unitary equivalence of the different forms of dynamics.

Key words: quark; hadron; radiative decay; Poincaré group; point-form of dynamics.

Образец цитирования:

Андреев ВВ, Гавриш ВЮ. Электромагнитный формфактор векторных мезонов в релятивистской кварковой модели. Журнал Белорусского государственного университета. Физика. 2019;1:63–71.

For citation:

Andreev VV, Haurysh VYu. Electromagnetic form-factor of vector mesons in the relativistic quark model. *Journal of the Belarusian State University. Physics.* 2019;1:63–71. Russian.

Авторы:

Виктор Васильевич Андреев – доктор физико-математических наук; профессор кафедры теоретической физики факультета физики и информационных технологий.

Вадим Юрьевич Гавриш – старший преподаватель кафедры механики машиностроительного факультета.

Authors:

Viktor V. Andreev, doctor of science (physics and mathematics); professor at the department of theoretical physics, faculty of physics and information technologies.

vik.andreev@gsu.by

Vadzim Yu. Haurysh, senior lecturer at the department of mechanics, faculty of mechanical engineering.

mez0n@inbox.ru

Введение

С появлением современных экспериментальных данных по распадам псевдоскалярных (P) и векторных (V) мезонов [1–4] возродился интерес к изучению радиационных переходов легких адронов. Такие распады, как $V \rightarrow P\gamma$ и $V \rightarrow P\ell^+\ell^-$, наиболее удобны для апробации различных подходов и моделей: очевидно, что указанные распады имеют простейший механизм взаимодействия конститuentных кварков, и, как следствие, являются более удобным полигоном для исследования кваркового взаимодействия, чем адронные переходы псевдоскалярных и векторных мезонов. Из вышесказанного следует, что такие процессы дают возможность не только получить численную оценку различных формфакторов адронов, но и оценить углы смешивания, а также выполнить расчеты по структуре кварков, входящих в мезон. Данная проблема особенно актуальна для мезонов легкого сектора, поскольку такие системы являются чисто релятивистскими, позволяя оценить магнитные моменты кварков с высокой точностью.

Среди разнообразия подходов для описания релятивистских кварковых систем особое место занимают модели, основанные на алгебре Пуанкаре, которые называются пуанкаре-инвариантными или релятивистскими моделями прямого взаимодействия частиц. Несмотря на то что данная теория разрабатывалась как модель взаимодействия любых частиц, она также может быть применена для задач квантовой хромодинамики.

Из трех форм пуанкаре-инвариантной квантовой механики (ПиКМ) для решения задач по расчету наблюдаемых радиационных переходов наиболее используемой, в силу особенностей коммутационных соотношений генераторов с взаимодействием и без него, является динамика на световом фронте [5]. В работах, посвященных указанным распадам, тем не менее кварк полагается бесструктурной частицей, в отличие от мгновенной формы динамики [6], так как было показано, что для совпадения расчетов с экспериментальными данными необходимо учитывать аномальный магнитный момент кварка. Данная идея не нова, поскольку в исследованиях по анализу барионных наблюдаемых величин для описания экспериментальных данных используются аномальные магнитные моменты конститuentных кварков.

В многочисленных работах, касающихся различных форм пуанкаре-инвариантной механики, точечная форма динамики менее используется для вычисления экспериментальных характеристик мезонов. Несмотря на развитый математический аппарат по расчету электромагнитных формфакторов в рамках указанной формы динамики, при численном определении характеристик мезонов легкого сектора возникали расхождимости с экспериментальными данными, что привело к появлению различных модификаций точечной формы ПиКМ [7; 8]. Из вышесказанного следует, что развитие этой формы динамики с последующим применением для расчетов наблюдаемых величин является актуальной задачей физики связанных состояний.

В данной работе демонстрируется разработанная методика вычисления наблюдаемых величин в точечной форме ПиКМ с последующим нахождением формфакторов легких нейтральных мезонов в реакциях вида $V \rightarrow P\ell^+\ell^-$. В разделе 1 кратко излагается схема получения интегрального представления константы радиационных переходов в рамках ПиКМ, в разделе 2 приводятся полученные ранее параметры модели, в разделе 3 обсуждаются схемы смешивания для мезонов псевдоскалярного и векторного секторов. Как результат, в разделе 4 изучается поведение электромагнитных формфакторов переходов $\omega \rightarrow \pi^0\ell^+\ell^-$ и $\phi \rightarrow \eta\ell^+\ell^-$ с использованием самосогласованного описания распадов в релятивистской кварковой модели, основанной на точечной форме ПиКМ.

1. Методика расчета наблюдаемых величин в точечной форме ПиКМ

Параметризация матричного элемента перехода векторного (псевдоскалярного) мезона $V(P)$ в псевдоскалярный (векторный) мезон $P(V)$ с 4-импульсами $Q = \{Q_0, \vec{Q}\} (Q^2 = M^2)$ и $Q' = \{Q'_0, \vec{Q}'\} (Q'^2 = M'^2)$ с испусканием виртуального γ^* определяется выражением [7]

$$\langle Q', M' | J_h^\mu(0) | Q, M \rangle = i\sqrt{4\pi\alpha} g_{VP\gamma} (q^2) \frac{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_\nu(\lambda_V) Q_\rho Q_\sigma}{(2\pi)^3 \sqrt{4Q_0 Q'_0}}, \quad (1)$$

где $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ – постоянная тонкой структуры; $q = Q - Q'$; $\varepsilon_\nu(\lambda_V)$ – вектор поляризации мезона V с проекцией спина λ_V .

Ширина распада $V \rightarrow P\gamma$ определяется соотношением

$$\Gamma(V \rightarrow P\gamma) = \alpha \frac{g_{VP\gamma}^2}{3} \left(\frac{M_V^2 - M_P^2}{2M_V} \right)^3, \quad (2)$$

а распада $P \rightarrow V\gamma$ – выражением

$$\Gamma(P \rightarrow V\gamma) = \alpha g_{VP\gamma}^2 \left(\frac{M_P^2 - M_V^2}{2M_P} \right)^3, \quad (3)$$

где $g_{VP\gamma} = g_{VP\gamma}(q^2 = 0)$. Уравнения (2) и (3) позволяют экспериментально определить константы радиационных распадов (с точностью до знака).

Схема вычисления константы распада в ПиКМ следующая: в случае системы двух частиц с массами $m_q, m_{\bar{q}}$ и, соответственно, 4-импульсами $p_1 = (\omega_{m_q}(\vec{p}_1), \vec{p}_1)$, $p_2 = (\omega_{m_{\bar{q}}}(\vec{p}_2), \vec{p}_2)$ базис прямого произведения двух невзаимодействующих частиц

$$|\vec{p}_1, \lambda_1\rangle \otimes |\vec{p}_2, \lambda_2\rangle = |\vec{p}_1, \lambda_1, \vec{p}_2, \lambda_2\rangle \quad (4)$$

является приводимым представлением группы Пуанкаре. Для неприводимого представления, характеризующего всю систему, введем полный импульс

$$\vec{P}_{12} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

и относительный импульс k двух частиц [9].

В предположении, что векторы свободных частиц и связанной $q\bar{q}$ -системы подчиняются алгебре группы Пуанкаре, вектор состояния мезона массой M с угловым моментом J определяется как прямое произведение вектора свободных частиц (кварков) и волновой функции $\Phi_{\ell S}^J(k, \beta_{q\bar{q}})$ [10; 11]:

$$\begin{aligned} |\bar{Q}, J\mu, M\rangle = & \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \sum_{v_1, v_2} \int d\vec{k} \sqrt{\frac{\omega_{m_q}(\vec{p}_1)\omega_{m_{\bar{q}}}(\vec{p}_2)M_0(\vec{k})}{\omega_{m_q}(\vec{k})\omega_{m_{\bar{q}}}(\vec{k})\omega_{M_0}(\vec{P}_{12})}} \Phi_{\ell S}^J(k, \beta_{q\bar{q}}) C \left\{ \begin{matrix} s_1 & s_2 & S \\ v_1 & v_2 & v_1 + v_2 \end{matrix} \right\} \times \\ & \times C \left\{ \begin{matrix} \ell & S & J \\ \mu - (v_1 + v_2) & v_1 + v_2 & \mu \end{matrix} \right\} Y_{\ell, \mu - (v_1 + v_2)}(\theta_k, \varphi_k) D_{\lambda_1, v_1}^{1/2}(\vec{n}_{W_1}) D_{\lambda_2, v_2}^{1/2}(\vec{n}_{W_2}) |\vec{p}_1, \lambda_1, \vec{p}_2, \lambda_2\rangle, \end{aligned} \quad (5)$$

где $C \left\{ \begin{matrix} s_1 & s_2 & S \\ v_1 & v_2 & v_1 + v_2 \end{matrix} \right\}$, $C \left\{ \begin{matrix} \ell & S & J \\ \mu - (v_1 + v_2) & v_1 + v_2 & \mu \end{matrix} \right\}$ – коэффициенты Клебша – Гордана группы SU(2); $Y_{\ell, m}$ – сферические функции; $D_{\lambda, v}^{1/2}(\vec{n}_W)$ – функции Вигнера. Далее для краткости используются обозначения

$$k = |\vec{k}|, \quad M_0(k) = \omega_{m_q}(k) + \omega_{m_{\bar{q}}}(k), \quad \omega_m(k) = \omega_m(\vec{k}) = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2},$$

а волновая функция выражения (5) удовлетворяет условию нормировки

$$\sum_{\ell, S} \int dk k^2 \left| \Phi_{\ell S}^J(k, \beta_{q\bar{q}}) \right|^2 = 1.$$

Используя равенство 4-скоростей для свободной и связанной системы в точечной форме ПиКМ

$$V_Q = \frac{Q}{M} \equiv V_{P_2} = \frac{P_{12}}{M_0(k)},$$

в нашем подходе из (1) для константы распада $V(P) \rightarrow P(V)\gamma^*$ получаем

$$g_{VP\gamma}(q^2) = (2\pi)^3 \left\langle Q', M' \left| \frac{\sqrt{4V_0' V_0}}{\sqrt{M_0(k') M_0(k)}} \frac{(J_h(0) \cdot K^*(\lambda_V))}{(K(\lambda_V) \cdot K^*(\lambda_V))} \right| Q, 1\lambda_V, M \right\rangle, \quad (6)$$

где $K^\mu(\lambda_V) = i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_\nu(\lambda_V) V_\rho V'_\sigma$. Если процесс $V(P) \rightarrow P(V)\gamma^*$ обусловлен взаимодействием конститuentных кварков с адронами, то с учетом импульсного приближения

$$J_h^\mu(0) \approx J_{\text{quark}}^\mu(0) = \sum_{q, q'=u, d, s} e_q \bar{\Psi}_{q'} \Gamma^\mu \Psi_q$$

в кварковом базисе (4) ток перехода записывается в виде

$$\begin{aligned} & \langle \bar{p}'_1, \lambda_1, \bar{p}'_2, \lambda_2 | J_{\text{quark}}^\mu(0) | \bar{p}_1, \lambda_1, \bar{p}_2, \lambda_2 \rangle = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^3} \left(e_q \frac{\bar{u}_{\lambda_1}(\bar{p}'_1, m'_q) \Gamma_q^\mu u_{\lambda_1}(\bar{p}_1, m_q)}{\sqrt{2\omega_{m'_q}(\bar{p}'_1)} \sqrt{2\omega_{m_q}(\bar{p}_1)}} + e_{\bar{q}} \frac{\bar{v}_{\lambda_2}(\bar{p}_2, m_{\bar{q}}) \Gamma_{\bar{q}}^\mu v_{\lambda_2}(\bar{p}'_2, m'_{\bar{q}})}{\sqrt{2\omega_{m'_{\bar{q}}}(\bar{p}'_2)} \sqrt{2\omega_{m_{\bar{q}}}(\bar{p}_2)}} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Ввиду (1), (5) и (7) из (6) получаем интегральное представление константы распада $V(P) \rightarrow P(V)\gamma^*$ [10]:

$$\begin{aligned} g_{VP\gamma^*}(q^2) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{v, v'_1} \int dk \sqrt{\frac{3+4v_1(\lambda_V - v_1)}{4}} \frac{v'_1}{\sqrt{M_0(k)}} \Phi(k, \beta_{q\bar{q}}^V) \sqrt{\frac{1}{\omega_{m_q}(k)\omega_{m_{\bar{q}}}(k)}} \times \\ & \times e_q \sqrt{\frac{\omega_{m_{\bar{q}}}(k_2)}{\omega_{m_q}(k_2)}} \bar{u}_{v'_1}(k_2, m_q) B(v_{\bar{q}}) (K^*(\lambda_V) \cdot \Gamma_q) u_{v_1}(k, m_q) \frac{1}{\sqrt{\omega_{12}^2(k, t) - 1}} \frac{\Phi^*(k_2, \beta_{q\bar{q}}^P)}{\sqrt{M_0(k_2)}} \times \\ & \times D_{-v'_1, \lambda_V - v_1}(n_{W_2}(k, v_{\bar{q}})) \frac{1}{\sqrt{\omega_{12}^2(k, t) - 1}} \frac{\Phi^*(k_2, \beta_{q\bar{q}}^P)}{\sqrt{M_0(k_2)}} D_{-v'_1, \lambda_V - v_1}(n_{W_2}(k, v_{\bar{q}})) + e_{\bar{q}} \sqrt{\frac{\omega_{m_q}(k_1)}{\omega_{m_{\bar{q}}}(k_1)}} \times \\ & \times \bar{v}_{\lambda_V - v_1}(k, m_{\bar{q}}) B(-v_{\bar{q}}) (K^*(\lambda_V) \cdot \Gamma_{\bar{q}}) v_{-v'_1}(k_1, m_{\bar{q}}) \frac{1}{\sqrt{\omega_{12}^2(k, t) - 1}} \frac{\Phi^*(k_1, \beta_{q\bar{q}}^P)}{\sqrt{M_0(k_1)}} D_{v'_1, v_1}(n_{W_1}(k, v_{\bar{q}})). \end{aligned} \quad (8)$$

В выражении (8)

$$\begin{aligned} v_{\bar{q}} &= \frac{V_{\bar{q}}}{V_0}, \quad n_{W_{2,1}}(k, v_{\bar{q}}) = -\frac{[k \times V_{\bar{q}}]}{\omega_{m_q, \bar{q}}(k) + m_{q, \bar{q}} - (kV_{\bar{q}})}, \\ K(\lambda_V) &= \sqrt{\frac{\omega_{12}(k, t) - 1}{2}} \{0, \lambda_V, i, 0\}, \quad \Gamma_{q, \bar{q}} = F_1(q^2) \gamma^\mu + \frac{1}{2m_{q, \bar{q}}} F_2(q^2) \sigma^{\mu\nu} q_\nu, \\ k_{1,2} &= k \pm v_{\bar{q}} \left((\omega_{12}(k, t) + 1) \omega_{m_q, \bar{q}}(k) - k \sqrt{\omega_{12}^2(k, t) - 1} \cos \theta_k \right), \quad t = (Q - Q')^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Выполнив предельный переход в (8), с учетом выражений (9) и $F_1(q^2=0) = e_{q, \bar{q}}$, $F_1(q^2=0) + F_2(q^2=0) = \mu_{q, \bar{q}}$ получим интегральное представление константы $g_{VP\gamma}$ при $q^2=0$:

$$\begin{aligned} g_{VP\gamma} &= \int dk k^2 \Phi(k, \beta_{q\bar{q}}^V) \Phi^*(k, \beta_{q\bar{q}}^P) \left(e_q f_1(k, m_q, m_{\bar{q}}) + \right. \\ & \left. + \frac{e_q K_q}{2m_q} f_2(k, m_q, m_{\bar{q}}) - e_{\bar{q}} f_1(k, m_{\bar{q}}, m_q) - \frac{e_{\bar{q}} K_{\bar{q}}}{2m_{\bar{q}}} f_2(k, m_{\bar{q}}, m_q) \right), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} f_1(k, m_q, m_{\bar{q}}) &= \frac{1}{3\omega_{m_q}(k)} \left(\frac{m_q + m_{\bar{q}}}{M_0(k)} + \frac{m_q}{\omega_{m_q}(k)} + 1 \right); \\ f_2(k, m_q, m_{\bar{q}}) &= -\frac{2}{3} \left(\frac{m_q^2 + \omega_{m_q}(k)(m_q + \omega_{m_q}(k))}{\omega_{m_q}^2(k)} \right). \end{aligned}$$

2. Параметры модели, основанной на точечной форме ПиКМ

Процедура получения базовых параметров модели, таких как массы конститuentных кварков и параметры волновых функций в зависимости от выбора пробной волновой функции, подробно изложена в [11], поэтому здесь приводятся только основные этапы расчета с осцилляторной волновой функцией для псевдоскалярных ($I = P, \ell = 0$) и векторных ($I = V, \ell = 0$) мезонов:

$$\Phi_{cs}^J(k, \beta_{q\bar{q}}^I) = \frac{2}{\pi^{1/4} (\beta_{q\bar{q}}^I)^{3/2}} \exp\left[-\frac{k^2}{2(\beta_{q\bar{q}}^I)^2}\right], \quad I = V, P.$$

Используя экспериментальные данные по лептонным распадам псевдоскалярных и векторных мезонов [12], интегральные представления константы лептонного распада

$$f_I(m_q, m_{\bar{q}}, \beta_{q\bar{q}}^I) = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\pi} \int dk k^2 \Phi(k, \beta_{q\bar{q}}^I) \sqrt{\frac{W_{m_q}^+(k) W_{m_{\bar{q}}}^+(k)}{M_0(k) \omega_{m_q}(k) \omega_{m_{\bar{q}}}(k)}} \times \\ \times \left(1 + a_I \frac{k^2}{W_{m_q}^+(k) W_{m_{\bar{q}}}^+(k)}\right), \quad I = P, V; \quad a_P = -1; \quad a_V = \frac{1}{3}; \quad W_m^\pm(k) = \omega_m(k) + m,$$

и константы псевдоскалярной плотности [10]

$$g_P(m_q, m_{\bar{q}}, \beta_{q\bar{q}}^P) = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\pi} \int dk k^2 \Phi(k, \beta_{q\bar{q}}^P) \sqrt{\frac{M_0(k)}{\omega_{m_q}(k) \omega_{m_{\bar{q}}}(k)}} \left(\sqrt{W_{m_q}^+(k) W_{m_{\bar{q}}}^+(k)} + \sqrt{W_{m_q}^-(k) W_{m_{\bar{q}}}^-(k)}\right),$$

получаем следующие параметры модели:

$$m_u = (219,48 \pm 9,69) \text{ МэВ}, \quad m_d = (221,97 \pm 9,69) \text{ МэВ}, \quad m_s = (416,95 \pm 61,22) \text{ МэВ}, \\ \beta_{u\bar{d}}^P = (367,93 \pm 25,10) \text{ МэВ}, \quad \beta_{u\bar{d}}^V = (311,95 \pm 2,14) \text{ МэВ}, \\ \beta_{u\bar{s}}^P = (375,53 \pm 19,66) \text{ МэВ}, \quad \beta_{u\bar{s}}^V = (313,65 \pm 24,22) \text{ МэВ}.$$

Для расчетов далее будем считать, что изотопическая инвариантность кварков $u - d$ слабо нарушена, и это дает возможность полагать

$$\beta_{u\bar{u}}^V = \beta_{u\bar{d}}^V - \Delta\beta_{u\bar{d}}, \quad \beta_{d\bar{d}}^V = \beta_{u\bar{d}}^V + \Delta\beta_{u\bar{d}}, \quad \beta_{d\bar{s}}^V = \beta_{u\bar{s}}^V + \Delta\beta_{u\bar{d}}, \quad \beta_{d\bar{s}}^P = \beta_{u\bar{s}}^P + \Delta\beta_{u\bar{d}},$$

где масштаб нарушения определяется параметром $\Delta\beta_{u\bar{d}} \simeq m_d - m_u = (2,5 \pm 0,2) \text{ МэВ}$.

С помощью (10) и экспериментальных данных по радиационным распадам ρ^+ , K^{*+} и K^{*0} получаем следующие значения аномальных магнитных моментов кварков (в естественных кварковых единицах):

$$\kappa_u = -0,123 \pm 0,084, \quad \kappa_d = -0,088 \pm 0,015, \quad \kappa_s = -0,198 \pm 0,011. \quad (11)$$

Сравнение полученных на основе (11) значений $\tilde{\kappa}_u = \frac{\kappa_u}{e_u} = -0,082$, $\tilde{\kappa}_d = \frac{\kappa_d}{e_d} = 0,029$ с результатами работы [13] $\tilde{\kappa}_u = -0,064$, $\tilde{\kappa}_d = 0,017$ дает возможность сделать вывод, что численные значения аномальных магнитных моментов коррелируют между собой.

3. Распады нейтральных мезонов в точечной форме ПиКМ

Для решения задачи о распадах нейтральных мезонов рассмотрим варианты смешивания псевдоскалярных и векторных мезонов. В физических приложениях наиболее используются кварковые базисы

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} |u\bar{u} - d\bar{d}\rangle, \\ \Psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} |u\bar{u} - d\bar{d}\rangle, \\ \Psi_s = |s\bar{s}\rangle \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} |u\bar{u} - d\bar{d}\rangle, \\ \Psi_8 = \frac{1}{\sqrt{6}} |u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}\rangle, \\ \Psi_s = \frac{1}{\sqrt{3}} |u\bar{u} + d\bar{d} - s\bar{s}\rangle. \end{array} \right. \quad (12)$$

В этой работе предполагаем, что схемы смешивания, основанные на базисах (12), дают эквивалентные описания состояний мезонов, которые определяются выражениями

$$\begin{cases} |\varphi\rangle = \cos\varphi_V \psi_q - \sin\varphi_V \psi_q = \cos\theta_V \psi_8 - \sin\theta_V \psi_1, \\ |\omega\rangle = \sin\varphi_V \psi_q + \cos\varphi_V \psi_q = \sin\theta_V \psi_8 + \cos\theta_V \psi_1, \\ |\rho^0\rangle = \psi_1, \end{cases} \quad (13)$$

где углы смешивания φ_V и θ_V связаны соотношением

$$\theta_V = \varphi_V - \arctg\sqrt{2}. \quad (14)$$

Для псевдоскалярных η -, η' - и π^0 -мезонов наивная схема смешивания (13) приводит к вычислениям, значительно отличающимся от экспериментальных данных, поэтому после работ [14; 15] появилась тенденция для мезонов $\eta - \eta'$ -сектора учитывать глюонную компоненту $|G\rangle$:

$$\begin{cases} |\eta\rangle = X_\eta \psi_q + Y_\eta \psi_s + Z_\eta \psi_G, \\ |\eta'\rangle = X_{\eta'} \psi_q + Y_{\eta'} \psi_s + Z_{\eta'} \psi_G, \\ |G\rangle = X_G \psi_q + Y_G \psi_s + Z_G \psi_G. \end{cases} \quad (15)$$

В системе (15) компоненты определяются выражениями

$$\begin{aligned} X_\eta &= \cos\varphi_P \cos\alpha_G, \quad Y_\eta = -\sin\varphi_P \cos\alpha_G, \quad Z_\eta = -\sin\alpha_G, \\ X_{\eta'} &= \cos\varphi_P \sin\alpha_G \sin\varphi_G + \sin\varphi_P \sin\varphi_G, \\ Y_{\eta'} &= \cos\varphi_P \cos\varphi_G - \sin\varphi_P \sin\alpha_G \sin\varphi_G, \quad Z_{\eta'} = \cos\alpha_G \sin\varphi_G, \end{aligned} \quad (16)$$

а связь углов для базисов (12) аналогична выражению (14):

$$\theta_P = \varphi_P - \arctg\sqrt{2}. \quad (17)$$

С помощью (13) и (15) можно получить выражения для распадов нейтральных мезонов (см. таблицу).

