
ПРИБОРЫ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

RESEARCH INSTRUMENTS AND METHODS

УДК 532.783, 535.42

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЫСОТЫ НЕИЗВЕСТНОГО КОСМИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА ДЛЯ ОЦЕНКИ ВЕЛИЧИНЫ НАКЛОННОЙ ДАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОРБИТ ПО УГЛОВЫМ ОПТИЧЕСКИМ ИЗМЕРЕНИЯМ

В. С. БАРАНОВА¹⁾, А. А. СПИРИДОНОВ¹⁾, В. Л. КОЗЛОВ¹⁾,
Д. В. УШАКОВ¹⁾, В. А. САЕЧНИКОВ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Аннотация. Представлен метод оценки высоты неизвестного космического объекта в приближении около-кругового орбитального движения, который использован для корректирующего расчета параметра наклонной дальности и определения двух радиус-векторов положения на основе оптических угловых измерений. В методе начального определения орбиты использованы два радиус-вектора двух областей обнаружения неизвестного спутника по опорному спутнику-маске. Высота орбиты для двух областей угловых измерений обнаруженного спутника Indefix/Ariane 42p определена с ошибкой в 2,1 и 2,2 км соответственно при расчетном значении высоты в модели SGP, равном 752,2 км. В результате вычислений корректирующих значений на основе данных высоты ошибка наклонной дальности не превысила 3 км. Проведен сравнительный анализ результатов начального определения орбиты обнаруженного спутника Indefix/Ariane 42p на основе оценки наклонной дальности через величину проекции линейной скорости на плоскость кадра, а также с использованием коррекции наклонной дальности через оценку высоты орбиты космического объекта.

Ключевые слова: космический объект; оптические измерения; орбитальные параметры.

Образец цитирования:

Баранова ВС, Спиридонов АА, Козлов ВЛ, Ушаков ДВ, Саечников ВА. Метод определения высоты неизвестного космического объекта для оценки величины наклонной дальности в задачах вычисления орбит по угловым оптическим измерениям. *Журнал Белорусского государственного университета. Физика.* 2025;2:4–18. EDN: VZRRQL

For citation:

Baranova VS, Spiridonov AA, Kozlov VL, Ushakov DV, Saetchnikov VA. Method for determining the altitude of an unknown space object to estimate the slant range in problems of orbit calculation from angular optical measurements. *Journal of the Belarusian State University. Physics.* 2025;2:4–18. Russian. EDN: VZRRQL

Сведения об авторах см. на с. 17–18.

Information about the authors see p. 17–18.

METHOD FOR DETERMINING THE ALTITUDE OF AN UNKNOWN SPACE OBJECT TO ESTIMATE THE SLANT RANGE IN PROBLEMS OF ORBIT CALCULATION FROM ANGULAR OPTICAL MEASUREMENTS

V. S. BARANOVA^a, A. A. SPIRIDONOV^a, V. L. KOZLOV^a, D. V. USHAKOV^a, V. A. SAETCHNIKOV^a

^aBelarusian State University, 4 Niezaliezhnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus

Corresponding author: V. S. Baranova (vbaranova@bsu.by)

Abstract. A method for estimating the altitude of an unknown space object, assuming near-circular orbital motion, is presented. This technique is applied to adjust the slant range parameter and determine two position radius vectors based on optical angular measurements. The initial orbit determination approach utilises two radius vectors from correlated detection regions of the unknown satellite relative to a reference mask satellite. The orbital altitude for the two angular measurement regions of the detected Indefix/Ariane 42p satellite was determined with errors of 2.1 and 2.2 km respectively, compared to the calculated altitude of 752.2 km in the SGP model. By incorporating altitude-based corrections, the slant range error did not exceed 3 km. A comparative analysis was conducted on the initial orbit determination results for the Indefix/Ariane 42p satellite, evaluating the slant range through the projection of linear velocity onto the frame plane and using altitude-based corrections for slant range estimation.

Keywords: space object; optical measurements; orbital parameters.