Распады мезонов $V(P)$ с учетом углов смешивания
Decay of $V(P)$ mesons representation taking into account mixing angles

Мода распада	Представление распада в ПикМ
$\rho^0 \rightarrow \pi^0 \gamma$	$e_u I(u\bar{u}) + e_d I(d\bar{d})$
$\rho^0 \rightarrow \eta \gamma$	$X_\eta (e_u I(u\bar{u}) - e_d I(d\bar{d}))$
$\varphi \rightarrow \pi^0 \gamma$	$\cos\varphi_V (e_u I(u\bar{u}) - e_d I(d\bar{d}))$
$\varphi \rightarrow \eta \gamma$	$\cos\varphi_V X_\eta (e_u I(u\bar{u}) + e_d I(d\bar{d})) - 2e_s \sin\varphi_V Y_\eta I(s\bar{s})$
$\varphi \rightarrow \eta' \gamma$	$\cos\varphi_V X_{\eta'} (e_u I(u\bar{u}) + e_d I(d\bar{d})) - 2e_s \sin\varphi_V Y_{\eta'} I(s\bar{s})$
$\omega \rightarrow \pi^0 \gamma$	$\sin\varphi_V (e_u I(u\bar{u}) - e_d I(d\bar{d}))$
$\omega \rightarrow \eta \gamma$	$\sin\varphi_V X_\eta (e_u I(u\bar{u}) + e_d I(d\bar{d})) + 2e_s \cos\varphi_V Y_\eta I(s\bar{s})$
$\eta' \rightarrow \rho^0 \gamma$	$X_\eta (e_u I(u\bar{u}) - e_d I(d\bar{d}))$
$\eta' \rightarrow \omega \gamma$	$\sin\varphi_V X_{\eta'} (e_u I(u\bar{u}) + e_d I(d\bar{d})) + 2e_s \cos\varphi_V Y_{\eta'} I(s\bar{s})$

Примечание. В таблице использовано обозначение

$$I(q\bar{q}) = \int dk k^2 \Phi(k, \beta_{q\bar{q}}^V) \Phi^*(k, \beta_{q\bar{q}}^P) \left(\frac{\omega_{m_q}(k) + 2m_q}{3\omega_{m_q}^2(k)} + \kappa_q \left(-\frac{1}{3} \frac{m_q^2 + \omega_{m_q}(k)(m_q + \omega_{m_q}(k))}{m_q \omega_{m_q}^2(k)} \right) \right).$$

На основе экспериментальных данных [12] получаем оставшиеся параметры релятивистской кварковой модели, а также углы смешивания (14) и (17) псевдоскалярных и векторных мезонов:

$$\beta_{u\bar{u}}^P = (280,60 + 25,07) \text{ МэВ}, \beta_{d\bar{d}}^P = (277,95 \pm 25,07) \text{ МэВ}, \theta_p = (-9,1 \pm 2,4)^\circ,$$

$$\beta_{s\bar{s}}^P = (494,54 \pm 19,66) \text{ МэВ}, \alpha_G = (9,5 \pm 3,4)^\circ, \phi_G = (-28,8 \pm 3,4)^\circ.$$

4. Электромагнитный формфактор перехода $V \rightarrow P\ell^+\ell^-$

Исследование поведения формфактора радиационных переходов стало особенно актуальным после появления серии работ, в которых соответствующие экспериментальные значения (см. [1–5; 12]) получены с высокой точностью. В настоящей работе, основываясь на изложенной выше методике и экспериментальных данных, авторы проводят расчет формфакторов различных мезонов для распадов $V \rightarrow P\ell^+\ell^-$ с учетом аномальных магнитных моментов кварков.

Используя для (8) и (9) формфакторы в виде [13]

$$F_1(q^2) = \frac{e_q}{1 - \frac{a}{6m_q^2}t}, \quad F_2(q^2) = \frac{e_q \kappa_q}{\left(1 - \frac{a}{12m_q^2}t\right)^2}, \quad (18)$$

для распада $\omega \rightarrow \pi^0\ell^+\ell^-$ [3] с учетом найденных параметров (см. выше) получаем зависимость электромагнитного формфактора от величины переданного лептонной паре $\ell^+\ell^-$ импульса q . Поведение формфактора представлено на рис. 1 (совместно с экспериментальными данными из [3]).

Аналогичные вычисления для распада $\phi \rightarrow \eta\ell^+\ell^-$ приводят к зависимости, изображенной на рис. 2 (экспериментальные данные – из [1]).

При расчетах использован угол смешивания векторных мезонов $\theta_v = (31,92 \pm 0,2)^\circ$ [4]; для параметра формфакторов (18) принято значение $a = 0,3$, как в работе [13].

Из результатов вычислений (см. рис. 1 и 2) следует, что при $q \in [0; 0,45)$ ГэВ предложенная релятивистская кварковая модель удовлетворительно описывает современные экспериментальные данные. В других областях сравнение невозможно в силу больших экспериментальных погрешностей.

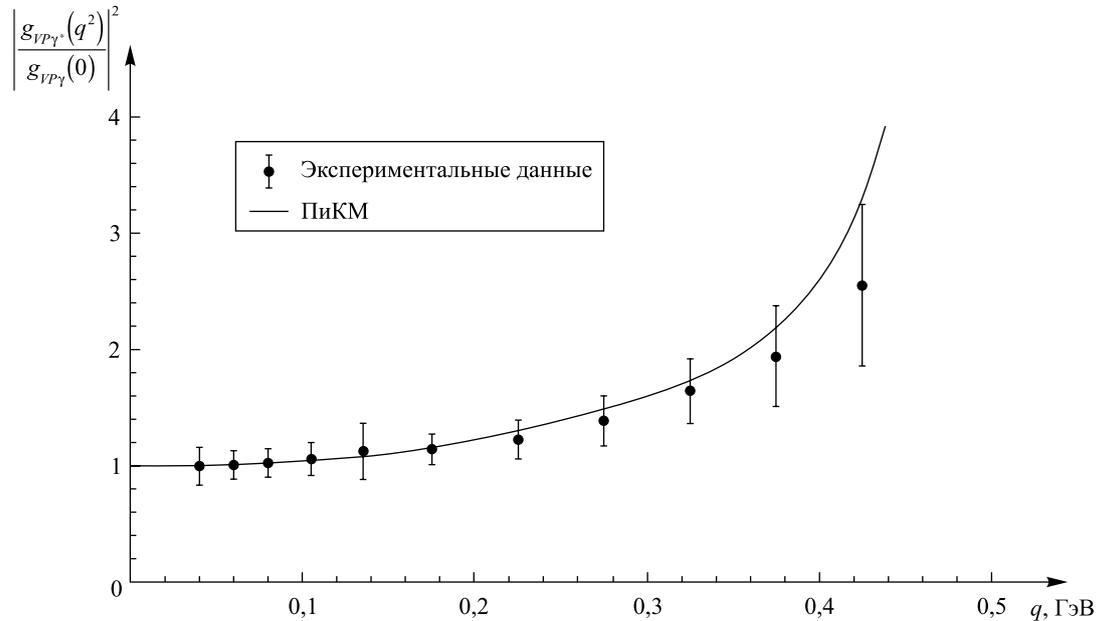


Рис. 1. Поведение формфактора распада $\omega \rightarrow \pi^0\ell^+\ell^-$ при различных q

Fig. 1. Behavior of form-factor of $\omega \rightarrow \pi^0\ell^+\ell^-$ decay for different q

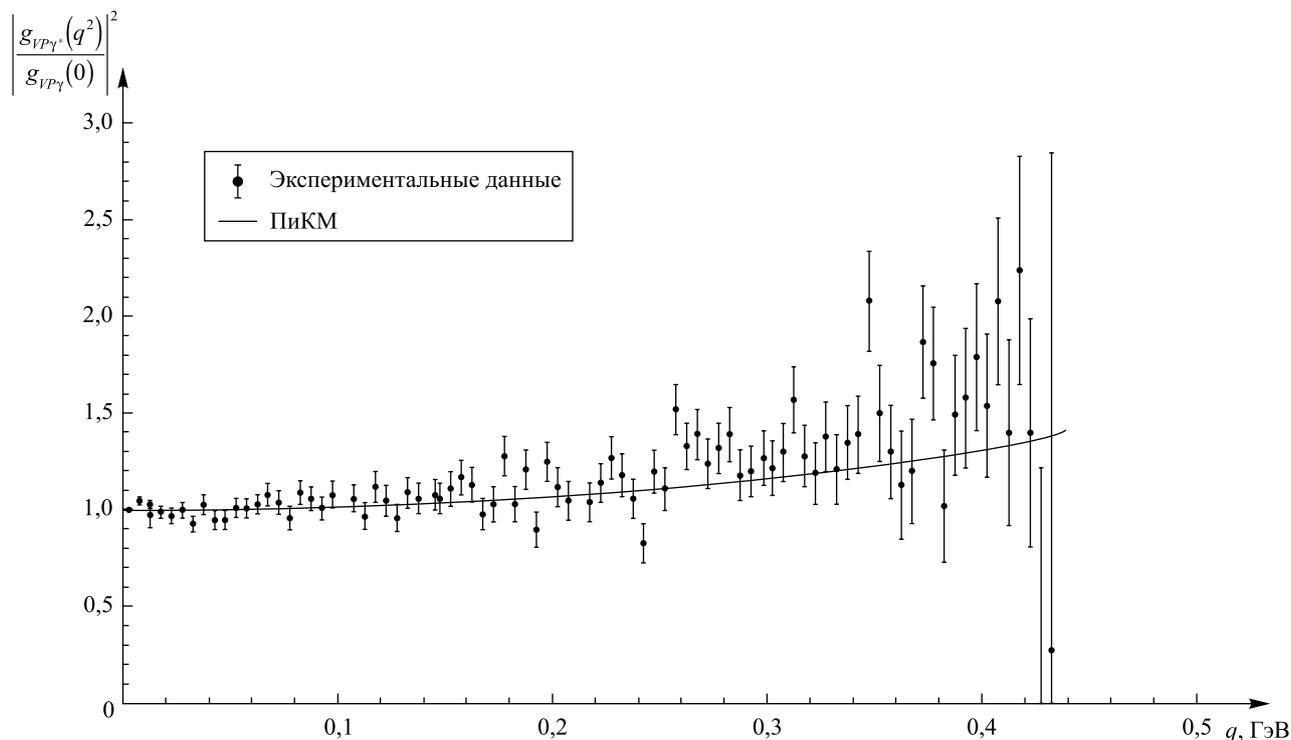


Рис. 2. Поведение формфактора распада $\phi \rightarrow \eta \ell^+ \ell^-$ при различных q
 Fig. 2. Behavior of form-factor of $\phi \rightarrow \eta \ell^+ \ell^-$ decay for different q

Заключение

В работе представлена самосогласованная модель описания лептонных и адронных распадов псевдоскалярных и векторных мезонов, основанная на точечной форме ПиКМ. Продемонстрирована методика вычисления формфакторов радиационных переходов, в рамках разработанной методики выполнен расчет аномальных магнитных моментов кварков. В результате проведена численная оценка поведения формфакторов перехода $V \rightarrow P \ell^+ \ell^-$ с учетом найденных параметров модели при различных переданных импульсах. Отмечено, что полученное поведение формфакторов хорошо согласуется с экспериментом при параметрах модели, описывающих радиационные и лептонные распады легких мезонов.

Библиографические ссылки / References

1. Babusci D, Balwierz-Pytkog I, Bencivenni G, Bloise C, Bossi F, Branchini P, et al. Study of the Dalitz decay $\phi \rightarrow \eta e^+ e^-$ with the KLOE detector. *Physics Letters B*. 2015;742:1–6. DOI: 10.1016/j.physletb.2015.01.011.
2. Anastasi A, Babusci D, Bencivenni G, Berlowski M, Bloise C, Bossi F, et al. Measurement of the $\phi \rightarrow \pi^0 e^+ e^-$ transition form factor with the KLOE detector. *Physics Letters B*. 2016;757:362–367. DOI: 10.1016/j.physletb.2016.04.015.
3. Adlarson P, Afzal F, Aguilar-Bartolomé P, Ahmed Z, Annand JRM, Arends HJ, et al. Measurement of the $\omega \rightarrow \pi^0 e^+ e^-$ and $\eta \rightarrow e^+ e^-$ Dalitz decays with the A2 setup at MAMI. *Physical Review C*. 2017;95:035208. DOI: 10.1103/PhysRevC.95.035208.
4. Amelino-Camelia G, Archilli F, Babusci D, Badoni D, Bencivenni G, Bernabeu J, et al. Physics with the KLOE-2 experiment at the upgraded DAFNE. *European Physical Journal C*. 2010;68(3–4):619–681. DOI: 10.1140/epjc/s10052-010-1351-1.
5. Jaus W. Relativistic constituent quark model of electroweak properties of light mesons. *Physical Review D*. 1991;44:2851–2859. DOI: 10.1103/PhysRevD.44.2851.
6. Krutov AF, Polezhaev RG, Troitsky VE. Magnetic moment of the meson in instant-form relativistic quantum mechanics. *Physical Review D*. 2018;97:033007. DOI: 10.1103/PhysRevD.97.033007.
7. Desplanques B. Dirac's inspired point form and hadron form factors. *Nuclear Physics A*. 2005;755:303–306. DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2005.03.032.
8. Melde T, Canton L, Plessas R, Wagenbrunn RF. Spectator-model operators in point-form relativistic quantum mechanics. *European Physical Journal A*. 2005;25:97–105. DOI: 10.1140/epja/i2004-10276-4.
9. Keister BD, Polyzou WN. Relativistic Hamiltonian dynamics in nuclear and particle physics. In: Negele JW, Vogt EW, editors. *Advances in Nuclear Physics. Volume 20*. New York, London: Springer; 1991. p. 225–479.
10. Andreev VV, Haurysh VYu. Radiative decays of light vector mesons in Poincare-invariant quantum mechanics. *Journal of Physics: Conference Series*. 2016;678:1–5. DOI: 10.1088/1742-6596/678/1/012041.

11. Andreev VV, Haurysh VYu. Constituent quark masses in Poincaré-invariant quantum mechanics. *Journal of Physics: Conference Series*. 2017;938:1–5. DOI: 10.1088/1742-6596/938/1/0120.
12. Tanabashi M, Hagiwara K, Hikasa K, Nakamura K, Sumino Y, Takahashi F, et al. Review of particle physics. *Physical Review D*. 2018;98:030001. DOI: 10.1103/PhysRevD.98.030001.
13. Petronzio R, Simula S, Ricco G. Possible evidence of extended objects inside the proton. *Physical Review D*. 2003;67:094004. DOI: 10.1103/PhysRevD.67.094004.
14. Ambrosino F, Antonelli A, Anton M, Archilli F, Beltrame P, Bencivenni G, et al. $\eta - \eta'$ physics at KLOE. *Proceeding of science*. 2009;CD09:045.
15. Feldmann T, Kroll P, Stech B. Mixing and decay constants of pseudoscalar mesons: The sequel. *Physics Letters B*. 1999;448:339–346. DOI: 10.1016/S0370-2693(99)00085-4.

Статья поступила в редколлегию 15.11.2018.
Received by editorial board 15.11.2018.

УДК 539.12

ОПИСАНИЕ СКАЛЯРНЫХ МЕЗОНОВ КАК ДВУХ- И ЧЕТЫРЕХКВАРКОВЫХ СОСТОЯНИЙ

Е. З. АВАКЯН¹⁾, С. Л. АВАКЯН¹⁾

¹⁾Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого,
пр. Октября, 48, 246746, г. Гомель, Беларусь

Легкие скалярные мезоны изучены в рамках кварковых моделей. Показано, что в модели конфайнмированных кварков для описания указанных мезонов требуется введение добавочного члена с производной в лагранжиан взаимодействия. Получены параметры дополнительного взаимодействия, масса мезона $f_0(600)$, равная 500–515, зафиксирована по экспериментальными данным о длинах $\pi\pi$ -рассеяния. Легкие скалярные мезоны также рассмотрены в ковариантной модели конституентных кварков, в которой взаимодействие мезонов с кварками является нелокальным. В рамках этой модели исследованы случаи взаимодействия с двухкварковым и четырехкварковым током. Показано, что формфактор распада $S \rightarrow PP$ в обеих схемах имеет правильное поведение. Это свидетельствует о том, что скалярные мезоны могут быть описаны и как двухкварковые, и как четырехкварковые состояния.

Ключевые слова: низкоэнергетические взаимодействия; кварковые модели; скалярные мезоны.

DESCRIPTION OF SCALAR MESONS AS TWO AND FOUR QUARK STATES

E. Z. AVAKYAN^a, S. L. AVAKYAN^a

^aSukhoi State Technical University of Gomel,
48 Kastychnika Avenue, Gomel 246746, Belarus

Corresponding author: E. Z. Avakyan (mikot@tut.by)

Light scalar mesons were studied in the framework of quark models. It is shown that, in the Quark Confinement Model (QCM), the description of these mesons requires the introduction of an additional term with the derivative in the Lagrangian of interaction. The parameters of the additional interaction were obtained, the mass of the $f_0(600)$ meson ($m_{f_0(600)} = 500–515$) was fitted from experimental data on the lengths of $\pi\pi$ scattering. Light scalar mesons were also considered in the Confined Covariant Quark Model (CCQM), in which the interaction of a meson with quarks is non-local. In the framework of the CCQM, interactions with two-quark and four-quark currents were considered. It is shown that the $S \rightarrow PP$ decay form factor has the correct behavior in both schemes. This suggests that scalar mesons can be described as both two-quark and four-quark states.

Key words: low energy interactions; quark models; scalar mesons.

Образец цитирования:

Авакян ЕЗ, Авакян СЛ. Описание скалярных мезонов как двух- и четырехкварковых состояний. *Журнал Белорусского государственного университета. Физика.* 2019;1:72–87.

For citation:

Avakyan EZ, Avakyan SL. Description of scalar mesons as two and four quark states. *Journal of the Belarusian State University. Physics.* 2019;1:72–87. Russian.

Авторы:

Елена Зиновьевна Авакян – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры высшей математики факультета автоматизированных и информационных систем.
Сергей Левонич Авакян – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры высшей математики факультета автоматизированных и информационных систем.

Authors:

Elena Z. Avakyan, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of higher mathematics, faculty of automated and information systems.
mikot@tut.by
Sergey L. Avakyan, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of higher mathematics, faculty of automated and information systems.
avakyan@tut.by

Введение

Чтобы получить адекватное описание низкоэнергетической адронной физики, исходя из фундаментальных представлений КХД, на данный момент прилагаются значительные усилия. Основная трудность заключается в том, что теория возмущений КХД, основанная на асимптотической свободе, оказывается неприменимой при низких энергиях. Наряду с этим неясным остается вопрос адронизации, т. е. возникновения бесцветных адронов в результате кварк-глюонного взаимодействия, а также проблема конфайнмента, т. е. отсутствия кварков и глюонов в наблюдаемом спектре. Задача описания скалярных мезонов является одной из самых актуальных в современной физике элементарных частиц «до чарма» [1]. В первую очередь это относится к $f_0(600)$ – самой легкой из скалярных частиц, которая играет ключевую роль при описании нуклон-нуклонных взаимодействий, $\pi\pi$ -рассеяния и не-лептонных взаимодействий каонов. Со времени, когда в своей работе [2] П. Эстабрукс поставила вопрос: «Где он и что это такое – скалярный мезон?» (*Where and what are the scalar mesons?*), прошло около четырех десятилетий, и если мы знаем ответ на первую часть вопроса, то вторая остается актуальной до сих пор.

В отличие от векторных и тензорных резонансов идентификация скалярных состояний остается сложной задачей на протяжении всего времени их изучения. Основные экспериментальные данные о скалярных мезонах получены при изучении s -волн в двух частичных реакциях с псевдоскалярными мезонами; при исследовании спектров масс псевдоскалярных мезонов, рождающихся в реакциях типа $J/\Psi \rightarrow X + \pi\pi$, $\phi + \pi\pi$, $p\bar{p} \rightarrow K_S^0 K_S^0(\pi\pi)$; в экспериментах SND и CMD2, в реакции $e^+e^- \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma e^+e^- \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$ [1]. В табл. 1 приведены основные свойства скалярных мезонов из [3].

Таблица 1

Основные свойства скалярных мезонов

Table 1

The main properties of scalar mesons

Мезон	Масса, МэВ	Ширина, МэВ	Изоспин I	Странность S
$f_0(600), \sigma$	400–550	400–700	0	0
$K_0^*(800), \kappa$	682 ± 29	547 ± 24	$\frac{1}{2}$	± 1
$f_0(980)$	990 ± 20	40–100	0	0
$a_0(980)$	980 ± 20	50–100	1	0
$f_0(1370)$	1200–1500	200–500	0	0
$K_0^*(1430)$	1425 ± 50	270 ± 80	$\frac{1}{2}$	± 1
$a_0(1450)$	1474 ± 19	265 ± 13	0	0
$f_0(1500)$	1505 ± 6	109 ± 7	1	0
$f_0(1700)$	1720 ± 6	135 ± 8	0	0

С теоретической точки зрения проблема скалярных мезонов состоит в том, что до сих пор не ясна их внутренняя структура. Есть модели, рассматривающие скалярные мезоны $0^{(++)}$ как двухкварковые состояния ($q\bar{q}$) [4; 5]. В отличие от псевдоскалярных, векторных, аксиально-векторных и тензорных мезонов, описание которых полностью согласуется с наивной двухкварковой моделью [6; 7], скалярные частицы не укладываются в указанную схему. Из табл. 1 следует, что скалярные мезоны образуют два нонета, изображенных на рис. 1, из которого видно, что в нонете легких скалярных мезонов нарушена массовая иерархия, т. е. массы частиц, содержащих странный кварк, меньше, чем массы нестранных частиц.

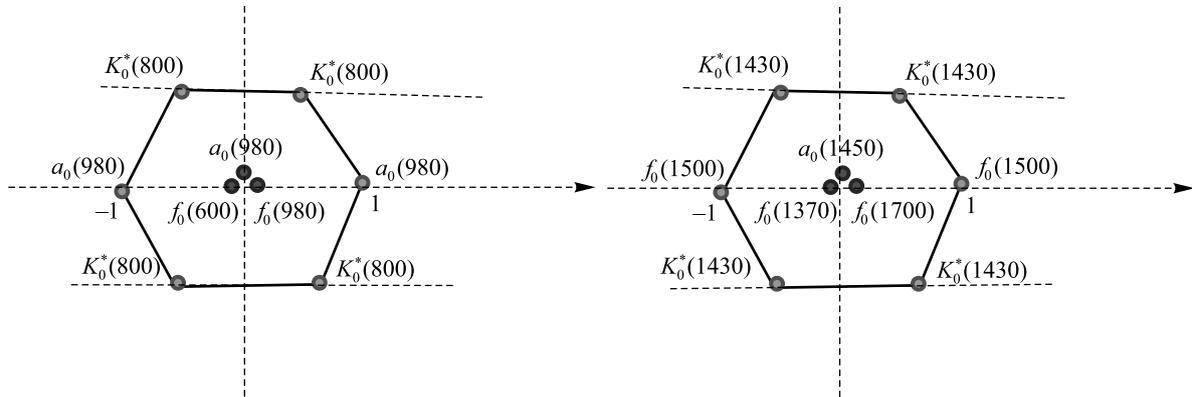


Рис. 1. Нонеты скалярных мезонов.
 По горизонтальной оси отложен изоспин, по вертикальной – странность
 Fig. 1. The nonets of scalars.
 Isospin is plotted on the horizontal axis, strangeness – on the vertical one

В ряде подходов скалярные мезоны рассматриваются как четырехкварковые системы $(qq\bar{q}\bar{q})$ [8; 9]. В этом случае легкие нестранные нейтральные скаляры имеют следующий состав:

$$f_0(600) \Rightarrow u\bar{u}d\bar{d},$$

$$f_0(980) \Rightarrow s\bar{s} \frac{u\bar{u} + d\bar{d}}{\sqrt{2}} \cos \delta_s + u\bar{u}d\bar{d} \sin \delta_s,$$

$$a_0(980) \Rightarrow s\bar{s} \frac{u\bar{u} - d\bar{d}}{\sqrt{2}}.$$

Существуют также подходы, связывающие скалярные мезоны со скалярными глюониями, наличие которых предсказывается в рамках КХД [10].

В данной работе скалярные мезоны рассматриваются в рамках двух- и четырехкварковых схем. Для вычисления матричных элементов будем использовать модель конфайнмированных кварков (МКК), в рамках которой удалось описать широкий спектр низкоэнергетических мезонных взаимодействий [11], а также ковариантную модель конститuentных кварков (КМКК) [12], позволяющую описывать как двух-, так и четырехкварковые состояния.

Описание скалярных мезонов в двухкварковой схеме

В МКК [11] предполагается, что адронные поля возникают в результате интегрирования по глюонным и кварковым переменным в производящем функционале КХД. В результате получается лагранжиан взаимодействия адронов с кварками

$$L_M^i = \frac{g_M}{\sqrt{2}} M^i \bar{q}_m^a \Gamma_M \lambda^{mn} q_n^a, \quad (1)$$

где g_M – константы взаимодействия мезонов с кварками, которые определяются из условия связности; M^i – евклидовы поля, связанные с полями физических частиц (P, V, A); q_m^a – кварковые поля; Γ_M – матрицы Дирака; λ – матрицы Гелл-Манна; a – цветовой индекс.

Лагранжиан (1) хорошо описывает взаимодействия псевдоскалярных, векторных и аксиально-векторных мезонов. Однако, как будет показано ниже, взаимодействия скалярных мезонов требуют введения в лагранжиан дополнительного члена.

Будем рассматривать скалярные мезоны как двухкварковые состояния, описываемые лагранжианом

$$L_S^i = \frac{g_S}{\sqrt{2}} S^i \bar{q}_m^a \left(I - i \frac{H}{\Lambda} \tilde{\partial} \right) \lambda^{mn} q_n^a, \quad (2)$$

где H – неизвестный параметр; $\tilde{\partial} \equiv \tilde{\partial} - \partial$;

$$\lambda = \begin{cases} \text{diag}(1, -1, 0) \Rightarrow a_0(975) \\ \text{diag}(\cos \delta_s, \cos \delta_s, -\sqrt{2} \sin \delta_s) \Rightarrow f_0(600) \\ \text{diag}(-\sin \delta_s, -\sin \delta_s, -\sqrt{2} \cos \delta_s) \Rightarrow f_0(980). \end{cases}$$

Обсудим выбор вершины взаимодействия в более сложном, чем для остальных мезонов (псевдоскалярных, векторных и аксиально-векторных), виде. С этой целью рассмотрим диаграмму, описывающую распад $S \rightarrow PP$ (рис. 2).