Введение

Данные угловых измерений орбит космических объектов с использованием оптических датчиков обладают высокой точностью, но ограничены отсутствием информации о дальности до объекта [1]. Классические методы начального определения орбиты на основе только угловых измерений и их всевозможные модификации позволяют решать проблему отсутствия информации о дальности до объекта посредством итерационной обработки [2]. Наиболее устойчивое решение начального определения орбиты предоставляет метод Гаусса [1–3], в котором используется полином 8-й степени для итерационного поиска значения наклонной дальности. Метод Гудинга [1] и двойной r -итерации [3] для расчета орбитальных параметров требуют корректного начального приближения о дальности до объекта, иначе процесс сходимости метода усложнится и окажется неустойчивым. Кроме того, каждый из указанных классических методов ограничен условиями применимости [4; 5]. Основные ограничения накладываются на угловую и временную разницу между измерениями. Поэтому развивается тенденция поиска универсальных методов начальной оценки орбиты по угловым оптическим измерениям, наиболее практичными из которых используют различные геометрические соотношения [6] с детальным вероятностным анализом [7–9]. Большинство из подобных методов ориентируется на решение проблемы расчета орбиты по угловым оптическим измерениям для условий ограниченного количества данных [10–12], но проблема отсутствия информации о дальности до объекта остается опущенной. Условия ограниченных данных характерны для работы с астероидами [13], а в последнее время предельно важны в наблюдениях за космическим мусором [14]. Одно из возможных решений задачи определения дальности до объекта по угловым оптическим измерениям было предложено в работе [15], где рассматривалась оценка высоты орбиты космического объекта с применением данных оптической системы наблюдения и геометрического соотношения между наклонной дальностью и скоростью смещения космического объекта в плоскости кадра. Предложенный метод расчета высоты орбиты космического объекта позволяет оценить наклонную дальность, что может использоваться как в качестве начального приближения, так и в качестве коррекции наклонной дальности в методах начального определения орбиты по угловым оптическим измерениям. В статье [16] авторами описан метод обнаружения неизвестных космических объектов в видеоданных оптической системы наблюдения, который позволяет рассчитать величину наклонной дальности неизвестного орбитального объекта на основе оценки величины проекции линейной скорости на плоскость кадра. Дальнейшее развитие указанного метода обнаружения и оценки наклонной дальности заключалось в разработке метода начального определения орбиты на его основе, при использовании которого можно однозначно рассчитать вектор положения и скорости неизвестного космического объекта.

В настоящей работе представлен метод определения высоты и коррекции наклонной дальности для расчета двух радиус-векторов положения на основе оптических угловых измерений в двух областях об-

наружения неизвестного космического объекта. Этот метод позволяет, используя решение Гаусса задачи Ламберта [1–3] по двум известным радиус-векторам положения, найти вектор скорости и определить орбитальные параметры обнаруженного неизвестного космического объекта.

Метод оценки высоты орбиты космического объекта по угловым оптическим измерениям

В приближении околосферического орбитального движения ($e \ll 1$) проблему отсутствия информации о дальности до космического объекта для оптических угловых измерений можно решить через оценку высоты орбиты (H) [15]. Оценка высоты возможна с использованием данных угловых измерений пассивной оптической системы наблюдения и геометрического соотношения между высотой орбиты и скоростью смещения космического объекта в плоскости кадра. Измерения пассивной оптической системой проводятся в топоцентрической экваториальной системе координат, связанной с плоскостью местного горизонта [17]. Геометрия орбитального движения космического объекта (КО) относительно пункта наблюдения (ПН) представлена на рис. 1.

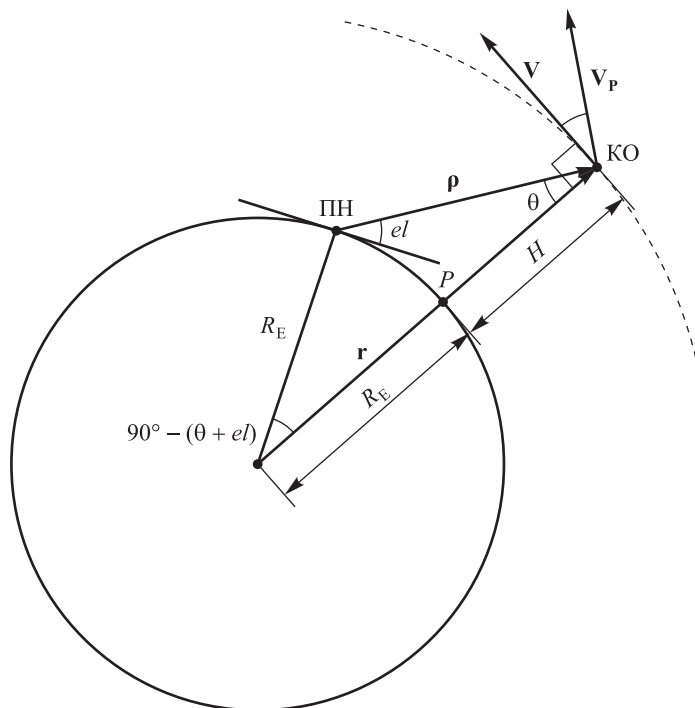


Рис. 1. Геометрия измерений пассивной оптической системой
Fig. 1. Measurement geometry of a passive optical system

Для угловых измерений оптическими датчиками орбитальное положение космического объекта в каждый момент времени t_m относительно плоскости кадра описывается следующими пространственными величинами: вектор наклонной дальности ρ , высота орбиты H , угол θ между наклонной дальностью и направлением на подспутниковую точку P , орбитальная скорость V космического объекта, нормальная к радиусу орбиты r , проекция орбитальной скорости на плоскость кадра V_P , угол места el , а также радиус Земли R_E .

Согласно рис. 1 соотношение между наклонной дальностью ρ и высотой орбиты H для орбитального положения космического объекта относительно наземного пункта наблюдения (ПН) в момент времени t_m можно получить из теоремы синусов:

$$\frac{R_E}{\sin(\theta)} = \frac{\rho}{\sin(90 - el - \theta)} = \frac{R_E + H}{\sin(el + 90)}. \quad (1)$$

С учетом тригонометрического упрощения (1) пространственное соотношение между орбитальным положением космического объекта и наземной станцией наблюдения в момент времени t_m принимает вид

$$\frac{R_E}{\sin(\theta)} = \frac{\rho}{\cos(el + \theta)} = \frac{R_E + H}{\cos(el)}. \quad (2)$$

Из фундаментальных принципов геометрической оптики для момента времени t_m величину проекции орбитальной скорости космического объекта на плоскость кадра V_p можно связать с величиной наклонной дальности ρ через параметр расстояния до приемного датчика оптической системы f . Обычно такой подход используется при расчете функций покрытия и планирования съемки земной поверхности системами космического наблюдения [18; 19]. На рис. 2 представлена упрощенная модель формирования последовательности изображений космического объекта с изменением величины расстояния до приемного датчика оптической системы f при его орбитальном движении. В данном случае рассматриваются малые временные интервалы Δt между угловыми измерениями двух последовательных орбитальных положений космического объекта, на которых скорость в плоскости кадра V_p и наклонную дальность ρ можно считать постоянными. Поэтому для малого интервала времени Δt справедливо следующее соотношение между наклонной дальностью ρ и величиной проекции орбитальной скорости на плоскость кадра V_p :

$$\frac{V_p \Delta t}{\rho} = \frac{\omega \Delta x}{f}, \quad (3)$$

где Δt – время, за которое космический объект смещается в плоскости кадра на Δx пикселей; ω – размер пикселя; f – расстояние до приемного датчика.

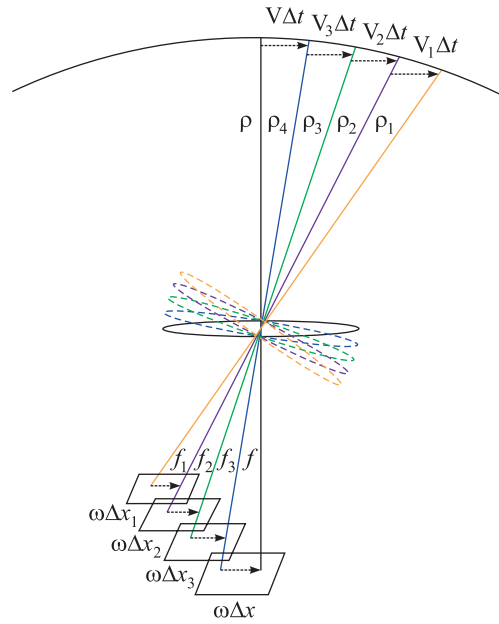


Рис. 2. Модель формирования последовательности изображений космического объекта при его орбитальном движении

Fig. 2. Imaging sequence formation model of a space object in orbital motion

Для зенитных пролетов при максимальном угле места $el > 70^\circ$ величина проекции орбитальной скорости на плоскость кадра V_p связана с углом θ между вектором наклонной дальности и направлением на подспутниковую точку P следующим соотношением:

$$V_p = V \cos \theta, \quad (4)$$

где $V = \sqrt{\frac{\mu}{R_E + H}}$ – орбитальная скорость космического объекта; μ – гравитационный параметр Земли.