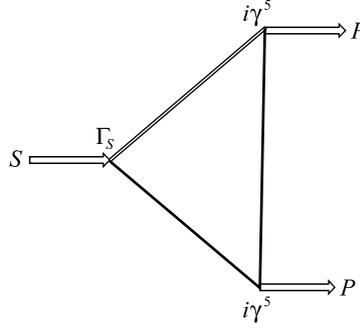


Рис. 2. Кварковая диаграмма, описывающая распад $S \rightarrow PP$ в двухкварковой модели
Fig. 2. Quark diagram describing the decay of $S \rightarrow PP$ in the two-quark model

Одно из основных предположений МКК состоит в том, что конфайнмент кварков обеспечивается наличием нетривиального глюонного вакуума. Предполагается, что усреднение по вакуумным глюонным полям \hat{B}_{VAC} кварковых диаграмм, генерируемых S -матрицей, должно обеспечивать конфайнмент кварков и делать теорию конечной. Анзац конфайнмента в МКК в случае однопетлевых кварковых диаграмм состоит в замене

$$\int d\sigma_{VAC} \text{Tr} \{ M(x_1) S(x_1, x_2 | B_{VAC}) \cdots M(x_n) S(x_n, x_2 | B_{VAC}) \} \rightarrow \\ \rightarrow \int d\sigma_v \text{Tr} \{ M(x_1) S_v(x_1 - x_2) \cdots M(x_n) S_v(x_n - x_1) \},$$

где

$$S_v(x_1 - x_2) = \int \frac{d^4 p}{i(2\pi)^4} e^{-ip(x_1 - x_2)} \frac{1}{v\Lambda_q - \hat{p}}.$$

Здесь параметр Λ_q характеризует размер области конфайнмента кварка с ароматом $q = u, d, s$. Мера интегрирования $d\sigma_v$ определена так, что

$$\int \frac{d\sigma_v}{v - \hat{z}} = G(z) = a(-z^2) + \hat{z}b(-z^2).$$

Функция $G(z)$ называется функцией конфайнмента. Она не зависит ни от цвета, ни от аромата кварков и представляет собой целую функцию, убывающую в евклидовой области быстрее любой степени z при $z^2 \rightarrow \infty$. Выбор функции $G(z)$, или, что то же самое, $a(-z^2)$ и $b(-z^2)$, является одним из модельных предположений. Будем использовать $a(-z^2)$ и $b(-z^2)$ в виде

$$\begin{aligned} a(u) &= a_0 e^{-u^2 - a_1 u}, \\ b(u) &= b_0 e^{-u^2 - b_1 u}. \end{aligned} \quad (3)$$

Параметры модели для нестранного сектора были зафиксированы фитированием по хорошо известным константам низкоэнергетической физики ($f_\pi, g_{\rho\gamma}, g_{\pi\gamma\gamma}, g_{\omega\pi\gamma}, g_{\rho\pi\pi}$):

$$\Lambda_u = \Lambda_d = 460 \text{ МэВ}; a_0 = b_0 = 2; a_1 = 0,5; b_1 = 0,2;$$

$$I_{SPP}(m_S^2) = I_0(m_S^2) - 4HI_1(m_S^2), \quad (4)$$

где

$$I_0(x) = \int_0^\infty du a(u) - \frac{x}{4\Lambda^2} \int_0^1 du a\left(-u \frac{x}{4\Lambda^2}\right) \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{1-u}}{1 - \sqrt{1-u}} - \sqrt{1-u} \right]; \quad (5)$$

$$I_1(x) = \int_0^\infty du ub(u) + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{4\Lambda^2} \right)^2 \int_0^1 du ub\left(-u \frac{x}{4\Lambda^2}\right) \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{1-u}}{1 - \sqrt{1-u}} - \sqrt{1-u} \right]. \quad (6)$$

Первое слагаемое в формуле (4) соответствует выбору лагранжиана взаимодействия в простейшем виде при $\Gamma_S = I$.

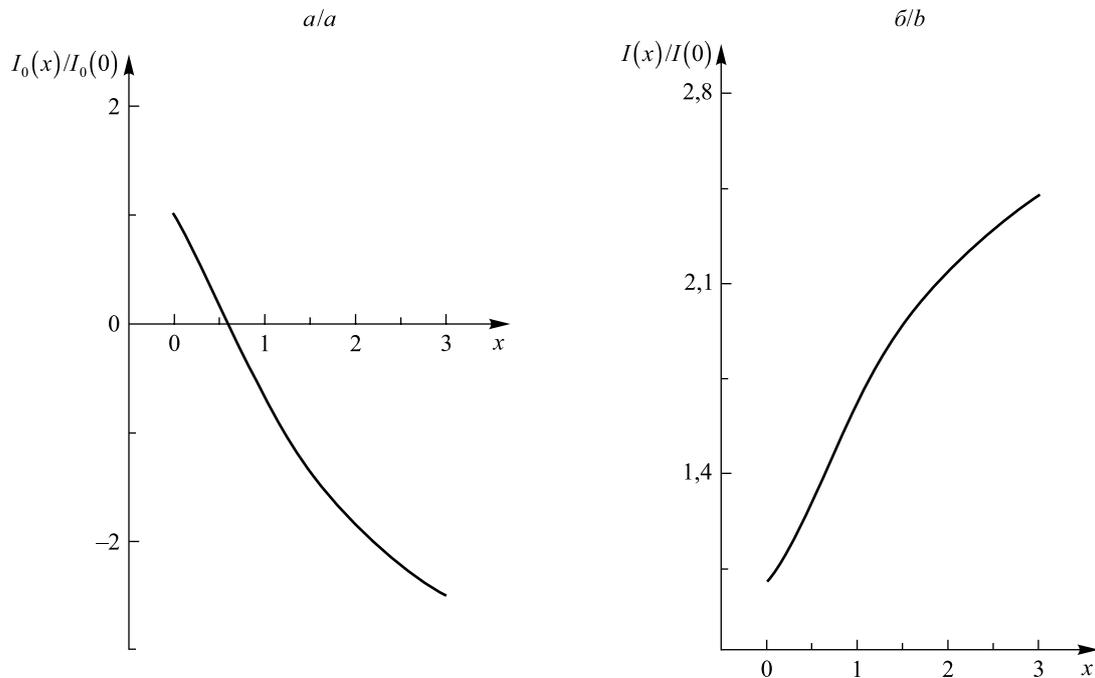


Рис. 3. Зависимость структурных интегралов, определяющих матричный элемент распада $S \rightarrow PP$, от массы скалярного мезона

Fig. 3. Dependence of structural integrals defining the matrix element of the decay $S \rightarrow PP$ on the mass of the scalar

На рис. 3, а, показана зависимость $\frac{I_0(x)}{I_0(0)}$ от масс скалярного мезона. Наличие знака «минус» в формуле (5) приводит к тому, что в случае простейшего лагранжиана структурный интеграл $I_{SPP}(m_S^2)$ обращается в нуль при $m_S \approx 1070$ МэВ, что, в свою очередь, приводит к значительно заниженному, по сравнению с экспериментальным, значению ширины распада $f_0 \rightarrow \pi\pi$. Полученный результат, по-видимому, свидетельствует в пользу более сложной структуры скалярных мезонов. Выбор вершины в виде (2) позволяет избежать обращения в нуль указанной величины. На рис. 3, б, приведена зависимость $\frac{I(x)}{I(0)}$ при $H = 0,25$.

Итак, одним из свободных параметров, входящих в лагранжиан взаимодействия скалярных мезонов с кварками, является параметр H . Еще один свободный параметр – угол смешивания скалярных мезонов δ_S .

За основу фитирования примем, во-первых, условие согласованности Адлера, состоящее в требовании обращения в нуль амплитуды $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$ в пределе $m_\pi \rightarrow 0$, и аналогичное ему требование обращения в нуль амплитуды $\pi^0\gamma \rightarrow \pi^0\gamma$; во-вторых, экспериментальное значение ширины распада $f_0 \rightarrow \pi\pi$.

В МКК условие Адлера получено в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^\infty du b(u) = 2\Lambda^2 \left[\int_0^\infty du a(u) - 4H \int_0^\infty du ub(u) \right]^2 h_f(H) D_f(0), \\ 5b(0) = -2\Lambda^2 \cos \delta_s (5 \cos \delta_s - \sqrt{2} \sin \delta_s) a(0) \times \\ \times h_f(H) D_f(0) \left[\int_0^\infty du a(u) - 4H \int_0^\infty du ub(u) \right], \end{array} \right. \quad (7)$$

где $a(u)$, $b(u)$ – функции конфайнмента, определенные формулами (3); h_f – эффективная константа взаимодействия мезона с кварками; $D_f(p^2)$ – пропагатор скалярного мезона, вычисленный в цепочном приближении.

Эффективная константа h_M взаимодействия мезона M с кварками связана с g_M , входящей в (1) и (2), соотношением

$$h_M = \frac{3g_M^2}{4\pi^2}.$$

Константы g_M определяются из условия связности:

$$Z_M = 1 - g_M^2 \Pi'_M(p^2) \Big|_{p_M^2 = m_M^2} = 0, \quad (8)$$

где $\Pi_M(p^2)$ – массовый оператор мезона. В силу (8) эффективная константа взаимодействия скалярного мезона с кварком $h_f(H)$ зависит от параметра H .

Для фитирования удобно использовать частное от деления выражений, входящих в (7), которое не зависит от массы мезона $f_0(600)$, и рассматривать равенство

$$R = - \frac{\int_0^\infty du a(u) - 4H \int_0^\infty du ub(u)}{\cos \delta_s (5 \cos \delta_s - \sqrt{2} \sin \delta_s) a(0) \int_0^\infty du b(u)} = 1 \quad (9)$$

в качестве одного из исходных для фитирования параметров H и δ_s .

Матричный элемент распада $S \rightarrow PP$ имеет вид

$$\begin{aligned} g_{SP_1 P_2}(m_s^2, m_{P_1}^2, m_{P_2}^2) &= \text{Tr} \lambda_S \{ \lambda_{P_1}, \lambda_{P_2} \} \times \\ &\times \Lambda \frac{\sqrt{h_{P_1} h_{P_2} h_S(H)}}{6} I_{SPP}(m_s^2, m_{P_1}^2, m_{P_2}^2). \end{aligned} \quad (10)$$

В случае распада $f_0 \rightarrow \pi\pi$ $\text{Tr} \lambda_S \{ \lambda_{P_1}, \lambda_{P_2} \} = 4 \sin \delta_s$; $h_S(H)$ – константа связи, вычисленная из условия связности; $I_{SPP}(m_s^2, m_{P_1}^2, m_{P_2}^2)$ – структурный интеграл, зависящий от H . Для фитирования будем использовать экспериментальное значение [13]. Наиболее близкими к единице параметры R и $\frac{g'_{SPP}}{g_{SPP}^{\text{exp}}}$ оказываются при

$$H = 0,54; \sin \delta_s = 0,3. \quad (11)$$

Массу промежуточного скалярного мезона будем определять, используя данные о длинах $\pi\pi$ -рассеяния. Матричный элемент рассеяния π -мезона на π -мезоне имеет вид

$$M_{\pi\pi}(s, t, u) = \delta^{ab} \delta^{cd} A(s, t, u) + \delta^{ac} \delta^{bd} A(t, u, s) + \delta^{ad} \delta^{bc} A(u, s, t),$$

где a, b, c, d – изотопические индексы.

Амплитуда $A(s, t, u)$ может быть записана как

$$A(s, t, u) = I_{\text{box}}^{\pi\pi}(s, t, u) + S^{\pi\pi}(s, t, u) + V^{\pi\pi}(s, t, u), \quad (12)$$

где $I_{\text{box}}^{\pi\pi}(s, t, u)$, $V^{\pi\pi}(s, t, u)$, $S^{\pi\pi}(s, t, u)$ – вклады диаграмм, приведенных на рис. 4, а, б, и в, соответственно.

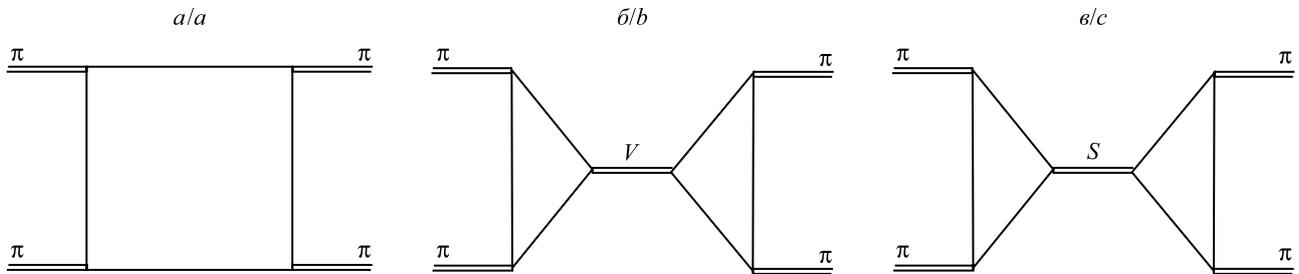


Рис. 4. Диаграммы, определяющие амплитуду $\pi\pi$ -рассеяния

Fig. 4. Diagrams defining the amplitude of $\pi\pi$ -scattering

В МКК нами получены следующие аналитические выражения для вкладов диаграммы с промежуточным и скалярными мезонами:

$$S^{\pi\pi}(s, t, u) = F_{S\pi\pi}^2(s) \left(\frac{\cos^2 \delta_s}{\Pi_s(s) - \Pi_s(m_1^2)} + \frac{\sin^2 \delta_s}{\Pi_s(s) - \Pi_s(m_2^2)} \right) + F_{S\pi\pi}^2(t) \left(\frac{\cos^2 \delta_s}{\Pi_s(t) - \Pi_s(m_1^2)} + \frac{\sin^2 \delta_s}{\Pi_s(t) - \Pi_s(m_2^2)} \right), \quad (13)$$

$$F_{S\pi\pi}(x) = F_{S\pi\pi}(x, m_\pi^2, m_\pi^2),$$

где m_1 – масса $f_0(600)$; m_2 – масса $f_0(980)$.

Рассеяние π -мезона на π -мезоне возможно по трем каналам $I = 0, 1, 2$. Амплитуды рассеяния по различным каналам T^I могут быть выражены через $A(s, t, u)$, $A(t, s, u)$, $A(u, t, s)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} T^0(s, t, u) &= 3A(s, t, u) + A(t, s, u) + A(u, t, s), \\ T^1(s, t, u) &= A(t, s, u) - A(u, s, t), \\ T^2(s, t, u) &= A(t, s, u) + A(u, s, t). \end{aligned} \quad (14)$$

В силу симметрии между конечными мезонами имеет место равенство $A(s, t, u) = A(s, u, t)$, поэтому отличными от нуля оказываются только $T^0(s, t, u)$ и $T^2(s, t, u)$.

Длины рассеяния a^I вычисляются по формуле

$$a^I = \frac{1}{32\pi} T^I(4m_\pi^2, 0, 0). \quad (15)$$

Экспериментальные значения для длин $\pi\pi$ -рассеяния a_0^0 и a_0^2 , полученные несколькими экспериментальными группами, приведены в табл. 2.

Согласно (11)–(15), длины рассеяния зависят от массы мезона $f_0(600)$ (рис. 5), значение которой в настоящее время неизвестно и интенсивно обсуждается в литературе. Оказалось, что для того, чтобы полученные численные значения длин $\pi\pi$ -рассеяния a_0^0 и a_0^2 не противоречили экспериментальным данным, масса промежуточного мезона $f_0(600)$ должна быть выбрана в диапазоне 500–515 МэВ.

Проведенное выше исследование показало, что адекватное описание взаимодействия скалярных мезонов в двухкварковой схеме требует введения дополнительного члена с производной в лагранжиан взаимодействия. Это может свидетельствовать о том, что взаимодействие скалярного мезона с парой кварков не является точечным.

Таблица 2

Экспериментальные данные о длинах $\pi\pi$ -рассеяния,
полученные в 1977 [14], 2003 [15], 2011 [16] годах

Table 2

Experimental data about $\pi\pi$ -scattering lengths
have been received in 1977 [14], 2003 [15], 2011 [16] years

Экспериментальная группа	$a_0^0 m_\pi^{-1}$	$a_0^2 m_\pi^{-1}$
Geneva-Saclay [14]	$0,26 \pm 0,05$	$-0,028 \pm 0,012$
E865 [15]	$0,216 \pm 0,033$	$-0,0454 \pm 0,0031$
NA48/2 [16]	$0,2210 \pm 0,0197$	$-0,0424 \pm 0,0044$

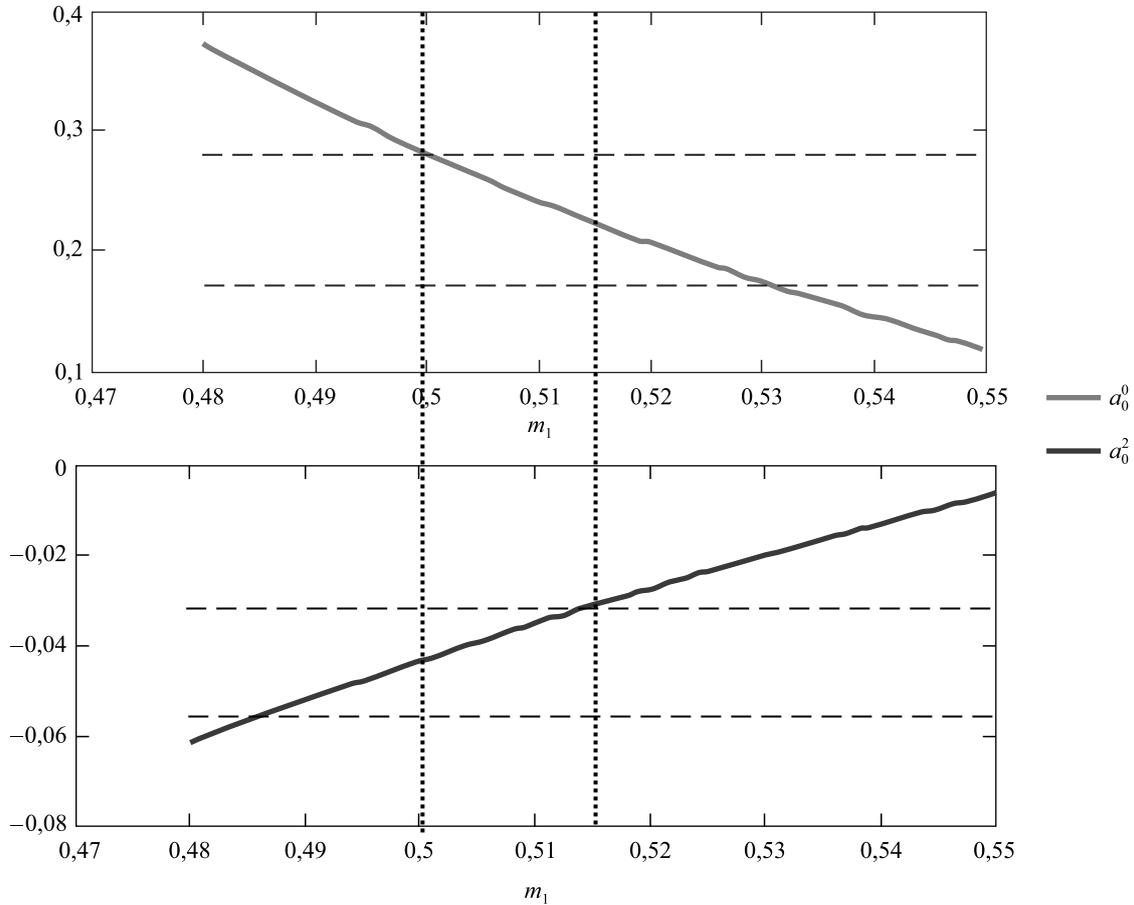


Рис. 5. Зависимости численных значений длин $\pi\pi$ -рассеяния a_0^0 и a_0^2 от массы m_1 мезона $f_0(600)$.
Пунктирными линиями обозначены экспериментальные границы значений a_0^0 и a_0^2

Fig. 5. Dependencies of the numerical values of the $\pi\pi$ -scattering lengths a_0^0 and a_0^2
on the mass m_1 the mass $f_0(600)$ of the meson. The dotted lines denote the experimental

Нелокальное взаимодействие мезонов с кварками может быть описано в КМКК [12]. Исследуем поведение формфактора распада $S \rightarrow PP$. Лагранжиан взаимодействия в данной модели имеет вид

$$L_{\text{int}}^{\text{st}}(x) = g_M M(x) \int dx_1 \int dx_2 F_M(x, x_1, x_2) \bar{q}_1(x_1) \lambda_M \Gamma_M q_2(x_2),$$

где $F_M(x, x_1, x_2)$ – вершинная функция, характеризующая конечные размеры мезона. В силу требования трансляционной инвариантности эта функция должна удовлетворять условию

$$F_M(x+a, x_1+a, x_2+a) = F_M(x, x_1, x_2)$$

для любого вектора a . Поэтому $F_M(x, x_1, x_2)$ может быть записана в виде

$$F_M(x, x_1, x_2) = \delta^4\left(x - \sum_{i=1}^2 w_i x_i\right) \Phi_M\left((x_1 - x_2)^2\right), \quad (16)$$

где $w_i = \frac{m_i}{m_1 + m_2}$, m_i – массы конститuentных кварков.

Показано, что функция Φ_M , входящая в (16), может быть выбрана в простейшем виде:

$$\Phi_M(-l^2) = \exp\left(-\frac{l^2}{\Lambda_M^2}\right), \quad (17)$$

где Λ_M^2 – параметр модели, характеризующий размер данного мезона.

Диаграмма, описывающая распад $S \rightarrow PP$ в КМКК, аналогична диаграмме, приведенной на рис. 2. Отличие состоит в том, что в вершинах взаимодействия появляются дополнительные формфакторы, имеющие представление (17).

Таким образом, формфактор распада $S \rightarrow PP$ можно записать так:

$$\begin{aligned} T_{SPP}(\hat{p}_{M_1}, \hat{p}_{M_2}, \hat{p}_{M_3}) &= 3g_S g_{P_1} g_{P_2} \times \\ &\times \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \Phi_S\left(-(k + w_{13} p_1)^2\right) \Phi_P\left(-(k - w_{23} p_3)^2\right) \Phi_P\left(-(k - w_{21} p_2)^2\right) \times \\ &\times \text{Tr}\left\{IS_{q_1}(\hat{k} + \hat{p}_1) i\gamma^5 S_{q_2}(\hat{k} + \hat{p}_2) i\gamma^5 S_{q_3}(\hat{k})\right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

В данной модели используются пропагаторы свободных кварков $S_q(\hat{k}) = \frac{1}{m_q - \hat{k} - im}$, которые в представлении Фока – Швингера имеют вид

$$S_q(\hat{k}) = \frac{1}{m_q - \hat{k}} = \frac{m_q + \hat{k}}{m_q^2 - k^2} = (m_q + \hat{k}) \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha(m_q^2 - k^2)}. \quad (19)$$

Тогда интеграл, входящий в (18), может быть преобразован к виду

$$\begin{aligned} &\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \text{Tr}\left\{(m_{q_1} + \hat{k} + \hat{p}_1) i\gamma^5 (m_{q_2} + \hat{k} + \hat{p}_2) i\gamma^5 (m_{q_3} + \hat{k})\right\} \times \\ &\times \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \int_0^\infty d\alpha_3 e^{\alpha(\alpha)k^2 + 2kr(\alpha, p) - z_0(\alpha, m_q, p)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Для вычисления интеграла (20) воспользуемся следующими тождественными преобразованиями:

$$\begin{aligned} k^\mu e^{ak^2 + 2kr + z_0} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r^\mu} e^{ak^2 + 2kr + z_0}, \\ k^\mu k^\nu e^{ak^2 + 2kr + z_0} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r^\mu} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r^\nu} e^{ak^2 + 2kr + z_0}. \end{aligned} \quad (21)$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\text{Tr}\left\{(m_{q_1} + \hat{k} + \hat{p}_1) i\gamma^5 (m_{q_2} + \hat{k} + \hat{p}_2) i\gamma^5 (m_{q_3} + \hat{k})\right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{Tr}\left\{\Gamma_{M_1}(m_{q_1} + \gamma^\mu) \Gamma_{M_2}(m_{q_2} + \gamma^\nu) \Gamma_{M_3}(m_{q_3} + \gamma^\sigma)\right\} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r^\mu} + w_1 p_1^\mu\right) \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r^\nu} + w_2 p_2^\nu\right) \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r^\sigma}\right) \end{aligned}$$

и (20) может быть переписан в форме

$$\int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \int_0^\infty d\alpha_3 \text{Tr} \left\{ \Gamma_{M_1}(m_{q_1} + \gamma^\mu) \Gamma_{M_2}(m_{q_2} + \gamma^\nu) \Gamma_{M_3}(m_{q_3} + \gamma^\sigma) \right\} \times \\ \times \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r^\mu} + w_1 p_1^\mu \right) \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r^\nu} + w_2 p_2^\nu \right) \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r^\sigma} \right) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} e^{a(\alpha)k^2 + 2kr(\alpha, p) - z_0(\alpha, m_q, p)}. \quad (22)$$

Вычислим интеграл по $d^4 k$:

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} e^{a(\alpha)k^2 + 2kr(\alpha, p) - z_0(\alpha, m_q, p)} = \left\{ k_0 = ik_4; k_E^2 \leq 0, p_E^2 \leq 0 \right\} = \frac{1}{a(\alpha)} e^{-\frac{r^2(\alpha, p)}{a(\alpha)} - z_0(\alpha, m_q, p)}. \quad (23)$$

Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial r^\mu} e^{-\frac{r^2}{a}} = e^{-\frac{r^2}{a}} \left(-\frac{2r^\mu}{a} + \frac{\partial}{\partial r^\mu} \right), \quad (24)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial r^\mu}, r^\nu \right] = g^{\mu\nu}.$$

Тогда искомый формфактор можно записать как

$$T_{SPP}(\hat{p}_{M_1}, \hat{p}_{M_2}, \hat{p}_{M_3}) = 3g_S g_{P_1} g_{P_2} \int_0^\infty d^3 \alpha F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),$$

где $F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – выражение, полученное с помощью (22)–(24).