В итоге система выражений для вывода конечного геометрического соотношения между высотой орбиты и скоростью смещения космического объекта в плоскости кадра выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \rho = \frac{(R_E + H) \cos(el + \theta)}{\cos(el)}, \\ \sin(\theta) = \frac{R_E \cos(el)}{R_E + H}, \\ \frac{V_p \Delta t}{\rho} = \frac{\omega \Delta x}{f}. \end{cases} \quad (5)$$

После соответствующих подстановок и преобразований конечное нелинейное уравнение для расчета высоты орбиты космического объекта через величину смещения в плоскости кадра его изображения и параметры угловых измерений представляется как

$$\frac{(R_E + H)^{3/2}}{\Delta t \sqrt{\mu}} \left[1 - \frac{R_E \sin(el)}{\left((R_E + H)^2 - (R_E \cos(el))^2 \right)^{1/2}} \right] = \frac{f}{\omega \Delta x}. \quad (6)$$

Основное ограничение, которое накладывается на предложенный метод, заключается в сделанном приближении при выводе нелинейного уравнения (6) о равенстве углов между вектором наклонной дальности и направлением на подспутниковую точку P , а также между V_P и орбитальной скоростью V (см. рис. 1, угол θ). Данное приближение справедливо и обеспечивает точное решение для измерений в любой точке витка только для пролетов над ПН с максимальным углом места $el > 70^\circ$. Для пролетов с максимальным значением угла места от 55° до 70° указанное приближение работает только в точках измерения витка, которые соответствуют областям со значением угла места менее 70 % от максимального. Для углов, отличающихся от максимального угла места менее чем на 30 % ($el \geq 0,7el_{\max}$), предлагается использовать следующее приближение для расчета проекции орбитальной скорости на плоскость кадра V_P :

$$V_P = V \frac{\sin(el)}{\sin(el_{\max})}. \quad (7)$$

После подстановки выражения (7) в систему (5) конечное нелинейное уравнение для расчета высоты орбиты космического объекта через величину смещения его изображения в плоскости кадра и параметры угловых измерений для областей $el \geq 0,7el_{\max}$ представляется как

$$\frac{R_E (R_E + H)^{1/2} \sin(el_{\max})}{\Delta t \sqrt{\mu}} \left[\frac{\left((R_E + H)^2 - (R_E \cos(el))^2 \right)^{1/2}}{R_E \sin(el)} - 1 \right] = \frac{f}{\omega \Delta x}. \quad (8)$$

Важно отметить, что именно точность определения параметра расстояния до приемного датчика f и величины смещения изображения космического объекта Δx в плоскости кадра между точками угловых измерений будут существенно влиять на точность конечных расчетов высоты орбиты. Действительно, из рис. 2 видно, что f будет изменяться в зависимости от величины наклонной дальности ρ , а именно от того, отдаляется или приближается объект относительно точки наблюдения. С учетом того что размер пикселя – величина постоянная, в дальнейшем вводится понятие общего оптического коэффициента вида f/ω . Стоит отметить, что оптический коэффициент f/ω является неизвестным коэффициентом и будет определяться по калибровочным значениям опорного космического объекта с известными параметрами орбиты и экспериментальными угловыми измерениями.