Следует отметить, что любая диаграмма в КМКК представима в виде

$$G = \int_0^\infty d^n \alpha F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Интеграл по швингеровским параметрам может быть преобразован с помощью тождества

$$1 = \int_0^\infty dt \delta \left(t - \sum_{i=1}^n \alpha_i \right). \quad (25)$$

Сделаем замену переменных

$$G = \int_0^\infty d^n \alpha \int_0^\infty dt \delta \left(t - \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \{ \alpha_i = t\alpha_i \} = \\ = \int_0^\infty dt t^{n-1} \int_0^1 d^n \alpha \delta \left(1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) F(t\alpha_1, t\alpha_2, \dots, t\alpha_n). \quad (26)$$

Все пороговые особенности, имеющиеся в исходном интеграле, можно исключить с помощью обрезания на верхнем пределе:

$$\int_0^\infty dt \rightarrow \int_0^{1/\lambda^2} dt. \quad (27)$$

Окончательно получим

$$G^c = \int_0^{1/\lambda^2} dt t^{n-1} \int_0^1 d^n \alpha \delta \left(1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) F(t\alpha_1, t\alpha_2, \dots, t\alpha_n). \quad (28)$$

Входящий в (28) параметр λ – универсальный для данной модели. Параметрами модели также являются массы конституентных кварков. В [12] зафиксированы следующие значения:

$$\lambda = 0,181 \text{ ГэВ}, \\ m_u = m_d = 0,241 \text{ ГэВ}, \quad (29)$$

$$m_s = 0,428 \text{ ГэВ.}$$

Размерный параметр, характеризующий π -мезон, также зафиксирован в [12]: $\Lambda_\pi = 0,711 \text{ ГэВ}$. В случае распада $S \rightarrow PP$ соответствующий интеграл имеет вид

$$J_{SPP} = \int_0^{1/\Lambda^2} dt t^2 \int_0^1 d^3 \alpha \delta \left(1 - \sum_{i=1}^3 \alpha_i \right) F(t\alpha_1, t\alpha_2, t\alpha_3). \quad (30)$$

На рис. 6 приведена зависимость отношения $\frac{J_{SPP}(q)}{J_{SPP}(0)}$ от массы распадающегося скалярного мезона.

Оказалось, что исследуемый формфактор имеет правильное поведение с ростом массы. Это свидетельствует о нелокальном взаимодействии скалярных мезонов в двухкварковой схеме.

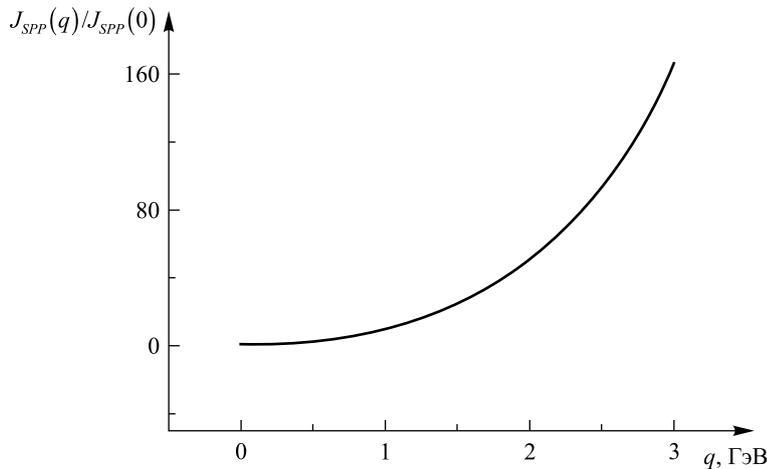


Рис. 6. Зависимость формфактора распада $S \rightarrow PP$ от массы скалярного мезона (нормированного к значению в 0)

Fig. 6. Dependence of the decay form factor $S \rightarrow PP$ on the mass of the scalar meson (normalized to a value at 0) obtained in the CCQM

Скалярные мезоны как четырехкварковые состояния

Четырехкварковые состояния в КМКК будем описывать кварковыми токами вида

$$J_M(x) = \int dx_1 \int dx_2 \int dx_3 \int dx_4 \delta \left(x - \sum_{i=1}^4 \varpi_i x_i \right) \Phi_M \left(\sum_{i<j} (x_i - x_j)^2 \right) \times \\ \times \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{abc} \varepsilon_{dec} \left\{ \left[q_a(x_4) C \Gamma_{M_1} q_b(x_1) \right] \left[\bar{q}_d(x_3) \Gamma_{M_2} C \bar{q}_c(x_2) \right] + \Gamma_{M_1} \leftrightarrow \Gamma_{M_2} \right\}, \quad (31)$$

где $\varpi_i = \frac{m_{q_i}}{\sum m_{q_i}}$; $C = \gamma^0 \gamma^2$, $C = C^\dagger = C^{-1} = -C^T$,

$$C \Gamma^T C^{-1} = \begin{cases} \Gamma & \text{для } S, P, A, \\ -\Gamma & \text{для } V, T. \end{cases}$$

В случае скалярных мезонов кварковый ток записывается в виде

$$J_{4q}(x_1, x_2, x_3, x_4) = g_M \varepsilon_{abc} \left[q_a^T(x_3) C \gamma^5 q_b(x_1) \right] \varepsilon_{dec} \left[\bar{q}_d(x_4) \gamma^5 C \bar{q}_e^T(x_2) \right], \quad (32)$$

а $\Phi_M \left(\sum_{i<j} (x_i - x_j)^2 \right)$ – по формуле (17).

Диаграмма, описывающая массовый оператор мезона, приведена на рис. 7.

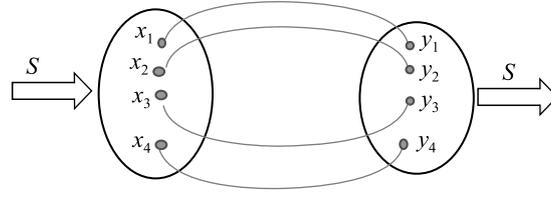


Рис. 7. Массовый оператор мезона в четырехкварковой схеме
Fig. 7. Meson mass operator in a four-quark scheme

Массовый оператор скалярного мезона имеет представление

$$\begin{aligned} \Pi(x-y) &= ig_M^2 \int dx_1 \cdots \int dx_4 \delta(x - \sum x_i \varpi_i) \Phi \left(\sum_{i < j} (x_i - x_j)^2 \right) \times \\ &\times \int dy_1 \cdots \int dy_4 \delta(y - \sum y_i \varpi_i) \Phi \left(\sum_{i < j} (y_i - y_j)^2 \right) \times \\ &\times \langle 0 | T \{ J_q(x_1, \dots, x_4) J_q(y_1, \dots, y_4) \} | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (33)$$

После введения переменных Якоби

$$x_i = x + \sum_{j=1}^3 w_{ij} \rho_j^x, \quad y_i = y + \sum_{j=1}^3 w_{ij} \rho_j^y$$

выражение (33) преобразуется к виду

$$\Pi(x-y) = ig_M^2 \int d^3 \vec{\rho}_x \Phi(\vec{\rho}_x^2) \int d^3 \vec{\rho}_y \Phi(\vec{\rho}_y^2) \langle 0 | T \{ J_q(x_1, \dots, x_4) J_q(y_1, \dots, y_4) \} | 0 \rangle.$$

Переходя в p -представление, получим

$$\tilde{\Pi}(p, p') = \int dx e^{-ipx} \int dy e^{-p'y} \Pi(x-y) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p-p') \tilde{\Pi}(p^2), \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}(p^2) &= 12g_M^2 \prod_{i=1}^3 \int \left[\frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \right] \tilde{\Phi}^2(-\tilde{\omega}^2) \text{Tr} \{ \gamma^5 S_1(k_1 - w_1 p) \gamma^5 S_3(k_3 + w_3 p) \} \times \\ &\times \text{Tr} \{ \gamma^5 S_2(k_2 - w_2 p) \gamma^5 S_4(k_1 + k_2 - k_3 + w_4 p) \}, \end{aligned} \quad (35)$$

где $\tilde{\omega}^2 = \frac{1}{2} [k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_1 k_2 - k_1 k_3 - k_2 k_3]$.

Для вычисления константы взаимодействия g_M^2 воспользуемся условием (8). При этом необходимо найти производную от массового оператора (34), (35):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp^2} \tilde{\Pi}(p, p') &= \frac{1}{2p^2} p^\alpha \frac{\partial}{\partial p^\alpha} \tilde{\Pi}(p, p'), \\ \frac{d}{dp^2} \tilde{\Pi}(p, p') &= \frac{1}{2p^2} 12g_M^2 \prod_{i=1}^3 \left[\frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \right] \tilde{\Phi}^2(-\tilde{\omega}^2) \cdot \{ \dots \}, \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned} \{ \dots \} &= -w_1 \text{Tr} \{ \gamma^5 S_1(k_1 - w_1 p) \hat{p} S_1(k_1 - w_1 p) \gamma^5 S_3(k_3 + w_3 p) \} \times \\ &\times \text{Tr} \{ \gamma^5 S_2(k_2 - w_2 p) \gamma^5 S_4(k_1 + k_2 - k_3 + w_4 p) \} + \\ &+ w_3 \text{Tr} \{ \gamma^5 S_1(k_1 - w_1 p) \gamma^5 S_3(k_3 + w_3 p) \hat{p} S_3(k_3 + w_3 p) \} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \text{Tr} \left\{ \gamma^5 S_2(k_2 - w_2 p) \gamma^5 S_4(k_1 + k_2 - k_3 + w_4 p) \right\} - \\ & - w_2 \text{Tr} \left\{ \gamma^5 S_1(k_1 - w_1 p) \gamma^5 S_3(k_3 + w_3 p) \right\} \times \\ & \times \text{Tr} \left\{ \gamma^5 S_2(k_2 - w_2 p) \hat{p} S_2(k_2 - w_2 p) \gamma^5 S_4(k_1 + k_2 - k_3 + w_4 p) \right\} - \\ & - w_4 \text{Tr} \left\{ \gamma^5 S_1(k_1 - w_1 p) \gamma^5 S_3(k_3 + w_3 p) \right\} \times \\ & \times \text{Tr} \left\{ \gamma^5 S_2(k_2 - w_2 p) \gamma^5 S_4(k_1 + k_2 - k_3 + w_4 p) \hat{p} S_4(k_1 + k_2 - k_3 + w_4 p) \right\}. \end{aligned} \quad (37)$$

Используя представление (19), получим

$$\begin{aligned} S_1(k_1 - w_1 p) \hat{p} S_1(k_1 - w_1 p) &= \frac{(m_1 + k_1 - w_1 p) \hat{p} (m_1 + k_1 - w_1 p)}{(m_1^2 - (k_1 - w_1 p)^2)^2} = \\ &= (m_1 + k_1 - w_1 p) \hat{p} (m_1 + k_1 - w_1 p) \int_0^\infty d\alpha_1 \alpha_1 e^{-\alpha_1 [m_1^2 - (k_1 - w_1 p)^2]}. \end{aligned} \quad (38)$$

Таким образом,

$$\tilde{\Pi}'(p^2) = 12 g_M^2 \prod_{j=1}^4 \int_0^\infty d\alpha_j \prod_{i=1}^3 \left[\frac{d^4 k_i}{(2\pi)^4 i} \right] \text{num} \{ k_i, \alpha_j \} e^z, \quad (39)$$

где $\text{num} \{ k_i, \alpha_j \}$ – выражение, полученное из (37) с учетом (38); $z = kak + 2kr + z_0$, $k = \{ k_1, k_2, k_3 \}$ – 3-вектор, $a = a(\alpha)$ – матрица 3×3 , $r_i = b_i(\alpha, w) p_i$, $z_0 = z_0(p^2, w, m_q, \alpha)$.

Для проведения дальнейших вычислений воспользуемся равенствами (21). Тогда

$$\text{num} \{ k_i, \alpha_j \} e^z = \text{num} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r^i}, \alpha_j \right\} e^z$$

и (39) можно переписать в виде

$$\tilde{\Pi}'(p^2) = 12 g_M^2 \prod_{j=1}^4 \int_0^\infty d\alpha_j \text{num} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r^i}, \alpha_j \right\} \prod_{i=1}^3 \left[\frac{d^4 k_i}{(2\pi)^4 i} \right] e^z. \quad (40)$$

Выполним интегрирование по k_i в (40):

$$\prod_{i=1}^3 \left[\frac{d^4 k_i}{(2\pi)^4 i} \right] e^{kak + 2kr + z_0} = \frac{1}{(4\pi)^6} \frac{1}{|a|^2} e^{-ra^{-1}r + z_0}. \quad (41)$$

Воспользовавшись правилами коммутации, аналогичными (24),

$$\begin{aligned} \text{num} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r_i}, \alpha_j \right\} e^{-ra^{-1}r + z_0} &= e^{-ra^{-1}r + z_0} \text{num} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r_i} - (a^{-1}r)_i, \alpha_j \right\}, \\ \frac{\partial}{\partial r_i^\alpha} r_j^\beta &= \delta_{ij} g^{\alpha\beta} + r_j^\beta \frac{\partial}{\partial r_i^\alpha}, \end{aligned} \quad (42)$$

получим

$$\tilde{\Pi}'(p^2) = \frac{12}{(4\pi)^6} g_M^2 \prod_{j=1}^4 \int_0^\infty d\alpha_j \frac{1}{|a|^2} e^{-ra^{-1}r + z_0} \text{num} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r_i} - (a^{-1}r)_i, \alpha_j \right\}. \quad (43)$$

Преобразуем (43) по формулам (25)–(27). Окончательно имеем

$$\tilde{\Pi}'(p^2) = \frac{12}{(4\pi)^6} g_M^2 \int_0^{1/n^2} dt t^3 \int_0^1 d^4 \alpha \delta \left(1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \frac{1}{|a|^2} e^{-ra^{-1}r + z_0} \text{num} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r_i} - (a^{-1}r)_i, t \alpha_j \right\}. \quad (44)$$

Диаграммы, описывающие распад $S \rightarrow PP$, приведены на рис. 8.

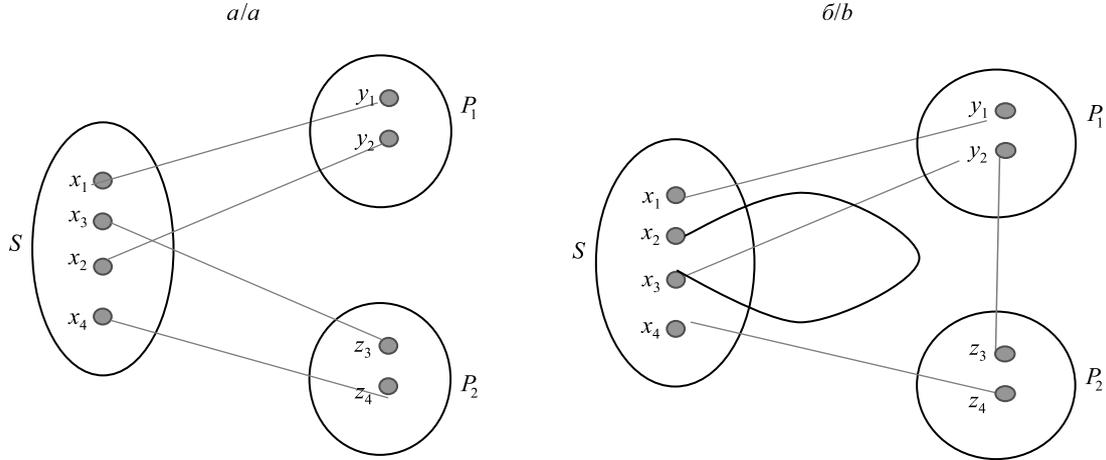


Рис. 8. Кварковые диаграммы, описывающие распад $S \rightarrow PP$ в четырехкварковой схеме
Fig. 8. Quark diagrams describing the decay of $S \rightarrow PP$ in a four-quark scheme

Матричный элемент, соответствующий диаграмме, приведенной на рис. 8, а, имеет вид

$$\begin{aligned}
 M(p, q_1, q_2) = & -6ig_S g_{P_1} g_{P_2} \times \\
 & \times \prod_{i=1}^3 \int \frac{d\omega_i}{(2\pi)^4} \Phi_S(-\bar{\omega}^2) \int \frac{dl_1}{(2\pi)^4} \Phi_{P_1}(-l_1^2) \int \frac{dl_2}{(2\pi)^4} \int \frac{dl_2}{(2\pi)^4} \Phi_{P_2}(-l_2^2) \times \\
 & \times \prod_{j=1}^4 \int \frac{dk_j}{(2\pi)^4} \text{Tr} \{ \gamma_5 S_1(k_1) \gamma_5 S_2(k_2) \gamma_5 S_4(k_4) \gamma_5 S_3(k_3) \} \times \\
 & \times \int d\rho_1 \int d\rho_2 \int d\rho_3 \int dy_1 \int dy_2 \int dz_1 \int dz_2 \delta \left(y - \sum_{i=1}^2 v_i y_i \right) \delta \left(z - \sum_{i=3}^4 u_i z_i \right) \times \\
 & \times \exp \left\{ -ipx + iq_1 y + iq_2 z - i\bar{\rho}\bar{\omega} - il_1(y_1 - y_2) - il_2(z_3 - z_4) - ik_1(x_1 - y_1) - \right. \\
 & \left. - ik_2(y_2 - x_2) - ik_3(z_3 - x_3) - ik_4(x_4 - z_4) \right\}, \tag{45}
 \end{aligned}$$

где

$$\omega_i = \frac{m_i}{\sum_{i=1}^4 m_i}, \quad v_i = \frac{m_i}{m_1 + m_2}, \quad u_i = \frac{m_i}{m_3 + m_4}.$$

После перехода к переменным Якоби

$$x_i = x + \sum_{j=1}^3 w_{ij} \rho_j, \quad w_{ij} = \frac{m_i}{m_i + m_j}, \quad y = v_1 y_1 + v_2 y_2, \quad z = u_3 z_3 + u_4 z_4$$

и некоторых алгебраических преобразований (45) может быть записан в виде

$$M(p, q_1, q_2) = i(2\pi)^4 \delta(p - q_1 - q_2) T(p^2, q_1^2, q_2^2),$$

где

$$\begin{aligned}
 T(p^2, q_1^2, q_2^2) = & -6g_S g_{P_1} g_{P_2} \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \tilde{\Phi}_S(-\bar{\omega}^2) \tilde{\Phi}_{P_1}(-(k_1 + v_1 q_1)^2) \times \\
 & \times \tilde{\Phi}_{P_2}(-(k_2 + u_4 q_2)^2) \text{Tr} \{ \gamma_5 S_1(k_1) \gamma_5 S_2(k_1 + q_1) \gamma_5 S_4(k_2) \gamma_5 S_3(k_2 + q_2) \}, \tag{46}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_1 &= -\frac{1}{2\sqrt{2}}(2k_1 + (1 + w_1 - w_2)q_1 + (w_1 - w_2)q_2), \\ \omega_2 &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(2k_2 - (w_3 - w_4)q_1 + (1 - w_3 + w_4)q_2), \\ \omega_3 &= \frac{1}{2}((w_3 + w_4)q_1 - (w_1 + w_2)q_2).\end{aligned}$$

Перепишем (46), используя представление (19) для кварковых пропагаторов:

$$T(p^2, q_1^2, q_2^2) = -6g_S g_{P_1} g_{P_2} \prod_{i=1}^4 \int_0^\infty d\alpha_i \prod_{j=1}^2 \int \frac{d^4 k_j}{(2\pi)^4} num[k] e^z, \quad (47)$$

где $num[k] = \text{Tr} \{ \gamma_5(m_1 + k_1) \gamma_5(m_2 + k_1 + q_1) \gamma_5(m_4 + k_2) \gamma_5(m_3 + k_2 + q_2) \}$; $z = kak + 2kr + z_0 a = a(\alpha)$ – матрица 2×2 , $z_0 = z_0(p^2, w, m_q, \alpha)$, r – вектор: $r_1 = b_{11}q_1 + b_{12}q_2$, $r_2 = b_{21}q_1 + b_{22}q_2$.

Применяя (25)–(28), из (47) получим

$$\begin{aligned}T(p^2, q_1^2, q_2^2) &= -\frac{6g_S g_{P_1} g_{P_2}}{(4\pi)^4} \int_0^{1/\lambda^2} dt t^3 \int_0^1 d^4 \alpha \delta\left(1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i\right) \frac{1}{|a|^2} e^{-ra^{-1}r + z_0} \times \\ &\times num\left\{\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r_i} - (a^{-1}r)_i\right\}.\end{aligned} \quad (48)$$

Алгебраические преобразования, необходимые для вычислений по формулам (44) и (48), были проведены с помощью пакета *FORM*.

Как видно из рис. 9, формфактор, полученный в четырехкварковой схеме, имеет правильное поведение. Это свидетельствует о том, что скалярные мезоны могут быть описаны как четырехкварковые состояния.

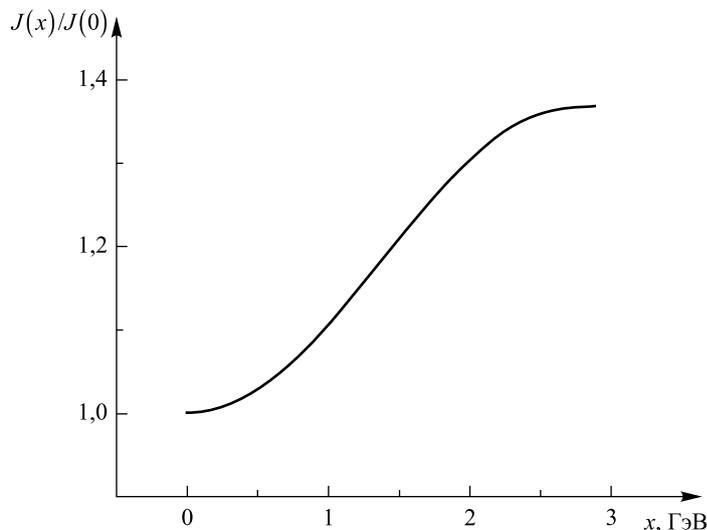


Рис. 9. Зависимость формфактора распада $S \rightarrow PP$ от массы распадающегося скалярного мезона

Fig. 9. The dependence of the decay form factor $S \rightarrow PP$ on the mass of the decaying scalar meson

Анализ экспериментальных данных о ширинах распадов скалярных мезонов позволяет оценить значение параметра Λ в диапазоне 800–950 МэВ.