Согласно уравнению (6) и (8) для численного расчета высоты орбиты используется угол места el , который не является прямым результатом измерения оптической системы наблюдения. Как упоминалось ранее, результатом пассивных оптических измерений в момент времени t_m является пара топоцентрических угловых координат – прямое восхождение $\alpha(t_m)$ и склонение $\delta(t_m)$. Исходя из этого, алгоритм численного расчета высоты орбиты включает преобразование величин прямого восхождения $\alpha(t_m)$ и склонения $\delta(t_m)$ в угол места el . Такое преобразование включает вычисление нескольких важных величин. Юлианская дата jd и гринвичское среднее звездное время θ_{GMST} для расчета местного звездного времени θ_{LST} для момента измерения t_m . Местное звездное время θ_{LST} позволяет вычислить местный часовой угол LHA космического объекта для момента измерения t_m и преобразовать величины прямого восхождения $\alpha(t_m)$ и склонения $\delta(t_m)$ в угол места el согласно следующему выражению:

$$el = \arcsin(\sin(\varphi) \sin(\delta(t_m)) + \cos(\varphi) \cos(\delta(t_m)) \cos(LHA)), \quad (9)$$

где $LHA = \theta_{\text{LST}} - \alpha(t_m)$; φ – широта точки наблюдения или расположения оптической системы.

Коррекция наклонной дальности через оценку высоты орбиты космического объекта

Оценка высоты орбиты космического объекта используется для коррекции значения наклонной дальности и уточнения параметров в методе начального определения орбиты. В данном случае для представления соотношения между высотой орбиты H и величиной наклонной дальности ρ удобнее использовать угол

ψ , угол между вектором наклонной дальности ρ и радиус-вектором положения $\mathbf{R}$ оптической системы наблюдения на момент измерения t_m . Геометрия оптических измерений из точки O_1 ПН для отражения связи между высотой орбиты H и величиной наклонной дальности ρ через угол α показана на рис. 3. Измерения проводятся из ПН с известными значениями широты φ , долготы λ и высоты h . Неизвестный космический объект в момент времени измерения t_m находится в точке S .

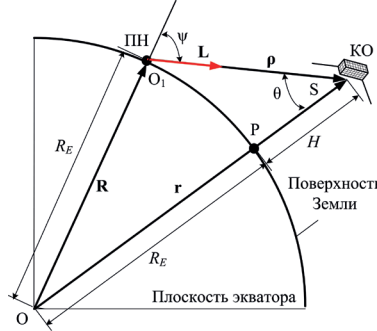


Рис. 3. Геометрия взаимосвязи между высотой орбиты H и величиной наклонной дальности ρ

Fig. 3. Geometric relationship between orbital altitude H and slant range ρ

Для данных оптических угловых измерений, в частности для топоцентрического прямого восхождения $\alpha(t_m)$ и склонения $\delta(t_m)$ в момент времени t_m , вектор наклонной дальности ρ рассчитывается через единичный радиус-вектор $\mathbf{L}(\alpha, \delta)$, направленный по вектору наклонной дальности $\rho = \rho \cdot \mathbf{L}$. Единичный радиус-вектор $\mathbf{L}(\alpha, \delta)$ выражается через данные угловых измерений следующим образом:

$$\mathbf{L}(\delta, \alpha) = \begin{pmatrix} \cos \delta(t_m) \cos \alpha(t_m) \\ \cos \delta(t_m) \sin \alpha(t_m) \\ \sin \delta(t_m) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Угол ψ между вектором наклонной дальности ρ и радиус-вектором положения $\mathbf{R}$ оптической системы наблюдения на момент измерения t_m :

$$\psi = \arccos \left(\frac{\mathbf{L}(\delta, \alpha) \cdot \mathbf{R}}{R} \right), \quad (11)$$

где $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_b \cos \theta_{\text{LST}} \\ r_b \sin \theta_{\text{LST}} \\ r_k \end{pmatrix}$, $r_b = (C_E + h) \cos \varphi$ и $r_k = (S_E + h) \sin \varphi$ – проекции радиус-вектора ПН на экваториальную плоскость и на ось, перпендикулярную этой плоскости; $C_E = \frac{R_E}{\sqrt{1 - e_E^2 \sin^2 \varphi}}$, $S_E = C_E (1 - e_E^2)$ – радиус кривизны Земли на меридиане ПН и параметр, характеризующий сжатие Земли; $e_E = 0,081819221456$ – эксцентриситет Земли; $R_E = 6378,137$ км – средний экваториальный радиус Земли.