Библиографические ссылки / References

1. Amsler C. Note on scalar mesons below 2 GeV. *Chinese Physics C*. 2016;40(10):100001.
2. Estabrooks P. Where and what are the scalar mesons? *Physics Review D*. 1979;19:2678.
3. Tanabashi M, Hagiwara K, Hikasa K, Nakamura K, Sumino Y, Takahashi F, et al. [collaboration]. Review of particle physics. *Physical Review D*. 2018;98:030001. DOI: 10.1103/PhysRevD.98.030001.
4. Boglione M, Pennington MR. Dynamical generation of scalar mesons. *Physical Review D*. 2002;65:114010. DOI: 10.1103/PhysRevD.65.114010.
5. Tornqvist NA. Understanding the scalar meson q anti- q nonet. *Zeitschrift für Physik C*. 1995;68:647–660. DOI: 10.1007/BF01565264.
6. Gell-Mann M. A schematic model of baryons and mesons. *Physics Letters*. 1964;8:214–215. DOI: 10.1016/S0031-9163(64)92001-3.
7. Zweig G. An $Su(3)$ model for strong interaction symmetry and its breaking. Version 2. In: Lichtenberg D, Rosen S, editors. *Developments in the Quark Theory of Hadrons. Volume 1*. Nonantum: Hadronic Press; 1980. p. 22–101.
8. t'Hooft G, Isidori G, Maiani L, Polosa AD, Riquer V. A theory of scalar mesons. *Physics Letters B*. 2008;662(5):424–430. DOI: 10.1016/j.physletb.2008.03.036.
9. Alford M, Jaffe RL. Insight into the scalar mesons from a lattice calculation. *Nuclear Physics B*. 2000;578(1–2):367–382. DOI: 10.1016/S0550-3213(00)00155-3.
10. Kaminski R, Mennessier G, Narison S. Gluonium nature of the $\sigma/f(0)(600)$ from its coupling to K anti- K . *Physics Letters B*. 2009;680:148–153.
11. Efimov GV, Ivanov MA. *The Quark Confinement Model of Hadrons*. London: Taylor & Francis Group; 1993. 177 p.
12. Brantz T, Faessler A, Gutsche T, Ivanov MA, Korner JG, Lyubovitskij VE. Relativistic constituent quark model with infrared confinement. *Physical Review D*. 2010;81:034010. DOI: 10.1103/PhysRevD.81.034010.
13. Hagiwara K. [None Particle Data Group]. Review of Particle Properties. *Physical Review D*. 2002;66(1):010001. DOI: 10.1103/PhysRevD.66.010001.
14. Rosselet L, Extermann P, Fischer J, Guisan O, Mermod R, Sachot R, et al. Experimental study of 30,000 $K(e4)$ decays. *Physical Review D*. 1977;15(3):574–586. DOI: 10.1103/PhysRevD.15.574.
15. Pislak S, Appel R, Atoyan GS, Bassalleck B, Bergman DR, Cheung N, et al. High statistics measurement of K_4 decay properties. *Physical Review D*. 2003;67(7):072004. DOI: 10.1103/PhysRevD.67.072004.
16. Bizzeti A. Precision measurements of $\pi\pi$ scattering lengths at NA48/2. *AIP Conference Proceedings*. 2011;1374(1):639–642. DOI: 10.1063/1.3647221.

Статья поступила в редколлегию 27.11.2018.
Received by editorial board 27.11.2018.

УДК 539.122.04:51-76:51-73

ДОЗОВЫЕ КОНВЕРСИОННЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ДЛЯ ВНЕШНЕГО ФОТОННОГО ОБЛУЧЕНИЯ

К. О. МАКАРЕВИЧ¹⁾, В. Ф. МИНЕНКО²⁾, С. А. КУТЕНЬ²⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

²⁾Институт ядерных проблем БГУ, ул. Бобруйская, 11, 220030, г. Минск, Беларусь

Представлен алгоритм расчета дозовых конверсионных коэффициентов на основе Монте-Карло моделирования транспорта фотонного излучения в вычислительных фантомах тела человека. Алгоритм реализован в виде программ *DosesMale* и *DosesFemale* для мужского и женского организмов на основе референтных воксельных фантомов мужчины и женщины. В целях проверки данных программ с их помощью были определены конверсионные коэффициенты «флюенс-поглощенная доза» и «флюенс-эффективная доза» для облучения фантомов широким однонаправленным моноэнергетическим пучком фотонного излучения в четырех проекциях (передне-задней, задне-передней, левой боковой и правой боковой). Рассчитанные значения указанных коэффициентов сравнивались с референтными, представленными Международной комиссией по радиологической защите (для внешнего фотонного облучения всего тела). Для большинства критических органов и тканей конверсионные коэффициенты «флюенс-поглощенная доза» хорошо согласовывались с референтными величинами (относительная разница не превышала 3–5 %). Только по нескольким органам (молочная железа мужского фантома, пищевод и «остальные ткани» женского фантома) наблюдались значительные различия (выше 7 %). Максимальная относительная разница между рассчитанными и референтными значениями конверсионных коэффициентов «флюенс-эффективная доза»

Образец цитирования:

Макаревич КО, Миненко ВФ, Кутень СА. Дозовые конверсионные коэффициенты для внешнего фотонного облучения. *Журнал Белорусского государственного университета. Физика*. 2019;1:88–96.

For citation:

Makarevich KO, Minenko VF, Kuten SA. Dose conversion coefficients for external photon irradiation. *Journal of the Belarusian State University. Physics*. 2019;1:88–96. Russian.

Авторы:

Кристина Олеговна Макаревич – аспирант кафедры ядерной физики физического факультета. Научный руководитель – С. А. Кутень.

Виктор Федорович Миненко – кандидат биологических наук; ведущий научный сотрудник лаборатории теоретической физики и моделирования ядерных процессов.

Семён Адамович Кутень – кандидат физико-математических наук; заведующий лабораторией теоретической физики и моделирования ядерных процессов.

Authors:

Kristina O. Makarevich, postgraduate student at the department of nuclear physics, faculty of physics.

kristinanevdokh@tut.by

Victor F. Minenko, PhD (biology); leading researcher at the laboratory of theoretical physics and simulation of nuclear processes.

vminenko@list.ru

Semen A. Kuten, PhD (physics and mathematics); head of the laboratory of theoretical physics and simulation of nuclear processes.

kut@inp.bsu.by

не превысила 3,5 %. С помощью программ *DosesMale* и *DosesFemale* определено около 700 дозовых конверсионных коэффициентов для дентальной рентгенографии, рентгенографии легких, кишечника, грудного, поясничного и пояснично-крестцового отделов позвоночника.

Ключевые слова: дозиметрия; метод Монте-Карло; фотонное облучение; референтные воксельные фантомы; дозовые конверсионные коэффициенты.

DOSE CONVERSION COEFFICIENTS FOR EXTERNAL PHOTON IRRADIATION

K. O. MAKAREVICH^a, V. F. MINENKO^b, S. A. KUTEN^b

^aBelarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

^bResearch Institute for Nuclear Problems, Belarusian State University,
11 Babrujskaja Street, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: K. O. Makarevich (*kristinanevdokh@tut.by*)

The algorithm for calculation of dose conversion coefficients based on Monte Carlo simulation of the photon radiation transport within the computational human phantoms presented. The algorithm was implemented as *DosesMale* and *DosesFemale* programs for organisms, starting from the reference male and female phantoms. In order to verify these programs, the «fluence-absorbed dose» and «fluence-effective dose» conversion coefficients were determined for situations of the reference phantoms exposure to a broad unidirectional energy-homogeneous beam of photon radiation in 4 projections: anterior-posterior, posterior-anterior, left lateral, and right lateral. The calculated conversion coefficients were compared with the reference values provided by the International Commission on Radiological Protection for external photon irradiation of the whole body. The «fluence-absorbed dose» conversion coefficients of the majority of critical organs and tissues were in a good agreement with the reference values (relative difference below 3–5 %). Only for some organs (mammary gland of the male phantom, esophagus and «remaining tissues» of the female phantom) significant discrepancies were observed (above 7 %). For the «fluence-effective dose» conversion coefficients, maximal relative differences between the calculated values and the reference values were not higher than 3.5 %. About 700 dose conversion coefficients were calculated with the help of *DosesMale* and *DosesFemale* programs for dental, lungs, intestinal, thoracic, lumbar, and lumbosacral radiography.

Key words: dosimetry; Monte Carlo method; photon irradiation; reference voxel phantoms; dose conversion coefficients.

Введение

По данным Научного комитета по действию атомной радиации, одна из причин роста средней дозовой нагрузки на население – медицинское облучение, включающее в себя диагностическую радиологию, ядерную медицину и радиотерапию [1]. Только для нужд диагностики ежегодно проводится около 3,6 млрд рентгеновских исследований, и это число постоянно увеличивается [1]. С учетом массовости рентгенодиагностических исследований работа по оценке дозовых нагрузок на пациентов и последующей оптимизации облучений является актуальной и имеет первостепенное значение.

Поскольку величину дозы невозможно напрямую измерить в теле пациента, возникает необходимость в оценке данной величины с помощью измеряемых параметров. Для этой цели используются дозовые конверсионные коэффициенты, связывающие такие величины, как поглощенные или эквивалентные дозы в органах и тканях, а также эффективную дозу с величинами, которые могут быть определены практически. В радиологии это может быть входная доза на один снимок, радиационный выход рентгеновского аппарата, произведение дозы на площадь и т. д.

Одним из наиболее предпочтительных способов оценки дозовых конверсионных коэффициентов является Монте-Карло моделирование процедур облучения с использованием антропоморфных вычислительных фантомов [2–4]. На базе результатов такого моделирования уже созданы программы (*WinODS*, *PCXMC*, *DoseCal*, *PRDC*) для оценки лучевых нагрузок на пациентов при рентгенодиагностике [4–7]. Однако часть этих программ разработана с использованием математических моделей тела человека, другие реализуют устаревший алгоритм расчета эффективной дозы, не соответствующий современной концепции [8]. Поэтому данные программные средства должны претерпеть соответствующие изменения либо вместо них должны быть разработаны новые средства. Реализуя последнее, Институт

ядерных проблем БГУ проводит исследование, направленное на разработку программного средства, которое позволит радиологам оценивать дозовые нагрузки на пациентов в стандартных процедурах рентгенодиагностики.

В настоящей работе представлен алгоритм расчета дозовых конверсионных коэффициентов облучения человека по результатам Монте-Карло моделирования транспорта фотонного излучения в референтных фантомах взрослых мужчины и женщины.

Материалы и методы

Дозовые конверсионные коэффициенты k связывают между собой измеряемые характеристики ψ поля или источника излучения и значения доз облучения ϕ :

$$k = \frac{\phi}{\psi},$$

где в качестве ϕ могут выступать поглощенная, эквивалентная либо эффективная дозы; в качестве ψ – флюенс частиц, радиационный выход рентгеновского излучателя, входная доза и т. д.

В случае медицинского диагностического рентгеновского облучения коэффициенты конверсии определенным образом зависят:

- от технических характеристик рентгеновской аппаратуры (напряжение на аноде рентгеновской трубки, размер фокального пятна, общая фильтрация, материал фильтра и др.);
- антропометрических характеристик пациента (относительное расположение внутренних органов, их масса и размеры и др.);
- геометрических характеристик рентгенологического исследования (область исследования, размеры и положение поля облучения и др.);
- дозиметрических характеристик рентгенологического исследования (входная доза, радиационный выход рентгеновского излучателя и экспозиция, падающая керма и др.).

В диапазоне энергий фотонов, относящемся к диагностической радиологии, размеры пациента сильно влияют на распределение поглощенной энергии внутри его тела [9]. Поэтому различия в строении тела у разных пациентов приводят к тому, что дозовые конверсионные коэффициенты представляют только дозовые нагрузки на органы и ткани фантома, используемого для моделирования, а не на органы и ткани реального пациента. Практическая применимость рассчитываемых коэффициентов во многом зависит от используемой модели тела человека.

В соответствии с рекомендациями Международной комиссии по радиологической защите (МКРЗ) для дозиметрических расчетов в работе использованы референтные воксельные фантомы [10]. Такой фантом представляет собой модель тела человека, помещенную в прямоугольный параллелепипед, разделенный на ячейки (воксели) одинакового размера. Каждой ячейке соответствует номер органа, которому она принадлежит, а каждому органу – свой материал (ткань), обозначающий содержимое этой ячейки. Фантомы МКРЗ содержат более 140 различных структур, состоящих из 50 типов тканей, для того чтобы максимально соответствовать стандартному индивиду [11]. Таким образом, дозовые коэффициенты, рассчитываемые для референтных фантомов, описывают дозовые нагрузки для стандартного человека.

Для расчета переноса фотонного излучения был использован метод Монте-Карло, реализованный в транспортном коде *MCNP* [12]. С его помощью определялись значения поглощенной энергии фотонов и электронов во всех вокселях органов и тканей, а также величина флюенса фотонов вне фантомов. Для фотонов в *MCNP* применяются стандартные библиотеки сечений для всех элементов с атомным номером от 1 до 94 [12]. Данные в таблицах взаимодействия фотонов позволяют учитывать когерентное и некогерентное рассеяние, фотоэффект. Угловое распределение рассеянных фотонов корректируется с помощью атомного формфактора и функций некогерентного рассеяния.

Результаты каждого Монте-Карло моделирования собирались в выходной файл, содержащий информацию о количестве энергии $\epsilon_{i,T,R}$ излучения типа R , поглощенной в i -м вокселе органа либо ткани типа T . Так как каждый воксель, принадлежащий одному и тому же органу (ткани) T , имеет одинаковую массу $m_{1,T}$, то для определения величины средней поглощенной дозы $\bar{D}_{T,R}$ в T от излучения R может быть использована формула

$$\bar{D}_{T,R} = \frac{\sum_{i=1}^n \epsilon_{i,T,R}}{N_T m_{1,T}}, \quad (1)$$

где n – количество вокселей органа (ткани) T , участвующих в моделировании; N_T – количество вокселей в T .

Значение поглощенной дозы, рассчитанное по формуле (1), является усредненным по достаточно большому объему ткани. Таким образом, предполагается, что при облучении в малых дозах поглощенная доза в отдельном органе или ткани может быть связана с радиационным риском от стохастических эффектов во всех частях этого органа или ткани [8].

Масса одного вокселя $m_{1,T}$ определялась как

$$m_{1,T} = \rho_T xyz, \quad (2)$$

где ρ_T – массовая плотность органа (ткани) T , представленная в [10]; x, y, z – геометрические размеры вокселя.

Так как размеры вокселя женского фантома составляют $0,1775 \times 0,1775 \times 0,484 \text{ см}^3$, а размеры вокселя мужского фантома – $0,2137 \times 0,2137 \times 0,8 \text{ см}^3$, то для достижения сопоставимых ошибок Монте-Карло моделирования количество разыгрываемых историй для женского фантома примерно в 2,4 раза превышало количество разыгрываемых историй для мужского фантома.

Формулы (1) и (2) не могут быть использованы для расчета поглощенной дозы в таких тканях, как красный костный мозг и эндост. Это связано с тем, что размеры областей с клетками данных тканей намного меньше размеров вокселя, поэтому в референтных фантомах не представлены воксели, относящиеся к красному костному мозгу и эндосту.

Реально красный костный мозг находится преимущественно в губчатой костной ткани ближе к поверхности кости. Эндост представляет собой тонкий слой (толщиной около 50 мкм [10]) соединительной ткани, выстилающий изнутри костную ткань трубчатых костей, а также внутреннюю поверхность медуллярных полостей длинных костей скелета.

В референтных фантомах МКРЗ скелет мужчины и женщины описывается вокселями, принадлежащими либо кортикальному костному слою, либо различным медуллярным полостям, либо разным типам трабекулярной губчатой ткани. В зависимости от типа кости массовая плотность и элементный состав губчатой ткани, а также медуллярной полости изменяются, что обусловлено различным процентным содержанием активного и неактивного костного мозга в губчатой ткани, а также желтого костного мозга и эндоста в медуллярных полостях костей скелета. Таким образом, учет наличия красного костного мозга и эндоста в костях фантомов проведен путем адаптации их плотностей и элементного состава к значениям для реальных костей стандартного человека, при этом воксели вышеупомянутых критических тканей в фантомах отсутствуют. Поэтому для расчета поглощенной дозы в данных тканях допускались следующие упрощения [10; 13]:

- клетки красного костного мозга равномерно распределены по объему губчатой костной ткани;
- клетки эндоста равномерно распределены по объему губчатой костной ткани и медуллярных полостей костей.

Таким образом, для оценки поглощенной дозы в клетках красного костного мозга и эндоста были использованы результаты расчета поглощенной энергии в вокселях, принадлежащих губчатой ткани и медуллярным полостям. Поглощенная доза в красном костном мозге $\bar{D}_{RBM,R}$ определялась по формуле

$$\bar{D}_{RBM,R} = \sum_{j=1}^K \frac{m(RBM)_j}{m(RBM)} \bar{D}_{j, \text{spong}, R},$$

где $m(RBM)_j$ – масса красного костного мозга, содержащегося в кости j ; $m(RBM)$ – масса красного костного мозга во всех костях; $\bar{D}_{j, \text{spong}, R}$ – средняя поглощенная доза излучения R , определенная по формуле (1) для губчатой ткани кости j ; K – количество костей, содержащих губчатую ткань.

Поглощенная доза в эндосте $\bar{D}_{\text{endost}, R}$ вычислялась по формуле

$$\bar{D}_{\text{endost}, R} = \sum_{j=1}^K \frac{m(\text{endost})_j}{m(\text{endost})} \bar{D}_{j, \text{spong}, R} + \sum_{p=1}^M \frac{m(\text{endost})_p}{m(\text{endost})} \bar{D}_{p, \text{medull}_\text{cav}, R},$$

где $m(\text{endost})_j$ – масса эндоста, содержащегося в губчатой ткани кости j ; $m(\text{endost})$ – масса эндоста во всех костях; $\bar{D}_{j, \text{spong}, R}$ – средняя поглощенная доза излучения R , определенная по формуле (1) для губчатой ткани кости j ; K – количество костей, содержащих губчатую ткань; $m(\text{endost})_p$ – масса эндоста, содержащегося в медуллярной полости кости p ; $\bar{D}_{p, \text{medull}_\text{cav}, R}$ – средняя поглощенная доза излучения R , определенная по формуле (1) для медуллярной полости кости p ; M – количество костей, содержащих медуллярную полость. Значения масс красного костного мозга и эндоста в различных костях приведены в описании референтных фантомов МКРЗ [10].

Эквивалентная доза H_T в органе (ткани) T численно равна сумме значений средней поглощенной дозы $\bar{D}_{T,R}$, так как взвешивающие коэффициенты w_R для фотонного излучения и для электронов равны 1:

$$H_T = \sum_{R=1}^2 w_R \bar{D}_{T,R}.$$

Эквивалентные дозы на органы и ткани категории «остальные» для условного мужчины H_{other}^M и условной женщины H_{other}^F рассчитываются согласно [8]:

$$H_{\text{other}}^M = \frac{1}{13} \sum_{T_{\text{other}}=1}^{13} H_{T_{\text{other}}}^M, \quad H_{\text{other}}^F = \frac{1}{13} \sum_{T_{\text{other}}=1}^{13} H_{T_{\text{other}}}^F,$$

где T_{other} – ткань категории «остальные» [8].

Согласно последним рекомендациям МКРЗ, расчет эффективной дозы должен проводиться по средним от сумм эквивалентных доз для органов или тканей условных мужчины и женщины [8]:

$$E = \sum_T w_T \left[\frac{H_T^M + H_T^F}{2} \right],$$

где w_T – взвешивающий коэффициент органа (ткани) типа T ; H_T^M – эквивалентная доза, оцененная для органа (ткани) T условного мужчины; H_T^F – эквивалентная доза, оцененная для органа (ткани) T условной женщины. Значения w_T , рекомендованные МКРЗ, представлены в [8].

Усредненная по полу эффективная доза E не может применяться для определения индивидуального риска человека, подвергшегося облучению. Главные цели использования величины E – перспективная оценка дозы для планирования и оптимизации защиты, а также ретроспективная оценка для подтверждения соблюдения пределов дозы или для сравнения ее с граничными значениями или референтными уровнями [8].

Результаты и их обсуждение

Алгоритм оценки дозовых конверсионных коэффициентов для органов и тканей мужского и женского фантомов был реализован в программах *DosesMale* и *DosesFemale* соответственно (рис. 1).

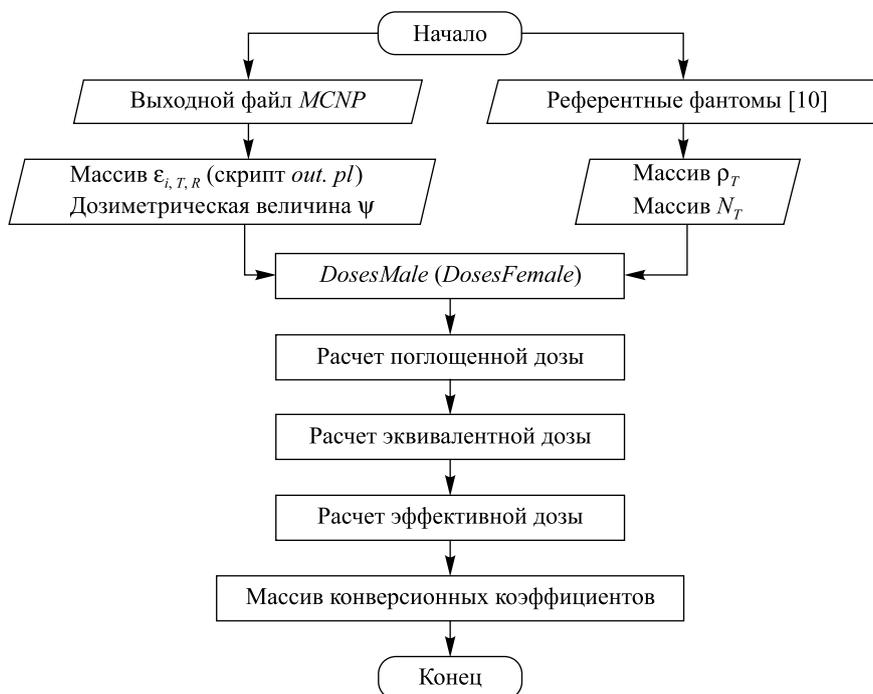


Рис. 1. Общая блок-схема программ *DosesMale* и *DosesFemale*
 Fig. 1. Flowchart of *DosesMale* and *DosesFemale*

Программы предназначены для расчета доз на органы и ткани при рентгенодиагностических исследованиях с использованием прямоугольных или круглых полей облучения. С их помощью получено около 700 дозовых конверсионных коэффициентов для рентгенографии легких, кишечника, грудного, поясничного и пояснично-крестцового отделов позвоночника, а также дентальных рентгенологических исследований в зависимости от размеров и формы поля облучения, расстояния от рентгеновского аппарата до пациента, области облучения и характеристик аппарата (анодное напряжение, пульсация напряжения, фильтрация излучения).

В целях верификации алгоритма, реализованного в *DosesMale* и *DosesFemale*, рассчитаны конверсионные коэффициенты «флюенс-поглощенная доза» и «флюенс-эффективная доза» для случаев идеализированного внешнего фотонного облучения, представленных в [13] для референтных фантомов мужчины и женщины. При этом было промоделировано облучение мужского и женского фантомов широким однонаправленным моноэнергетическим пучком фотонного излучения. Рассмотрены четыре проекции облучения: передне-задняя (AP), задне-передняя (PA), левая боковая (LLAT) и правая боковая (RLAT) (рис. 2).

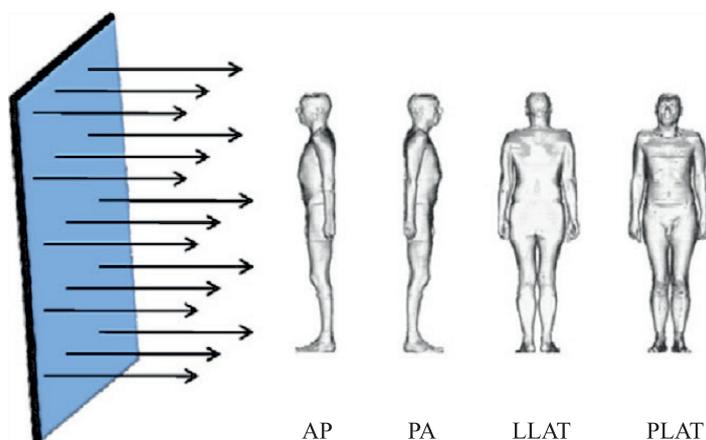


Рис. 2. Схематичное представление рассмотренных геометрий облучения [13]

Fig. 2. Schematic representation of considered irradiation geometries [13]

Конверсионные коэффициенты, рассчитанные при данных условиях, зависели только от энергии фотонов и проекции облучения. Таким образом была исключена зависимость конверсионных коэффициентов от геометрических характеристик исследования, когда даже небольшие отклонения в размере поля облучения или его положении могут приводить к существенным изменениям в значениях реализуемой дозы, особенно в малых по размеру органах, расположенных на границе поля облучения [9].

Дозовые конверсионные коэффициенты были определены со статистическими неопределенностями менее 0,5 % для крупных органов (легкие, сердце, печень и др.) и не более 3–5 % для небольших органов (надпочечники, медуллярные полости отдельных костей, молочные железы и др.).

На рис. 3 представлены результаты сравнения рассчитанных нами конверсионных коэффициентов и референтных коэффициентов, представленных рабочей группой МКРЗ [13], для облучения мужского фантома фотонами с энергией 60 кэВ в PA-проекции.

Для рассмотренного диапазона энергии фотонов (от 60 до 100 кэВ) и всех четырех проекций мужского фантома наблюдается хорошее совпадение рассчитанных и референтных значений дозовых коэффициентов для органов и тканей с разницей не более 5 %. Максимальное различие (до 7 %) отмечено у молочной железы для проекций AP и PA. Такое несовпадение в значениях конверсионных коэффициентов, вероятнее всего, обусловлено тем, что в программе *DosesMale* определяется конверсионный коэффициент только для молочной железы, в то время как референтное значение приводится для груди, т. е. может учитывать не только ткань железы, но и жировую ткань. Причина наблюдаемых различий до 5–7 % между нашими и референтными конверсионными коэффициентами, вероятнее всего, заключается в том, что последние определены в результате усреднения и сглаживания набора данных, полученных с помощью трех программных кодов (*EGSnrc*, *MCNPX 2.6* и *GEANT4*), в то время как нами была использована только программа *MCNP*.

На рис. 4 представлены результаты сравнения конверсионных коэффициентов «флюенс-поглощенная доза», рассчитанных с помощью алгоритма, реализованного в программе *DosesFemale*, и референтных коэффициентов [13] для облучения женского фантома фотонами с энергией 80 кэВ в AP-проекции.

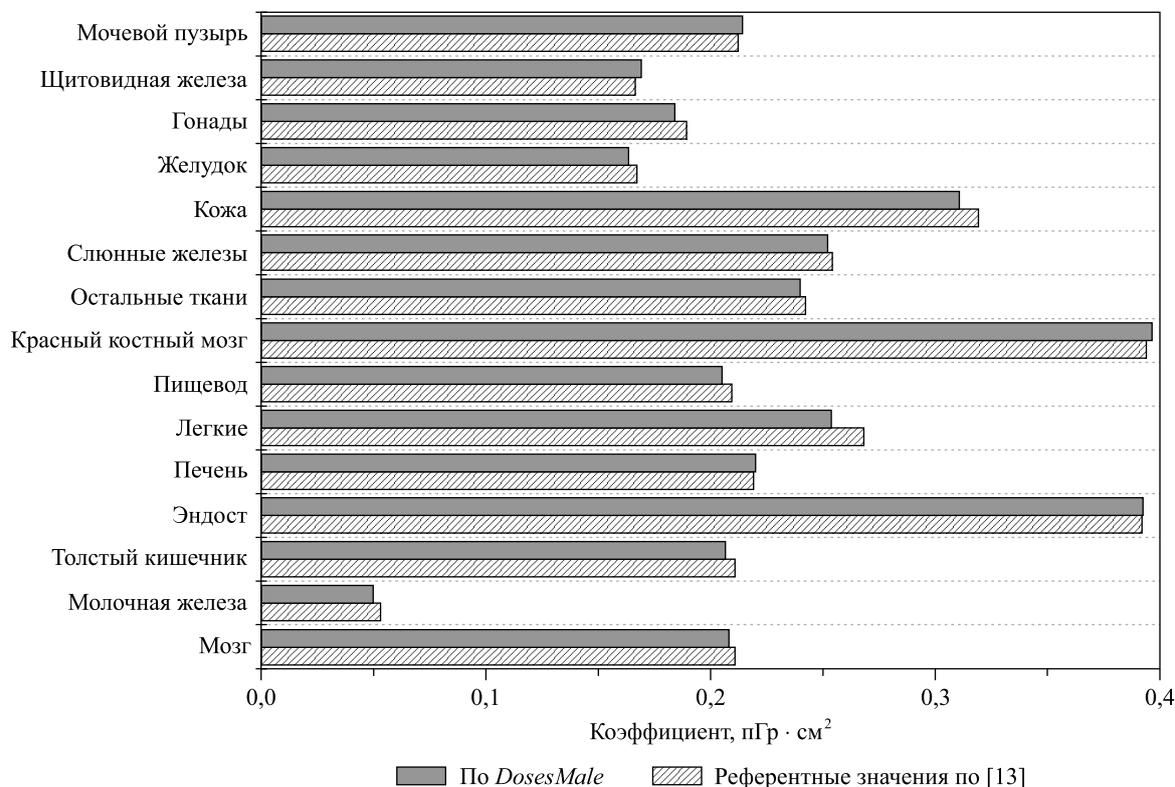


Рис. 3. Конверсионные коэффициенты «флюенс-поглощенная доза» для облучения мужского фантома фотонами с энергией 60 кэВ в РА-проекции

Fig. 3. Conversion coefficients «fluence-absorbed dose» for male phantom irradiation with 60 keV photons in PA projection

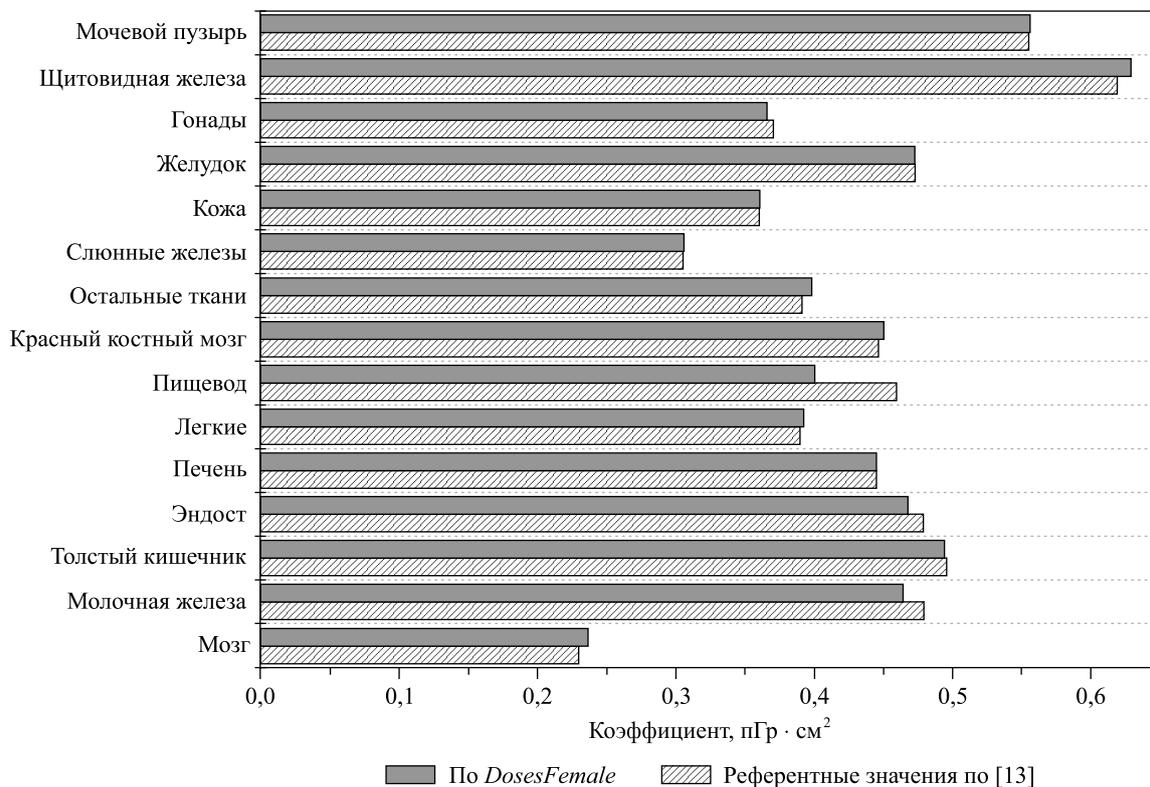


Рис. 4. Конверсионные коэффициенты «флюенс-поглощенная доза» для облучения женского фантома фотонами с энергией 80 кэВ в АР-проекции

Fig. 4. Conversion coefficients «fluence-absorbed dose» for female phantom irradiation with 80 keV photons in AP projection

Для большинства органов и тканей наблюдается хорошее совпадение значений конверсионных коэффициентов с разницей менее 3–5 % и максимальным различием около 8 % (для тканей категории «остальные» в LLAT-проекции). Исключение составил пищевод, для которого разность в значениях дозовых коэффициентов для проекций AP и PA доходит до 22 %, а для проекций LLAT и RLAT – до 41 %. При этом следует отметить, что фантом условной женщины, использованный группой МКРЗ, отличается от нашего варианта фантома именно расположением пищевода. В первом случае пищевод сдвинут ближе к переду. Убедиться в этом можно, сравнивая два набора дозовых конверсионных коэффициентов для пищевода женского фантома для четырех проекций облучения (табл. 1).

Таблица 1

Конверсионные коэффициенты «флюенс-поглощенная доза»
для пищевода женского фантома, $\text{пГр} \cdot \text{см}^2$

Table 1

The conversion coefficients «fluence-absorbed dose»
for the female phantom esophagus, $\text{pGy} \cdot \text{cm}^2$

Энергия фотонов, кэВ	Референтные значения [13]				<i>DosesFemale</i>			
	AP	PA	LLAT	RLAT	AP	PA	LLAT	RLAT
60	0,397	0,205	0,185	0,173	0,331	0,250	0,110	0,101
80	0,460	0,277	0,231	0,217	0,400	0,337	0,150	0,140
100	0,540	0,349	0,281	0,265	0,483	0,418	0,189	0,180

Из табл. 1 видно, что референтные конверсионные коэффициенты значительно превышают рассчитанные нами значения для AP-проекции, причем для PA-проекции наблюдается обратная зависимость. Иными словами, пищевод женского фантома, использованного рабочей группой МКРЗ [13], расположен ближе к фронтальной поверхности по сравнению с пищеводом в фантоме, использованном нами. Этим объясняется и тот факт, что референтные конверсионные коэффициенты, приведенные для боковых проекций, превышают рассчитанные нами значения, потому что пищевод женского фантома, сдвинутый к фронтальной поверхности, меньше экранируется руками, и доза для боковых проекций облучения становится выше. Кроме того, различное относительное расположение пищевода для женских фантомов приводит к тому, что окружающие его органы (в первую очередь сердце) оказываются сдвинуты относительно друг друга. Этим можно объяснить, что для боковых проекций референтные дозовые коэффициенты для категории «остальные ткани», куда входит сердце, отличаются от рассчитанных нами значений на 8 %.

В контексте радиационной защиты большой интерес представляет эффективная доза. Так как эта величина определяется для условного человека, то она характеризует данные условия облучения, а не радиационную нагрузку на конкретного индивида.

В табл. 2 приведены результаты сравнения референтных конверсионных коэффициентов «флюенс-эффективная доза» [13] с величинами, рассчитанными с помощью программ *DosesMale* и *DosesFemale*.

Таблица 2

Конверсионные коэффициенты «флюенс-эффективная доза», $\text{пЗв} \cdot \text{см}^2$

Table 2

Conversion coefficients «fluence-effective dose», $\text{pSv} \cdot \text{cm}^2$

Энергия фотонов, кэВ	AP		PA		LLAT		RLAT	
	I	II	I	II	I	II	I	II
60	0,390	0,389	0,242	0,240	0,177	0,171	0,150	0,146
80	0,444	0,444	0,301	0,300	0,214	0,209	0,185	0,182
100	0,519	0,521	0,361	0,361	0,259	0,252	0,225	0,222

Примечание. I – референтные значения [13]; II – рассчитанные по *Doses*-программам.

Для всех энергий фотонов в проекциях облучения AP и PA относительная разница между рассчитанными и референтными дозовыми конверсионными коэффициентами не превысила 1 %. Для боковых проекций максимальная разность составила 3,5 %. Это связано с большими различиями, полученными для конверсионных коэффициентов пищевода женского фантома для проекций LLAT и RLAT.

Так как конверсионный коэффициент для эффективной дозы является средневзвешенным по многим органам и тканям, то различие между рассчитанными и референтными значениями будет меньше, чем относительная разница для отдельных органов или тканей. Поэтому даже использование фантомов с неидентичным расположением отдельных внутренних органов несущественно влияет на величину эффективной дозы при одинаковых параметрах облучения.

Для медицинского диагностического облучения интерес представляет именно эффективная доза, которая удобна при сравнении доз различных диагностических процедур или сравнении использования аналогичных технологий в разных больницах и странах. Расхождение значений конверсионного коэффициента для эффективной дозы является довольно умеренным, и это позволяет применять представленный алгоритм расчета указанных коэффициентов для рентгеновского диагностического облучения.

Заключение

Представлен алгоритм оценки дозовых конверсионных коэффициентов для критических органов и тканей организма условного пациента на основе Монте-Карло моделирования транспорта фотонного излучения в референтных фантомах МКРЗ. Алгоритм реализован в программах *DosesMale* и *DosesFemale*, которые рассчитывают указанные коэффициенты для мужского и женского организмов соответственно. Показана процедура оценки поглощенной дозы в органах (красный костный мозг и эндост), которые отдельно не выделены в виде вокселей в референтных фантомах. Программы *DosesMale* и *DosesFemale* верифицированы по референтным конверсионным коэффициентам «флюенс-поглощенная доза» и «флюенс-эффективная доза», приведенным в публикации 116 МКРЗ для ситуаций идеализированного внешнего фотонного облучения [13]. Рассчитано около 700 дозовых конверсионных коэффициентов для периапикальной рентгенографии, обзорной рентгенографии легких, кишечника, грудного, поясничного и пояснично-крестцового отделов позвоночника.

Библиографические ссылки / References

1. *Sources and effects of ionizing radiation. UNSCEAR 2008. Report to the General Assembly with Scientific Annexes. Volume 1.* New York: United Nations; 2010. 220 p.
2. Makarevich KO, Minenko VF, Verenich KA, Kuten SA. Applications of Monte Carlo method in medicine. In: Korzhik M, Gektin A, editors. *Engineering of scintillation materials and radiation technologies. Proceedings of ISMART 2016.* Berlin: Springer; 2017. p. 80–81.
3. Mode CJ, editor. *Applications of Monte Carlo Methods in Biology, Medicine and Other Fields of Science.* Rijeka: InTech; 2011. 424 p.
4. Rannikko S, Ermakov I, Lampinen JS, Toivonen M, Karila KTK, Chervjakov A. Computing patient doses of X-ray examinations using a patient size- and sex-adjustable phantom. *British Journal of Radiology.* 1997;70:708–718. DOI: 10.1259/bjr.70.835.9245883.
5. Tapiovaara M, Siiskonen T. *PCXMC. A Monte Carlo program for calculating patient doses in medical X-ray examinations.* Helsinki: STUK-A231; 2008. 49 p.
6. Kramer R, Khoury HJ, Vieira JW. CALDose_X – a software tool for assessment of organ and tissue absorbed doses, effective dose and cancer risks in diagnostic radiology. *Physics in medicine and biology.* 2008;53(22):6437–6459. DOI: 10.1088/0031-9155/53/22/011.
7. Kim ChH, Cho SH, Xu XG. PRDC – a software package for personnel radiation dose calculation. *Radiation Protection Dosimetry.* 2006;118(3):243–250. DOI: 10.1093/rpd/nci352.
8. Valentin J, editor. ICRP, 2007. The 2007 Recommendations of the International Commission on Radiological Protection. ICRP Publication 103. *Annals of the ICRP.* 2007;37(2–4).
9. Zankl M. Computational models employed for dose assessment in diagnostic radiology. *Radiation Protection Dosimetry.* 1993;49(1–3):339–344. DOI: 10.1093/oxfordjournals.rpd.a081970.
10. ICRP, 2009. Adult Reference Computational Phantoms. ICRP Publication 110. *Annals of the ICRP.* 2009;39(2).
11. Valentin J, editor. ICRP, 2002. Basic Anatomical and Physiological Data for Use in Radiological Protection Reference Values. ICRP Publication 89. *Annals of the ICRP.* 2002;32(3–4). DOI: 10.1016/S0146-6453(03)00002-2.
12. Briesmeister JF, editor. *MCNP – A General Monte Carlo N-Particle Transport Code. Version 4B.* 1997. 736 p. LA-12625-M.
13. ICRP, 2010. Conversion Coefficients for Radiological Protection Quantities for External Radiation Exposures. ICRP Publication 116. *Annals of the ICRP.* 2010;40(2–5).

Статья поступила в редакцию 30.10.2018.

Received by editorial board 30.10.2018.

УДК 539.12

ПРЕЦИЗИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА С СИНГУЛЯРНЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ В ИМПУЛЬСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. В. АНДРЕЕВ¹⁾

¹⁾Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины,
ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель, Беларусь

Прецизионный расчет энергетических поправок водородоподобных систем является актуальной проблемой, поскольку экспериментальные измерения таких значений выполняются с высокой точностью. В работе используются новые специальные квадратурные формулы для сингулярных и гиперсингулярных интегралов при численном решении уравнения Шрёдингера в импульсном пространстве с потенциалом линейного запираения, кулоновским и корнельским потенциалами. Показано, что энергетический спектр квантовой системы в этом случае может быть рассчитан с точностью, намного превосходящей таковую других методов. Разработанная процедура расчета энергетических спектров легко обобщается на релятивистские уравнения, где потенциалы обычно получены в импульсном пространстве, и может быть применена для изучения и вычисления различных эффектов в двухчастичных квантовых системах, таких как водородоподобные атомы, адронные атомы и связанные кварковые системы.

Ключевые слова: гиперсингулярный интеграл; уравнение Шрёдингера; импульсное пространство; квадратурные формулы.

Благодарность. Работа была поддержана Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований (договор № Ф17Д-001 от 01.06.2017 г.). Автор благодарен Самарскому университету (Россия) за техническую поддержку численных расчетов в системе *Wolfram Mathematics*.

Образец цитирования:

Андреев ВВ. Прецизионные методы решения уравнения Шрёдингера с сингулярными потенциалами в импульсном пространстве. *Журнал Белорусского государственного университета. Физика*. 2019;1:97–109.

For citation:

Andreev VV. Precision methods for solving the Schrödinger equation with singular potentials in momentum space. *Journal of the Belarusian State University. Physics*. 2019;1:97–109. Russian.

Автор:

Виктор Васильевич Андреев – доктор физико-математических наук; профессор кафедры теоретической физики факультета физики и информационных технологий.

Author:

Viktor V. Andreev, doctor of science (physics and mathematics); professor at the department of theoretical physics, faculty of physics and information technologies.
vik.andreev@gsu.by

PRECISION METHODS FOR SOLVING THE SCHRÖDINGER EQUATION WITH SINGULAR POTENTIALS IN MOMENTUM SPACE

V. V. ANDREEV^a

^aFrancisk Skaryna Gomel State University, 104 Saveckaja Street, Gomel 246019, Belarus

A high precise calculation of various energy corrections of the hydrogen-like systems is a relevant problem since the experimental measurements of such values are performed with high accuracy. We use new special quadrature formulas for singular and hypersingular integrals to numerically solve the Schrödinger equation in momentum space with the linear confinement potential, Coulomb and Cornell potentials. It is shown that the energy spectrum of a quantum system can be calculated with an accuracy far exceeding other calculation methods. These methods are easily generalized to the relativistic equations, where the potentials are generally derived in momentum space. Consequently, the developed procedure to obtain the energy spectra can be used to study and calculate various effects in the two-body quantum systems, such as hydrogen-like atoms, hadronic atoms and bound quark systems.

Key words: hypersingular integral; Schrödinger equation; momentum space; quadrature formulas.

Acknowledgements. This work was supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (agreement No. Ф17Д-001 dated 06.01.2017). The author is grateful to the Samara University (Russia) for the technical support of numerical calculations in the *Wolfram Mathematics* system.

Введение

Численное исследование некоторых релятивистских моделей, основанных на КХД, приводит к решению задач в импульсном пространстве, например к уравнению Бете – Солпитера [1], бесспиновому уравнению Солпитера [2], модели CST [3], пуанкаре-инвариантной квантовой механике для описания связанных состояний [4] и др. Обычно эти уравнения являются интегральными и сводятся к уравнению Шрёдингера в нерелятивистском пределе.

Преимущества применения импульсного представления для решения задач квантовой физики привлекают внимание исследователей в течение длительного времени [5; 6]. Однако использование импульсного пространства осложняется тем, что даже простейшие потенциалы взаимодействия в импульсном представлении приводят к уравнениям с особенностями. В настоящее время имеется много работ, посвященных решению интегральных уравнений для связанных состояний с сингулярными ядрами. Так, в [7–13] разработаны различные методы численного решения уравнений с логарифмической сингулярностью.

Уравнения с линейным запирающим потенциалом, содержащим двухполюсную особенность, рассмотрены в [6; 14–21]. Наиболее часто используется метод вычитания (метод Ланде), который позволяет избавиться от сингулярности интеграла с помощью аналитического контрчлена. По этой причине точность решений для ряда задач с кулоновским и линейным ограничивающими потенциалами относительно низкая (10^{-4} – 10^{-6}) [10; 16–18], хотя в координатном пространстве можно достичь точности более высокого порядка (10^{-11} – 10^{-13}) [22].

Вопрос точности в вычислении характеристик связанных квантовых систем имеет не только академический характер. Прецизионный расчет различных энергетических поправок водородоподобных систем является актуальной проблемой, поскольку экспериментальные измерения таких значений выполняются с высокой точностью ($\sim 10^{-13}$) [23; 24].

Таким образом, при определении энергетических характеристик связанных квантовых систем следует выделить задачу разработки вычислительных и математических методов, которые позволят упростить схемы расчета и получить результаты с высокой степенью точности, необходимой для эксперимента. Наиболее перспективным методом повышения точности решения интегральных уравнений связанных систем с сингулярными ядрами является метод квадратур, где сингулярности включены в весовые коэффициенты. Эта идея не нова и активно используется в численных расчетах [25–28]. В [29] такой подход использовался при решении уравнения Шрёдингера с кулоновским потенциалом (логарифмическая особенность), что позволило повысить точность решения до (10^{-13} – 10^{-14}).

Цель исследования – разработка методов вычислений энергетических спектров связанных систем с кулоновским, линейным запирающим и корнельским потенциалами в импульсном представлении для произвольных орбитальных моментов ($\ell \geq 0$) с использованием новых квадратурных формул.

Методика решения интегральных уравнений

Уравнение Шрёдингера для центрально-симметричных потенциалов $V(|\mathbf{r}|) = V(r)$ после частичного разложения можно записать следующим образом:

$$\frac{k^2}{2\mu} \varphi_{n\ell}(k) + \int_0^\infty V_\ell(k, k') \varphi_{n\ell}(k') k'^2 dk' = E_{n\ell} \varphi_{n\ell}(k), \quad k = |\mathbf{k}|, \quad (1)$$

где $\varphi_{n\ell}(k)$ – радиальная часть трехмерной волновой функции $\varphi(\mathbf{k})$; $V_\ell(k, k')$ – ℓ -парциальная компонента центрально-симметричного потенциала, определенная с помощью сферической функции Бесселя $j_\ell(x)$:

$$V_\ell(k, k') = 2\pi \int_0^\infty j_\ell(k'r) j_\ell(kr) V(r) r^2 dr.$$

Интегральное уравнение (1) преобразуется в матричное с помощью квадратурных формул для интегралов. В результате численное решение (1) сводится к задаче на собственные значения матрицы H , возникающей при использовании квадратурных формул:

$$\sum_{j=1}^N H(k_i, k_j) \varphi(k_j) = \sum_{j=1}^N H_{ij} \varphi_j = E^{(N)} \varphi_i,$$

где N – число абсцисс; $E^{(N)} \approx E_{n\ell}$. Весовые коэффициенты $\tilde{\omega}_j$ определяются через стандартные весовые множители ω_j для интервала $[-1, 1]$, а матричные элементы H_{ij} – формулой

$$H_{ij} = \frac{k_j^2}{2\mu} \delta_{i,j} + \tilde{\omega}_j k_j^2 V_\ell(k_i, k_j).$$

Однако в импульсном пространстве уравнение имеет сингулярное ядро как для кулоновского, так и для линейного запирающего потенциала. Кулоновский потенциал $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$ в импульсном пространстве удовлетворяет уравнению

$$V_\ell(k, k') = -\frac{\alpha Q_\ell(y)}{\pi(kk')^2}, \quad (2)$$

где α – безразмерная константа связи; функция $Q_\ell(y)$ – полином Лежандра второго рода; параметр y определяется соотношением

$$y = \frac{k^2 + k'^2}{2kk'}.$$

Потенциал (2) имеет логарифмическую особенность при $k = k'$ ($y = 1$) в силу свойств полинома $Q_\ell(y)$.

Потенциал с линейным запирающим $V(r) = \sigma r$ в импульсном пространстве записывается в виде

$$V_\ell(k, k') = \frac{\sigma Q'_\ell(y)}{\pi(kk')^2}. \quad (3)$$

Как следует из (3), функция $Q'_\ell(y)$ является гиперсингулярной в случае $k = k'$, следовательно, $V_\ell(k, k')$ – также гиперсингулярный потенциал.

Методы решения уравнений с сингулярными ядрами

При решении уравнения с сингулярным ядром наиболее часто используется метод вычитания Ланде, когда сингулярность сокращается за счет специального контрчлена [15–17; 20; 21; 30]. В отличие от этого метода характерной чертой разработанного подхода является включение сингулярностей в весовые коэффициенты квадратурных формул. Применяя методику расчета таких весовых коэффициентов [31; 32] (см. также [28; 29]) с использованием интерполяционного многочлена

$$G_i(t) = \frac{P_N^{(\alpha, \beta)}(t)}{(t - \xi_{i, N}) P_N^{(\alpha, \beta)}(\xi_{i, N})},$$

где $\xi_{i, N}$ – нули полиномов Якоби:

$$P_N^{(\alpha, \beta)}(\xi_{i, N}) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

можно найти квадратурные формулы для вычисления сингулярных интегралов вида

$$I(z) = \int_{-1}^1 F(t) w(t) g(t, z) dt. \quad (4)$$

В соотношении (4) функции $F(t)$, $w(t)$ определяют часть интеграла без особенностей для $-1 < t, z < 1$; $g(t, z)$ – сингулярная функция при $t = z$.