Согласно рис. 3 и теореме синусов для треугольника OO_1S величину вектора наклонной дальности ρ можно связать с высотой орбиты H и величиной геоцентрического радиус-вектора $r = R_E + H$ неизвестного космического объекта через угол ψ следующим образом:

$$\frac{R_E}{\sin(\theta)} = \frac{\rho}{\sin(\psi - \theta)} = \frac{R_E + H}{\sin(180 - \psi)}, \quad (12)$$

где θ – угол между вектором наклонной дальности ρ и геоцентрическим радиус-вектором $\mathbf{r}$.

С учетом известной оценки высоты H неизвестного космического объекта и рассчитанного на основе измерений угла ψ определяется угол θ :

$$\theta = \arcsin \left(\frac{R_E \sin \psi}{R_E + H} \right). \quad (13)$$

В итоге для уточнения орбитальных параметров в методе начального определения орбиты модуль наклонной дальности ρ рассчитывается согласно следующей формуле:

$$\rho = \frac{R_E \cdot \sin(\psi - \theta)}{\sin \theta}. \quad (14)$$

Метод обнаружения и определения орбиты неизвестного космического объекта

В работе [16] авторами предложен метод обнаружения, который позволяет проводить оценку наклонной дальности через величину проекции линейной скорости на плоскость кадра неизвестного космического объекта по угловым оптическим измерениям. Метод обнаружения решает задачу установления наличия или отсутствия сигнала интенсивности космического объекта и заключается в обработке видеопотока с использованием набора согласованных фильтров с экспериментальными оптическими данными и параметрами движения известных космических объектов. Наборы согласованных фильтров строятся на основе связи формы Фурье-спектра разностного кадра и величины проекции линейной скорости движения на плоскость наблюдения. В данном случае точность оценки величины наклонной дальности связана с точностью совпадения величины проекции линейной скорости на плоскость кадра опорного и обнаруженного космического аппарата [16]. На основе предложенной оценки величины наклонной дальности разработан метод начального определения орбиты неизвестного космического объекта, который использует данные двух областей детектирования и угловые измерения в двух близко расположенных точках для каждой области [20]. Под областью детектирования подразумевается область наведения оптической системы. Оценка наклонной дальности через величину проекции линейной скорости в плоскости кадра дает возможность вычислить два радиус-вектора на дуге одного пролета, что достаточно для расчёта вектора скорости и однозначного определения орбиты. Далее представлен метод начального определения орбиты по угловым оптическим измерениям на основе оценки наклонной дальности через величину проекции линейной скорости на плоскость кадра, а также с использованием коррекции наклонной дальности через оценку высоты орбиты космического объекта. Стоит подчеркнуть, что метод оценки высоты, как и метод обнаружения, предложенный в работе [16], позволяет проводить расчет наклонной дальности. Основное различие обоих подходов заключается в том, что в методе обнаружения наклонная дальность рассчитывается через косвенную оценку проекции линейной скорости, что вносит определяющую ошибку в итоговое определение параметров орбиты. При расчете наклонной дальности через оценку высоты, согласно нелинейному уравнению (6), на ошибку в большей степени может влиять оптический коэффициент и точность локализации пиксельного смещения.

В решении задачи начального определения орбиты используются угловые измерения в двух областях детектирования 1 (в точках 1 и 2) и 2 (в точках 3 и 4): прямого восхождения α_{im} и склонения δ_{im} ($i=1,2,3,4$) спутника-маски, угловые измерения прямого восхождения α_{id} и склонения δ_{id} неизвестного космического объекта для нахождения двух радиус-векторов наклонной дальности ρ_{id} ($i=1,3$) в топоцентрической системе координат ПН и затем двух радиус-векторов положения $\mathbf{r}_{id}$ в геоцентрической инерциальной системе координат. Геометрическая интерпретация технологии угловых измерений для 2-х областей обнаружения оптической системой наблюдения представлена на рис. 4. Наклонная дальность ρ_{id} в топоцентрической системе координат пункта наблюдения определяется на основе оценки скорости неизвестного космического объекта в плоскости кадра, а также с использованием оценки высоты орбиты космического объекта по угловым оптическим измерениям.