Квадратурная формула для гиперсингулярного интеграла (4) с $g(t, z) = \frac{1}{(t-z)^2}$ и $w(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$ записывается в виде [32]

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{F(t)}{(t-z)^2} dt \approx \sum_{i=1}^N \omega_i^{HV}(z) F(\xi_{i, N}),$$

где

$$\omega_i^{HV}(z) = \frac{\pi}{V_N'(\xi_{i, N})} \begin{cases} \frac{W_N'(z)}{(z - \xi_{i, N})} - \frac{W_N(z) - W_N(\xi_{i, N})}{(z - \xi_{i, N})^2}, & z \neq \xi_{i, N}, \\ \frac{W_N''(\xi_{i, N})}{2}, & z = \xi_{i, N}. \end{cases} \quad (5)$$

Весовые коэффициенты (5) определяются с помощью полиномов Чебышева третьего $V_N(x)$ и четвертого $W_N(x)$ рода. Определение и свойства этих полиномов можно найти в монографии [33].

Квадратурная формула для гиперсингулярного интеграла с функцией $w(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ определяется аналогично предыдущему варианту и имеет вид

$$\int_{-1}^1 \frac{F(t)}{(t-z)^2 \sqrt{1-t^2}} dt \approx \sum_{i=1}^N \omega_i^{HT}(z) F(\xi_{i, N}), \quad (6)$$

где

$$\omega_i^{HT}(z) = \frac{4\pi}{N} \sum_{k=2}^{N-1} \cos\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right) C_{k-2}^{(2)}(z), \quad (7)$$

$C_n^{(\alpha)}(z)$ – полиномы Гегенбауэра.

На практике может быть полезной квадратурная формула с вычитанием

$$\int_{-1}^1 \frac{F(t) - F(z)}{(t-z)^2} dt \approx \sum_{i=1}^N \omega_i^{HS}(z) F(\xi_{i, N}). \quad (8)$$

Весовой коэффициент представляется суммой вида

$$\omega_i^{HS}(z) = \lambda_{i, N}^{(\alpha, \beta)} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{h_m} P_m^{(\alpha, \beta)}(\xi_{i, N}) J_m^H(z), \quad (9)$$

где

$$J_m^H(z) = \int_{-1}^1 \frac{P_m^{(\alpha, \beta)}(t) - P_m^{(\alpha, \beta)}(z)}{t-z} dt + P_m^{(\alpha, \beta)}(z) \ln\left(\frac{1-z}{1+z}\right). \quad (10)$$

Символы Кристоффеля $\lambda_{m, N}^{(\alpha, \beta)}$ для многочленов Якоби в уравнении (9) определяются стандартным соотношением

$$\lambda_{m, N}^{(\alpha, \beta)} = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(N + \alpha + 1) \Gamma(N + \beta + 1)}{\Gamma(N + 1) \Gamma(N + \alpha + \beta + 1)} \frac{1}{(1 - \xi_{i, N}^2) [P_N^{(\alpha, \beta)}(\xi_{i, N})]^2}. \quad (11)$$

Далее при вычислении энергетического спектра используем вариант (10), когда $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$:

$$\omega_i^{HS}(z) = \frac{2}{N} \sum_{m=1}^{N'} T_{m-1}(\xi_{i,N}) J_{m-1}^H(z), \quad (12)$$

где

$$J_m^H(z) = m U_{m-1}(z) \ln\left(\frac{1-z}{1+z}\right) + 4 \sum_{j=0}^{b_m} \left(\frac{m}{2j+1} - 1\right) U_{m-2j-2}(z), \quad (13)$$

$$b_m = \left[\frac{m-1}{2}\right].$$

В формулах (12) и (13) первый и последний члены в суммах делятся на 2; $[\dots]$ – целая часть числа.

Аналитические формулы (5), (7) и (12) позволяют рассчитать весовые коэффициенты с высокой точностью. Поэтому соответствующие квадратурные формулы можно использовать для решения уравнения Шрёдингера в импульсном пространстве с линейным запирающим потенциалом.

Для получения весовых коэффициентов, включающих логарифмическую сингулярность, рассмотрим различные варианты квадратурных формул. Для формулы

$$\int_{-1}^1 \ln|t-z| F(t) dt \approx \sum_{i=1}^N \omega_i^{\log}(z) F(\xi_{i,N}) \quad (14)$$

весовые коэффициенты имеют вид

$$\omega_i^{\log}(z) = \frac{2}{K_N^{(\alpha,\beta)}(\xi_{i,N})} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{K_{N-1-m}^{(\alpha,\beta)}(\xi_{i,N})}{m+1} \times \left\{ (-1)^m \ln(z+1) + \ln(1-z) - T_{m+1}(z) \ln\left(\frac{1-z}{1+z}\right) - 4 \sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{T_{m-2k}(z)}{2k+1} c_k^m \left[\frac{m}{2}\right] \right\}, \quad (15)$$

где $[\dots]$ – целая часть числа;

$$c_k^m(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } k = n \text{ и } m - \text{нечетное,} \\ 1, & \text{если } k = n \text{ и } m - \text{четное или } k \neq n; \end{cases}$$

функция

$$K_n^{(\alpha,\beta)}(z) = \begin{cases} T_n(z), & \text{если } \alpha = \beta = -\frac{1}{2}, \\ U_n(z), & \text{если } \alpha = \beta = \frac{1}{2}, \\ V_n(z), & \text{если } \alpha = -\beta = -\frac{1}{2}, \\ W_n(z), & \text{если } \alpha = -\beta = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

является обобщением полиномов Чебышева первого, второго, третьего и четвертого рода [34]. Если в (15) $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, то при суммировании по индексу m последний член суммы делится на 2.

Для интегралов с логарифмической особенностью вида

$$\int_{-1}^1 \ln|t-z| \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} F(t) dt \approx \sum_{i=1}^N \omega_i^V(z) F(\xi_{i,N})$$

весовые множители задаются соотношением

$$\omega_i^V(z) = -\frac{4\pi}{2N+1} \cos \frac{\theta_{i,N}}{2} \left[(\ln 2 + z) \cos \frac{\theta_{i,N}}{2} + \sum_{m=1}^{N-1} \cos \left[\left(m + \frac{1}{2} \right) \theta_{i,N} \right] \left(\frac{T_k(z)}{k} + \frac{T_{k+1}(z)}{k+1} \right) \right], \quad (16)$$

где

$$\theta_{i,N} = \frac{2i-1}{2N+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Весовые коэффициенты квадратурной формулы

$$\int_{-1}^1 \ln|t-z| \frac{F(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \approx \sum_{i=1}^N \omega_i^T(z) F(\xi_{i,N}) \quad (17)$$

после вычислений записываются как

$$\omega_i^T(z) = -\frac{\pi}{N} \left(\ln 2 + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} T_k(\xi_{i,N}) T_k(z) \right). \quad (18)$$

Энергетический спектр для кулоновского потенциала

Уравнение с кулоновским потенциалом можно преобразовать к виду

$$\tilde{k}^2 \varphi_{n\ell}(\tilde{k}) - \frac{2}{\pi \tilde{k}} \int_0^\infty Q_\ell(y) \tilde{k}' \varphi_{n\ell}(\tilde{k}') d\tilde{k}' = \varepsilon_{n\ell} \varphi_{n\ell}(\tilde{k}) \quad (19)$$

с помощью замен переменных

$$k = \beta \tilde{k}, \quad \varphi_{n\ell}(\tilde{k}) = \beta^{3/2} \varphi_{n\ell}(k), \quad \beta = \mu \alpha, \quad E_{n\ell} = \frac{\beta^2}{2\mu} \varepsilon_{n\ell}.$$

В случае кулоновского потенциала известны точные значения энергий, а именно:

$$\varepsilon_{n\ell}^C = -\frac{1}{n^2}.$$

Точность решения уравнения будем определять с использованием относительной погрешности

$$\delta_{n\ell} = \left| \frac{\varepsilon_{n\ell} - \varepsilon_{n\ell}^{(N)}}{\varepsilon_{n\ell}} \right|, \quad (20)$$

где $\varepsilon_{n\ell}$ – точные собственные значения; $\varepsilon_{n\ell}^{(N)}$ – энергетический спектр, полученный численным решением задачи на собственные значения матрицы H при заданном числе N :

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} \varphi_{n\ell}(\xi_{j,N}) = \varepsilon_{n\ell}^{(N)} \varphi_{n\ell}(\xi_{i,N}). \quad (21)$$

Расчеты произведены в системе *Wolfram Mathematica* [34], выбранная точность весовых коэффициентов и нулей равна 90; для всех вычислений параметр $\beta_0 = 0,999992$.

Для численного решения уравнения Шрёдингера с логарифмической сингулярностью используем три варианта реализации задачи на собственные значения с помощью квадратурных правил.

В первом методе (метод I) применяются полиномы Чебышева третьего рода $V_n(t)$ с функцией $w(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$ и, соответственно, весовые коэффициенты (16). Во втором методе (метод II) – многочлены Чебышева первого рода $T_n(t)$ с функцией $w(t) = 1$ и весовыми коэффициентами (15) для интегралов с логарифмической особенностью. В третьем методе (метод III) – квадратурное правило ко всем интегралам в уравнении (19) с вычитанием, которое использует стандартные весовые коэффициенты вида [29]:

$$\omega_i^{\text{st}} = -\frac{4}{N} \sum_{k=0}^{\left[\frac{N-1}{2} \right]} \frac{T_{2k}(\xi_{i,N})}{4k^2 - 1}. \quad (22)$$

Штрих (') означает, что первое слагаемое суммы делится на 2; [...] – целая часть числа.

С помощью отображения

$$\tilde{k} = \beta_0 \frac{1+z}{1-z}, \quad \tilde{k}' = \beta_0 \frac{1+t}{1-t}$$

преобразуем уравнение (19) к виду

$$\frac{4\beta_0}{\pi} \frac{1-z}{1+z} \int_{-1}^1 Q_\ell(y(z, t)) \left(\frac{1+t}{1-t} \right) \Phi_{n\ell}(t) \frac{dt}{(1-t)^2} = \left(\beta_0^2 \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 - \varepsilon_{n\ell} \right) \Phi_{n\ell}(z), \quad (23)$$

где

$$Q_\ell(y(z, t)) = P_\ell(y(z, t)) \ln \left| \frac{1-tz}{t-z} \right| - w_{\ell-1}(y(z, t));$$

$$y(z, t) = \frac{2(t-z)^2}{(1-t^2)(1-z^2)} + 1.$$

Для сокращения записи введем функции

$$\bar{k}_i = \left(\frac{1 + \xi_{i,N}}{1 - \xi_{i,N}} \right), \quad \overline{dk}_i = \frac{1}{(1 - \xi_{i,N})^2}.$$

Рассмотрим численное решение уравнения (23) с помощью квадратурных формул. Используя метод I и полагая $z = \xi_{i,N}$ и $t = \xi_{j,N}$, уравнение (23) можно аппроксимировать уравнением (21) с

$$H_{ij} = \beta_0 \left[\beta_0 \delta_{i,j} \bar{k}_j^2 - 4\pi \left(\frac{1}{\bar{k}_i} \right) \sqrt{\bar{k}_j} Q_\ell^V(y_{ij}) \overline{dk}_j \right], \quad (24)$$

где

$$Q_\ell^V(y_{ij}) = \lambda_{j,N}^{(-1/2, 1/2)} \left[P_\ell(y_{ij}) \ln |1 - \xi_{i,N} \xi_{j,N}| - w_{\ell-1}(y_{ij}) \right] - \omega_j^{\log}(\xi_{i,N}) P_\ell(y_{ij}); \quad y_{ij} = y(\xi_{i,N}, \xi_{j,N}).$$

Весовые коэффициенты $\lambda_{j,N}^{(-1/2, 1/2)}$ и $\omega_j^V(\xi_{i,N})$ определяются уравнениями (11) и (16) соответственно, а значения $\xi_{i,N}$ – формулой

$$\xi_{i,N} = \cos \left(\frac{2i-1}{2N+1} \pi \right).$$

Расчеты с использованием метода II приводят к матрице вида

$$H_{ij} = \beta_0 \left[\beta_0 \delta_{i,j} \bar{k}_j^2 - 4\pi \left(\frac{\bar{k}_j}{\bar{k}_i} \right) Q_\ell^T(y_{ij}) \overline{dk}_j \right] \quad (25)$$

с функцией

$$Q_\ell^T(y_{ij}) = \omega_j^{\text{st}} \left[P_\ell(y_{ij}) \ln |1 - \xi_{i,N} \xi_{j,N}| - w_{\ell-1}(y_{ij}) \right] - \omega_j^{\log}(\xi_{i,N}) P_\ell(y_{ij}).$$

Весовые коэффициенты ω_j^{st} и $\omega_j^{\log}(\xi_{i,N})$ определяются по формулам (22) и (15) соответственно, а значения $\xi_{i,N}$ – соотношением

$$\xi_{i,N} = \cos \left(\frac{2i-1}{2N} \pi \right).$$

Матричные элементы H_{ij} интегрального уравнения с кулоновским потенциалом с вычитанием

$$C_\ell = \int_0^\infty \frac{Q_\ell(y)}{k} dk = \left(\frac{(\ell-1)!!}{\ell!!} \right)^2 \cdot \begin{cases} \frac{\pi^2}{2} & \text{при } \ell = 2m, \\ 2 & \text{при } \ell = 2m + 1, \end{cases} \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

запишутся в виде

$$H_{ii} = \beta_0 \left(\beta_0 \bar{k}_i^2 - \frac{2}{\pi} C_\ell \bar{k}_i + \frac{4}{\pi} \sum_{r=1}^N \omega_r^{\text{st}} Q_\ell(y_{ri} \neq 1) \frac{\bar{k}_i}{k_r} \overline{dk}_r \right),$$

$$H_{ij} = -\frac{4\beta_0}{\pi} \omega_j^{\text{st}} \frac{\bar{k}_j}{k_i} Q_\ell(y_{ij}) \overline{dk}_j, \quad i \neq j.$$

Диагональные матричные элементы уравнений (24) и (25) конечны, и все особенности находятся под контролем. Численные результаты для энергетического спектра, рассчитанные тремя методами, сравниваются в табл. 1.

Таблица 1

Относительная ошибка (20) для кулоновской энергии связи

Table 1

Relative error (20) for the Coulomb binding energies

N	ℓ = 0				
	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5
100 ^I	3,7(-14)	3,7(-11)	2,9(-10)	1,2(-9)	3,7(-9)
150 ^I	3,3(-15)	3,3(-12)	2,5(-11)	1,1(-10)	3,3(-10)
150 ^{II}	1,1(-16)	6,7(-15)	1,1(-13)	8,6(-13)	4,1(-12)
150 ^{III}	7,1(-7)	1,4(-5)	1,2(-4)	5,3(-4)	1,8(-3)
N	ℓ = 1				
	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5
100 ^I	2,3(-17)	1,0(-15)	1,5(-14)	1,1(-13)	5,8(-13)
150 ^I	4,0(-19)	1,8(-17)	2,6(-16)	2,0(-15)	1,0(-14)
150 ^{II}	4,7(-16)	9,2(-15)	8,7(-14)	4,5(-13)	1,8(-12)
150 ^{III}	4,2(-5)	1,7(-4)	3,6(-4)	4,3(-4)	1,2(-4)
N	ℓ = 2				
	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5
100 ^I	2,3(-17)	1,0(-15)	1,5(-14)	1,1(-13)	5,8(-13)
150 ^I	4,0(-19)	1,8(-17)	2,6(-16)	2,0(-15)	1,0(-14)
150 ^{II}	1,7(-19)	4,7(-18)	6,1(-17)	4,7(-16)	2,6(-15)
150 ^{III}	1,4(-5)	1,1(-4)	4,8(-4)	1,6(-3)	4,3(-3)

Примечания: 1. Индексы I, II, III означают, что для расчета $\epsilon_{n\ell}^N$ используются методы I, II, III соответственно.
 2. Запись вида 7,1(-16) означает: $7,1(-16) \equiv 7,1 \cdot 10^{-16}$.

Можно сделать вывод, что методы I и II имеют хорошую сходимость с увеличением N и значительно превышают точность метода III. Кроме того, точность методов I и II возрастает при увеличении орбитального квантового числа ℓ, в отличие от метода III. Поэтому квадратурные формулы (16) и (15), в которых логарифмические особенности ядра уравнения включены в весовые коэффициенты, позволяют с большой точностью решить уравнение Шрёдингера с кулоновским потенциалом в импульсном пространстве.

Энергетический спектр для линейного потенциала

Запишем уравнение Шрёдингера с линейным потенциалом в виде

$$(\epsilon_{n\ell} - \tilde{k}^2) \varphi_{n\ell}(\tilde{k}) = \frac{1}{\pi \tilde{k}^2} \int_0^\infty (Q'_\ell(y) \varphi_{n\ell}(\tilde{k}') - Q_\ell(y) \varphi_{n\ell}(\tilde{k})) d\tilde{k}' - \frac{\lambda}{\pi \tilde{k}} \int_0^\infty Q_\ell(y) \varphi_{n\ell}(\tilde{k}') \tilde{k}' d\tilde{k}', \quad (26)$$

где использованы замены

$$k = \beta \tilde{k}, \quad E = \frac{\beta^2}{2\mu} \varepsilon, \quad \beta = (2\mu\sigma)^{1/3}, \quad \varphi_{n\ell}(\tilde{k}) = \beta^{3/2} \varphi_{n\ell}(k). \quad (27)$$

С помощью контрчлена

$$\int_0^\infty dk Q'_0(y) = 0 \quad (28)$$

получим уравнение Шрёдингера (26) в следующем виде:

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{n\ell} - \tilde{k}^2) \varphi_{n\ell}(\tilde{k}) &= \frac{1}{\pi \tilde{k}^2} \int_0^\infty (Q'_0(y) (P_\ell(y) \varphi_{n\ell}(\tilde{k}') - \varphi_{n\ell}(\tilde{k})) - \\ &- w'_{\ell-1}(y) \varphi_{n\ell}(\tilde{k}')) d\tilde{k}' + \frac{1}{\pi \tilde{k}^2} \int_0^\infty Q_0(y) P'_\ell(y) \varphi_{n\ell}(\tilde{k}') d\tilde{k}', \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$w_{\ell-1}(y) = \sum_{n=1}^{\ell} \frac{1}{n} P_{n-1}(y) P_{\ell-n}(y).$$

Точность расчетов энергетического спектра проверим с помощью погрешности (20). В частном случае $\ell = 0$ для (29) известен точный результат для спектра

$$\varepsilon_{n0}^L = -z_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где z_n – нули функций Эйри $Ai(z)$.

В отличие от кулоновского потенциала нет точных аналитических решений с линейным потенциалом для $\ell \geq 1$. Решения в данном случае, обозначенные как точные, вычислены путем решения уравнения Шрёдингера в конфигурационном пространстве. Для этой цели использован вариационный метод решения с пробными псевдокулоновскими волновыми функциями

$$\Psi_{n\ell}^C(r, \beta) = \sqrt{\frac{n!}{(n+2\ell+2)!}} (2\beta)^{3/2} (2\beta r)^\ell e^{-\beta r} L_n^{2\ell+2}(2\beta r), \quad (30)$$

где $L_n^\ell(z)$ – многочлены Лагерра. В работе [35] получены аналитические выражения для интегралов с функциями (30), возникающими в координатном пространстве. Это позволяет выполнять вычисления с высокой степенью точности. Поэтому численное решение в импульсном пространстве для $\ell \geq 1$ сравнивается с решением этого уравнения в координатном пространстве.

Для решения уравнения Шрёдингера в импульсном пространстве с линейным потенциалом используем квадратурные формулы (6) и (8). Методы решения уравнения с помощью (8) и (6) будем называть методами *A* и *B* соответственно. Поясним метод *A* для интегрального уравнения (29). Используя замену переменных

$$\tilde{k} = \beta_0 \frac{1+z}{1-z}, \quad \tilde{k}' = \beta_0 \frac{1+t}{1-t}$$

и квадратурные соотношения (6) и (8) с весовыми коэффициентами (7) и (12) соответственно, интегральное уравнение (29) с вычитанием аппроксимируется уравнением (21), в котором матричные элементы имеют вид

$$H_{ij} = \beta_0^2 T_{ij} + \frac{1}{\beta_0 \pi} \frac{1}{k_i^2} (V_{ij}^H + V_{ij}^{\log}),$$

где

$$T_{ij} = \delta_{i,j} \bar{k}_j^2; \quad V_{ij}^H = 2 \left(\omega_j^{HS}(\xi_{i,N}) P_\ell(y_{ij}) Z_{ij} - \delta_{i,j} \sum_{k=1}^N \omega_k^{HS}(\xi_{i,N}) Z_{kj} - \omega_j^{\text{st}} w'_{\ell-1}(y_{ij}) \right) \bar{d}k_j;$$

$$V_{ij}^{\log} = 2 P'_\ell(y_{ij}) \left[\omega_j^{\text{st}} \ln |1 - \xi_{i,N} \xi_{j,N}| - \omega_j^{\log}(\xi_{i,N}) \right] \bar{d}k_j,$$

$$Z_{ij} = -\frac{1}{4} \left(\frac{(1 - \xi_{i,N}^2)(1 - \xi_{j,N}^2)}{(1 - \xi_{i,N}\xi_{j,N})} \right)^2, \quad y_{ij} = \frac{2(\xi_{i,N} - \xi_{j,N})^2}{(1 - \xi_{i,N}^2)(1 - \xi_{j,N}^2)} + \delta_{i,j}.$$

Весовые коэффициенты ω_j^{st} , $\omega_j^{\text{HS}}(\xi_{i,N})$ и $\omega_j^{\text{log}}(\xi_{i,N})$ определяются уравнениями (22), (12) и (15) соответственно. Числа $\xi_{i,N}$ – нули многочлена Чебышева первого рода $T_n(t)$.

Характерная черта решения методом B гиперсингулярного интегрального уравнения (26) – использование квадратурных формул (6) и (17). В итоге матрица H для вычисления энергетического спектра задается соотношением

$$H_{ij} = \beta_0^2 T_{ij} + \frac{1}{\beta_0 \pi} \frac{1}{\bar{k}_i} (V_{ij}^H + V_{ij}^{\text{log}}),$$

где

$$T_{ij} = \delta_{i,j} \bar{k}_j; \quad V_{ij}^H = \omega_j^{\text{HT}}(\xi_{i,N}) P_\ell(y_{ij}^T) (\xi_{i,N}^2 - 1) (1 + \xi_{j,N}) - \frac{\pi}{N} w'_{\ell-1}(y_{ij}^T);$$

$$V_{ij}^{\text{log}} = \frac{P'_\ell(y_{ij}^T)}{(1 - \xi_{j,N})} \left[\frac{\pi}{N} \ln \left| 1 - \xi_{i,N} \xi_{j,N} + \sqrt{1 - \xi_{i,N}^2} \sqrt{1 - \xi_{j,N}^2} \right| - \omega_j^T(\xi_{i,N}) \right],$$

$$y_{ij}^T = \frac{1 - \xi_{i,N} \xi_{j,N}}{\sqrt{1 - \xi_{i,N}^2} \sqrt{1 - \xi_{j,N}^2}}.$$

Весовые коэффициенты $\omega_j^{\text{HT}}(\xi_{i,N})$ и $\omega_j^T(\xi_{i,N})$ определяются уравнениями (7) и (18) соответственно.

Численные результаты, полученные методами A и B , представлены в табл. 2.

Таблица 2

Относительная ошибка (20) для энергетического спектра с линейным запирающим потенциалом

Table 2

Relative error (20) for the energy spectrum with a linear confinement potential

N	$\ell = 0$				
	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
150^A	1,1(-16)	4,1(-16)	8,6(-16)	1,4(-15)	2,1(-15)
150^B	2,6(-27)	6,2(-26)	5,5(-24)	8,8(-23)	6,2(-22)
N	$\ell = 1$				
	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
150^A	7,0(-15)	7,1(-15)	1,4(-14)	1,4(-14)	2,1(-14)
150^B	2,6(-10)	7,4(-10)	1,4(-9)	2,2(-9)	3,1(-9)
N	$\ell = 2$				
	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
150^A	5,5(-14)	1,8(-14)	9,9(-14)	3,3(-14)	1,4(-13)
150^B	1,5(-14)	6,5(-14)	1,7(-13)	3,5(-13)	6,2(-13)

Примечания: 1. Индексы A и B означают, что для расчета $\epsilon_{n\ell}^N$ используются методы A и B соответственно.
 2. Запись вида 7,6(-13) означает: $7,6(-13) \equiv 7,6 \cdot 10^{-13}$.

Как следует из расчетов, метод A дает более точный результат, чем метод B , для орбитальных моментов $\ell \geq 1$.

Таким образом, новая квадратурная формула (8), основанная на использовании контрчлена и аналитическом расчете весовых коэффициентов, включающих сингулярность, дает высокоточное решение уравнения Шрёдингера в пространстве импульсов для линейного потенциала.

Отметим, что точность вычисления спектра уравнения Шрёдингера с линейным потенциалом в импульсном пространстве методами A и B намного превосходит точность решения в подходах, предложенных в работах [13; 15; 17–19; 21].

Энергетический спектр для корнельского потенциала

Рассмотрим случай присутствия как кулоновского, так и линейного запирающего потенциала. Для корнельского потенциала $V(r) = -\frac{\alpha}{r} + \sigma r$ не существует аналитических решений. Поэтому численное решение в импульсном пространстве будет сравниваться с решением этого же уравнения в координатном пространстве.

Из анализа методов решения уравнения Шрёдингера в импульсном пространстве для кулоновского и линейного потенциалов следует, что наиболее оптимальным является использование квадратурных формул (8) и (14), в которых весовые коэффициенты $\omega_i^{HS}(z)$ (12) и $\omega_i^{\log}(z)$ (15) включают двухполосную и логарифмическую сингулярности. С помощью замены (27) и контрчлена (28) уравнение Шрёдингера с корнельским потенциалом $V(r) = -\frac{\alpha}{r} + \sigma r$ в импульсном пространстве записывается в виде

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{n\ell} - \tilde{k}^2) \varphi_{n\ell}(\tilde{k}) &= \frac{1}{\pi \tilde{k}_0^2} \int_0^{\infty} (\mathcal{Q}'_{\ell}(y) \varphi_{n\ell}(\tilde{k}') - \mathcal{Q}'_0(y) \varphi_{n\ell}(\tilde{k})) d\tilde{k}' - \\ &- \frac{\lambda}{\pi \tilde{k}_0^2} \int_0^{\infty} \mathcal{Q}_{\ell}(y) \varphi_{n\ell}(\tilde{k}') \tilde{k}' d\tilde{k}', \quad \lambda = \alpha(2\mu)^{2/3} \sigma^{1/3}. \end{aligned} \quad (31)$$

Результаты расчетов представлены в табл. 3. Для определения энергетического спектра уравнение Шрёдингера было решено как в импульсном, так и в координатном пространстве.

Таблица 3

Относительная ошибка (20) для энергетического спектра уравнения с корнельским потенциалом (31) и $\lambda = 1$

Table 3

Relative error (20) for the energy spectrum of the equation with the Cornell potential (31) and $\lambda = 1$

N	$\ell = 0$				
	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5
100	2,7(-15)	9,6(-15)	2,0(-14)	3,5(-14)	5,2(-14)
150	1,1(-16)	3,7(-16)	7,9(-16)	1,4(-15)	2,0(-15)
N	$\ell = 1$				
	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5
100	3,2(-14)	7,4(-14)	1,1(-14)	1,5(-13)	3,1(-14)
150	3,2(-15)	6,0(-15)	1,8(-15)	1,2(-14)	1,4(-15)
N	$\ell = 2$				
	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5
100	4,1(-16)	1,1(-15)	1,6(-15)	3,2(-15)	1,0(-13)
150	3,2(-17)	7,2(-17)	1,4(-16)	2,2(-16)	3,3(-16)

Таким образом, использование квадратурных правил на основе уравнений (8) и (14) позволяет найти спектр системы с корнельским потенциалом с относительной погрешностью 10^{-15} для $\ell = 0$ и 10^{-22} для $\ell \geq 1$.

Заключение

В работе представлены новые квадратурные формулы для сингулярных интегралов, которые применены для решения уравнения Шрёдингера в импульсном пространстве с кулоновским, линейным запирающим и корнельским потенциалами. Они позволяют с высокой точностью найти энергетические спектры квантовых систем с сингулярными потенциалами.

Достигнутая точность расчетов на много порядков выше, чем в аналогичных вычислениях в импульсном пространстве, проведенных в работах [13; 15; 17–19; 21].

Разработанные методы легко обобщаются на релятивистские уравнения, где потенциалы обычно представлены в импульсном пространстве. Следовательно, эта методика может быть использована для изучения и вычисления различных релятивистских эффектов в двухчастичных квантовых системах с высокой точностью.

Библиографические ссылки

1. Bete HA, Salpeter EE. A relativistic equation for bound-state problems. *Physical Review*. 1951;84(6):1232–1242. DOI: 10.1103/PhysRev.84.1232.
2. Salpeter EE. Mass-corrections to the fine structure of Hydrogen-like atoms. *Physical Review*. 1952;87(2):328–343. DOI: 10.1103/PhysRev.87.328.
3. Savkli C, Gross M. Quark-antiquark bound states in the relativistic spectator formalism. *Physical Review C*. 2001;63:035208. DOI: 10.1103/PhysRevC.63.035208.
4. Keister BD, Polyzou WN. Relativistic Hamiltonian dynamics in nuclear and particle physics. *Advances in Nuclear Physics*. 1991;20:225–479.
5. Bete HA, Salpeter EE. *Quantum mechanics of one and two-electron atoms*. Berlin – Göttingen – Heidelberg: Springer; 1957.
6. Eyre D, Vary JP. Solving momentum space integral equations for quarkonia spectra with confining potentials. *Physical Review D*. 1986;34(11):3467–3471. DOI: 10.1103/PhysRevD.34.3467.
7. Gammel J, Menzel M. Bethe-Salpeter equation: numerical experience with a hydrogenlike atom. *Physical Review A*. 1973;7(3):858.
8. Kwon YR, Tabakin F. Hadronic atoms in momentum space. *Physical Review C*. 1978;18(2):932–943. DOI: 10.1103/PhysRevC.18.932.
9. Mainland G. Logarithmic singularities in two-body, bound-state integral equations. *Journal of Computational Physics*. 2001;174(2):852–869. DOI: 10.1006/jcph.2001.6941.
10. Norbury JW, Maung KM, Kahana DE. Numerical tests of the Landé subtraction method for the Coulomb potential in momentum space. *Physical Review A*. 1994;50(3):2075–2079. DOI: 10.1103/PhysRevA.50.2075.
11. Norbury JW, Maung KM, Kahana DE. Exact numerical solution of the spinless Salpeter equation for the Coulomb potential in momentum space. *Physical Review A*. 1994;50:3609–3613. DOI: 10.1103/PhysRevA.50.3609.
12. Norbury JW, Maung KM, Kahana DE. Solution of two-body relativistic bound-state equations with confining plus Coulomb interactions. *Physical Review D*. 1993;47(3):1182–1189. DOI: 10.1103/PhysRevD.47.1182.
13. Chen J-K. Nystrom method for the Coulomb and screened Coulomb potentials. *Few-Body Systems*. 2013;54(11):2081–2095. DOI: 10.1007/s00601-013-0713-2.
14. Spence JR, Vary JP. Solving momentum space integral equations for quarkonium spectra with confining potentials. 3: Bethe-Salpeter equation with spin. *Physical Review C*. 1993;47(3):1282–1293. DOI: 10.1103/PhysRevC.47.1282.
15. Hersbach H. Relativistic linear potential in momentum space. *Physical Review D*. 1993;47(7):3027–3033. DOI: 10.1103/PhysRevD.47.3027.
16. Norbury JW, Maung KM, Kahana DE. Confining potential in momentum space. *Canadian Journal of Physics*. 1992;70:86–89.
17. Tang A, Norbury JW. The Nyström plus correction method for solving bound state equations in momentum space. *Physical Review E*. 2001;63(6–2):066703. DOI: 10.1103/PhysRevE.63.066703.
18. Deloff A. Quarkonium bound-state problem in momentum space revisited. *Annals of Physics*. 2007;322:2315–2326. DOI: 10.1016/j.aop.2006.10.004.
19. Chen J-K. Spectral method for the Cornell and screened Cornell potentials in momentum space. *Physical Review D*. 2013;88(7):076006. DOI: 10.1103/PhysRevD.88.076006.
20. Chen J-K. Extended Simpson's rule for the screened Cornell potential in momentum space. *Physical Review D*. 2012;86(3):036013. DOI: 10.1103/PhysRevD.86.036013.
21. Leitão S, Stadler A, Peña MT, Biernat EP. Linear confinement in momentum space: singularity-free bound-state equations. *Physical Review D*. 2014;90(9):096003. DOI: 10.1103/PhysRevD.90.096003.
22. Kang D, Won E. Precise numerical solutions of potential problems using Crank-Nicholson method. *Journal of Computational Physics*. 2008;227(5):2970–2976. DOI: 10.1016/j.jcp.2007.11.028.
23. Udem Th, Huber A, Gross B, Reichert J, Prevedelli M, Weitz M, Hänsch TW. Phase-coherent measurement of the hydrogen $1S - 2S$ transition frequency with an optical frequency interval divider chain. *Physical Review Letters*. 1997;79(14):2646–2649. DOI: 10.1103/PhysRevLett.79.2646.
24. Liu W, Boshier MG, Dhawan S, van Dyck O, Egan P, Fei F, et al. High precision measurements of the ground state hyperfine structure interval of muonium and of the muon magnetic moment. *Physical Review Letters*. 1999;82:711–714. DOI: 10.1103/PhysRevLett.82.711.
25. Chan Y-S, Fannjiang AC, Paulino GH. Integral equations with hypersingular kernels – theory and applications to fracture mechanics. *International Journal of Engineering Science*. 2003;41(7):683–720. DOI: 10.1016/S0020-7225(02)00134-9.
26. Bichi SL, Eshkuvatov ZK, Nik Long NMA. An automatic quadrature schemes and error estimates for semibounded weighted hadamard type hypersingular integrals. *Abstract and Applied Analysis*. 2014;2014:1–13. Article ID: 387246. DOI: 10.1155/2014/387246.
27. Chen ZA, Zhou Y. New method for solving hypersingular integral equations of the first kind. *Applied Mathematics Letters*. 2011;24(5):636–641. DOI: 10.1016/j.aml.2010.11.028.
28. Шешко МА. О сходимости квадратурных процессов для сингулярного интеграла. *Известия высших учебных заведений. Математика*. 1976;2:108–118.
29. Deloff A. Semi-spectral Chebyshev method in quantum mechanics. *Annals of Physics*. 2007;322:1373–1419. DOI: 10.1016/j.aop.2006.07.004.
30. Kahana DE, Maung KM, Norbury JW. Regge trajectories from the two-body, bound-state Thompson equation using a quark-confining interaction in momentum space. *Physical Review D*. 1993;48(7):3408–3409. DOI: 10.1103/PhysRevD.48.3408.
31. Андреев ВВ. Решение уравнения Шредингера с гиперсингулярным ядром в импульсном пространстве. *Проблемы физики, математики и техники*. 2016;1(26):7–10.
32. Andreev VV. Precision solution of the Schrödinger equation with Coulomb and linear confining potentials in momentum space. *Physics of Particles and Nuclei Letters*. 2017;14(1):66–76. DOI: 10.1134/S1547477117010034.
33. Mason JC, Handscomb DC. *Chebyshev polynomials*. Boca Raton – London – New York – Washington: Chapman & Hall/CRC; 2002.
34. Wolfram S. *The Mathematica Book: Wolfram Research*. 5th edition. [Place unknown]: Wolfram Media; 2003. 1488 p.
35. Fulcher LP, Chen Z, Yeong KC. Energies of quark – anti-quark systems, the Cornell potential, and the spinless Salpeter equation. *Physical Review D*. 1993;47(9):4122–4132. DOI: 10.1103/PhysRevD.47.4122.

References

1. Bete HA, Salpeter EE. A relativistic equation for bound-state problems. *Physical Review*. 1951;84(6):1232–1242. DOI: 10.1103/PhysRev.84.1232.
2. Salpeter EE. Mass-corrections to the fine structure of Hydrogen-like atoms. *Physical Review*. 1952;87(2):328–343. DOI: 10.1103/PhysRev.87.328.
3. Savkli C, Gross M. Quark-antiquark bound states in the relativistic spectator formalism. *Physical Review C*. 2001;63:035208. DOI: 10.1103/PhysRevC.63.035208.
4. Keister BD, Polyzou WN. Relativistic Hamiltonian dynamics in nuclear and particle physics. *Advances in Nuclear Physics*. 1991;20:225–479.
5. Bete HA, Salpeter EE. *Quantum mechanics of one and two-electron atoms*. Berlin – Göttingen – Heidelberg: Springer; 1957.
6. Eyre D, Vary JP. Solving momentum space integral equations for quarkonia spectra with confining potentials. *Physical Review D*. 1986;34(11):3467–3471. DOI: 10.1103/PhysRevD.34.3467.
7. Gammel J, Menzel M. Bethe-Salpeter equation: numerical experience with a hydrogenlike atom. *Physical Review A*. 1973;7(3):858.
8. Kwon YR, Tabakin F. Hadronic atoms in momentum space. *Physical Review C*. 1978;18(2):932–943. DOI: 10.1103/PhysRevC.18.932.
9. Mainland G. Logarithmic singularities in two-body, bound-state integral equations. *Journal of Computational Physics*. 2001;174(2):852–869. DOI: 10.1006/jcph.2001.6941.
10. Norbury JW, Maung KM, Kahana DE. Numerical tests of the Landé subtraction method for the Coulomb potential in momentum space. *Physical Review A*. 1994;50(3):2075–2079. DOI: 10.1103/PhysRevA.50.2075.
11. Norbury JW, Maung KM, Kahana DE. Exact numerical solution of the spinless Salpeter equation for the Coulomb potential in momentum space. *Physical Review A*. 1994;50:3609–3613. DOI: 10.1103/PhysRevA.50.3609.
12. Norbury JW, Maung KM, Kahana DE. Solution of two-body relativistic bound-state equations with confining plus Coulomb interactions. *Physical Review D*. 1993;47(3):1182–1189. DOI: 10.1103/PhysRevD.47.1182.
13. Chen J-K. Nystrom method for the Coulomb and screened Coulomb potentials. *Few-Body Systems*. 2013;54(11):2081–2095. DOI: 10.1007/s00601-013-0713-2.
14. Spence JR, Vary JP. Solving momentum space integral equations for quarkonium spectra with confining potentials. 3: Bethe-Salpeter equation with spin. *Physical Review C*. 1993;47(3):1282–1293. DOI: 10.1103/PhysRevC.47.1282.
15. Hersbach H. Relativistic linear potential in momentum space. *Physical Review D*. 1993;47(7):3027–3033. DOI: 10.1103/PhysRevD.47.3027.
16. Norbury JW, Maung KM, Kahana DE. Confining potential in momentum space. *Canadian Journal of Physics*. 1992;70:86–89.
17. Tang A, Norbury JW. The Nyström plus correction method for solving bound state equations in momentum space. *Physical Review E*. 2001;63(6–2):066703. DOI: 10.1103/PhysRevE.63.066703.
18. Deloff A. Quarkonium bound-state problem in momentum space revisited. *Annals of Physics*. 2007;322:2315–2326. DOI: 10.1016/j.aop.2006.10.004.
19. Chen J-K. Spectral method for the Cornell and screened Cornell potentials in momentum space. *Physical Review D*. 2013;88(7):076006. DOI: 10.1103/PhysRevD.88.076006.
20. Chen J-K. Extended Simpson's rule for the screened Cornell potential in momentum space. *Physical Review D*. 2012;86(3):036013. DOI: 10.1103/PhysRevD.86.036013.
21. Leitão S, Stadler A, Peña MT, Biernat EP. Linear confinement in momentum space: singularity-free bound-state equations. *Physical Review D*. 2014;90(9):096003. DOI: 10.1103/PhysRevD.90.096003.
22. Kang D, Won E. Precise numerical solutions of potential problems using Crank-Nicholson method. *Journal of Computational Physics*. 2008;227(5):2970–2976. DOI: 10.1016/j.jcp.2007.11.028.
23. Udem Th, Huber A, Gross B, Reichert J, Prevedelli M, Weitz M, Hänsch TW. Phase-coherent measurement of the hydrogen $1S - 2S$ transition frequency with an optical frequency interval divider chain. *Physical Review Letters*. 1997;79(14):2646–2649. DOI: 10.1103/PhysRevLett.79.2646.
24. Liu W, Boshier MG, Dhawan S, van Dyck O, Egan P, Fei F, et al. High precision measurements of the ground state hyperfine structure interval of muonium and of the muon magnetic moment. *Physical Review Letters*. 1999;82:711–714. DOI: 10.1103/PhysRevLett.82.711.
25. Chan Y-S, Fannjiang AC, Paulino GH. Integral equations with hypersingular kernels – theory and applications to fracture mechanics. *International Journal of Engineering Science*. 2003;41(7):683–720. DOI: 10.1016/S0020-7225(02)00134-9.
26. Bichi SL, Eshkuvatov ZK, Nik Long NMA. An automatic quadrature schemes and error estimates for semibounded weighted hadamard type hypersingular integrals. *Abstract and Applied Analysis*. 2014;2014:1–13. Article ID: 387246. DOI: 10.1155/2014/387246.
27. Chen ZA, Zhou Y. New method for solving hypersingular integral equations of the first kind. *Applied Mathematics Letters*. 2011;24(5):636–641. DOI: 10.1016/j.aml.2010.11.028.
28. Sheshko MA. [On the convergence of quadrature processes for the singular integral]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika*. 1976;12:108–118. Russian.
29. Deloff A. Semi-spectral Chebyshev method in quantum mechanics. *Annals of Physics*. 2007;322:1373–1419. DOI: 10.1016/j.aop.2006.07.004.
30. Kahana DE, Maung KM, Norbury JW. Regge trajectories from the two-body, bound-state Thompson equation using a quark-confining interaction in momentum space. *Physical Review D*. 1993;48(7):3408–3409. DOI: 10.1103/PhysRevD.48.3408.
31. Andreev VV. On solving the Schrödinger equation with hypersingular kernel in momentum space. *Problems of Physics, Mathematics and Technics*. 2016;1(26):7–10. Russian.
32. Andreev VV. Precision solution of the Schrödinger equation with Coulomb and linear confining potentials in momentum space. *Physics of Particles and Nuclei Letters*. 2017;14(1):66–76. DOI: 10.1134/S1547477117010034.
33. Mason JC, Handscomb DC. *Chebyshev polynomials*. Boca Raton – London – New York – Washington: Chapman & Hall/CRC; 2002.
34. Wolfram S. *The Mathematica Book: Wolfram Research*. 5th edition. [Place unknown]: Wolfram Media; 2003. 1488 p.
35. Fulcher LP, Chen Z, Yeong KC. Energies of quark – anti-quark systems, the Cornell potential, and the spinless Salpeter equation. *Physical Review D*. 1993;47(9):4122–4132. DOI: 10.1103/PhysRevD.47.4122.

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ЯВЛЕНИЙ

<i>Стражес В. И.</i> Дуально инвариантная лагранжева формулировка электродинамики.....	4
<i>Лукашевич С. А., Максименко Н. В.</i> Определение тензора энергии-импульса с учетом поляризуемостей.....	8
<i>Вакулина Е. В., Максименко Н. В.</i> Точные решения волновых уравнений для частиц с дипольными поляризуемостями в поле плоской электромагнитной волны.....	12

ОПТИКА И СПЕКТРОСКОПИЯ

<i>Самцов М. П., Тарасов Д. С., Воронай Е. С., Ляшенко Л. С., Петров П. Т., Насек В. М., Савин А. О., Зильберман Р. Д.</i> Оптимизация параметров источника фотовоздействия при фотохимиотерапии опухолевых тканей лабораторных животных.....	19
---	----

ФИЗИКА КОНДЕНСИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

<i>Анищик В. М., Горушко В. А., Пилипенко В. А., Понарядов В. В., Солодуха В. А.</i> Электропроводность пленок силицида платины, сформированных с применением быстрой термообработки.....	27
<i>Сафронов И. В., Углов В. В., Шиманский В. И.</i> Упругие свойства слоистых нанокompозитов на основе нитридов титана и кремния.....	32

ФИЗИКА ЯДРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

<i>Шалыт-Марголин А. Э.</i> Минимальные величины и концепция измеримости в квантовой теории, гравитации и термодинамике.....	40
<i>Авакян Е. З., Авакян С. Л.</i> Редкие распады странных мезонов.....	51
<i>Андреев В. В., Гавриш В. Ю.</i> Электромагнитный формфактор векторных мезонов в релятивистской кварковой модели.....	63
<i>Авакян Е. З., Авакян С. Л.</i> Описание скалярных мезонов как двух- и четырехкварковых состояний.....	72

ФИЗИКА ДОЗИМЕТРИИ ОБЛУЧЕНИЯ

<i>Макаревич К. О., Миненко В. Ф., Кутень С. А.</i> Дозовые конверсионные коэффициенты для внешнего фотонного облучения.....	88
--	----

ФИЗИКА КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

<i>Андреев В. В.</i> Прецизионные методы решения уравнения Шрёдингера с сингулярными потенциалами в импульсном пространстве.....	97
--	----

CONTENTS

PHYSICS OF ELECTROMAGNETIC PHENOMENA

<i>Strazhev V. I.</i> Dual invariant Lagrange formulation of electrodynamics	4
<i>Lukashevich S. A., Maksimenko N. V.</i> Determination of the energy-momentum tensor the polarizabilities taking into account	8
<i>Vakulina E. V., Maksimenko N. V.</i> Exact solutions of wave equations for particles with dipole polarizabilities in the field of a plane electromagnetic wave	12

OPTICS AND SPECTROSCOPY

<i>Samtsov M. P., Tarasov D. S., Voropay E. S., Lyashenko L. S., Petrov P. T., Nasek V. M., Savin A. O., Zilberman R. D.</i> Photodynamic therapy using the photosensitizer based on tricarboyanine dye with polyethylene glycol on a model for tumor bearing laboratory animals	19
--	----

CONDENSED STATE PHYSICS

<i>Anishchik V. M., Harushka V. A., Pilipenka U. A., Ponariadov V. V., Saladukha V. A.</i> Conductivity of platinum silicide films formed with application of rapid thermal treatment	27
<i>Safronov I. V., Uglov V. V., Shymanski V. I.</i> Elastic properties of the multilayered nanocomposites based on titanium and silicon nitrides	32

ATOMIC NUCLEUS AND ELEMENTARY PARTICLE PHYSICS

<i>Shalyt-Margolin A. E.</i> Minimal quantities and measurability conception in quantum theory, gravity and thermodynamics	40
<i>Avakyan E. Z., Avakyan S. L.</i> Rare decays of strange mesons	51
<i>Andreev V. V., Haurysh V. Yu.</i> Electromagnetic form-factor of vector mesons in the relativistic quark model	63
<i>Avakyan E. Z., Avakyan S. L.</i> Description of scalar mesons as two and four quark states	72

PHYSICS OF RADIATION DOSIMETRY

<i>Makarevich K. O., Minenko V. F., Kuten S. A.</i> Dose conversion coefficients for external photon irradiation	88
--	----

PHYSICS OF QUANTUM SYSTEMS

<i>Andreev V. V.</i> Precision methods for solving the Schrödinger equation with singular potentials in momentum space	97
--	----

Журнал включен Высшей аттестационной комиссией Республики Беларусь в Перечень научных изданий для опубликования результатов диссертационных исследований по физико-математическим наукам (в области теоретической, экспериментальной и прикладной физики).

Журнал включен в библиографическую базу данных научных публикаций «Российский индекс научного цитирования» (РИНЦ).

**Журнал Белорусского
государственного университета. Физика.
№ 1. 2019**

Учредитель:
Белорусский государственный университет

Юридический адрес: пр. Независимости, 4,
220030, г. Минск.
Почтовый адрес: пр. Независимости, 4,
220030, г. Минск.
Тел. (017) 259-70-74, (017) 259-70-75.
E-mail: jphys@bsu.by

«Журнал Белорусского государственного
университета. Физика» издается с января 1969 г.
До 2017 г. выходил под названием «Вестник БГУ.
Серия 1, Физика. Математика. Информатика»
(ISSN 1561-834X).

Редактор *Т. Р. Джум*
Технический редактор *В. В. Кильдишева*
Корректор *Л. А. Меркуль*

Подписано в печать 23.01.2019.
Тираж 130 экз. Заказ 27.

Республиканское унитарное предприятие
«Информационно-вычислительный центр
Министерства финансов Республики Беларусь».
ЛП № 02330/89 от 03.03.2014.
Ул. Кальварийская, 17, 220004, г. Минск.

© БГУ, 2019

**Journal
of the Belarusian State University. Physics.
No. 1. 2019**

Founder:
Belarusian State University

Registered address: 4 Niezaliežnasci Ave.,
Minsk 220030.
Correspondence address: 4 Niezaliežnasci Ave.,
Minsk 220030.
Tel. (017) 259-70-74, (017) 259-70-75.
E-mail: jphys@bsu.by

«Journal of the Belarusian State University. Physics»
published since January, 1969.
Until 2017 named «Vestnik BGU.
Seriya 1, Fizika. Matematika. Informatika»
(ISSN 1561-834X).

Editor *T. R. Dzhum*
Technical editor *V. V. Kil'disheva*
Proofreader *L. A. Merkul'*

Signed print 23.01.2019.
Edition 130 copies. Order number 27.

Republican Unitary Enterprise
«Informatsionno-vychislitel'nyi tsentr
Ministerstva finansov Respubliki Belarus'».
License for publishing No. 02330/89, 3 March, 2014.
17 Kal'varyjskaja Str., Minsk 220004.

© BSU, 2019