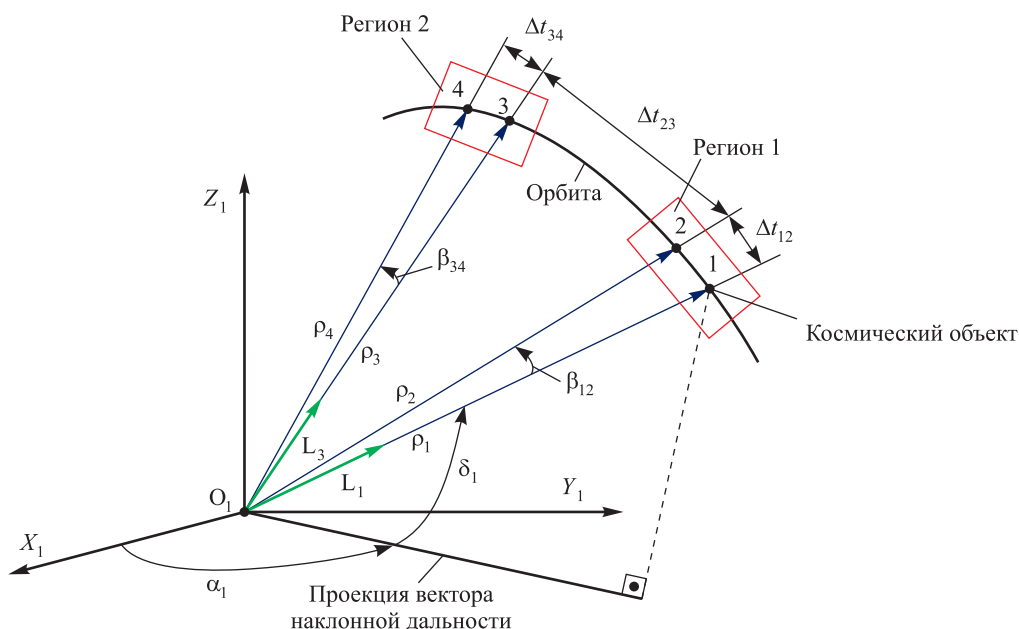


Рис. 4. Геометрическая интерпретация технологии и параметров угловых измерений для решения задачи начального определения орбиты космического объекта

Fig. 4. Geometric interpretation of measurement techniques and angular parameters for space object initial orbit determination

Метод начального определения орбиты неизвестного космического объекта по угловым оптическим измерениям на основе оценки величины вектора скорости в плоскости кадра подробно изложен в [15, 20] и предполагает, что в коррелируемых областях детектирования спутника-маски и неизвестного космического объекта величины вектора скорости в плоскости кадра имеют близкие значения.

$$(V_{Pj})_d \approx (V_{Pj})_m. \quad (15)$$

где $j = 1, 2$ – номер области обнаружения.

Величина вектора скорости спутника-маски в плоскости кадра для первой области $(V_{P1})_m$ обнаружения определяется через угловые измерения в точке 1 и 2 в моменты времени t_{1m}, t_{2m} : топоцентрического прямого восхождения α_{1m}, α_{2m} и склонения δ_{1m}, δ_{2m} :

$$(V_{P1})_m = \frac{\rho_{1SGP} \cdot (\beta_{12})_m}{(\Delta t_{12})_m}, \quad (16)$$

где ρ_{1SGP} – величина вектора наклонной дальности спутника-маски в топоцентрической системе координат $OX_I Y_I Z_I$ в точке 1, полученная в SGP модели движения (для начального вектора состояния в формате TLE); $(\beta_{12})_m = \arccos(\mathbf{L}_{1m} \cdot \mathbf{L}_{2m})$ – угол между векторами наклонной дальности ρ_{1m} и ρ_{2m} спутника-маски в точке 1 и 2; $\mathbf{L}_{1m}(\delta_{1m}, \alpha_{1m})$ и $\mathbf{L}_{2m}(\delta_{2m}, \alpha_{2m})$ – единичные вектора направленные вдоль векторов наклонной дальности и рассчитанные по формуле (10) через угловые измерения в точке 1 и 2; $(\Delta t_{12})_m = t_{2m} - t_{1m}$, $(t_{2m} > t_{1m})$ – интервал времени между угловыми измерениями спутника-маски в точке 1 и 2.

Используя угловые измерения неизвестного космического объекта в точке 1 и 2 первой области детектирования в моменты времени t_{1d}, t_{2d} : топоцентрического прямого восхождения α_{1d}, α_{2d} и склонения δ_{1d}, δ_{2d} , и величину вектора скорости в плоскости кадра неизвестного космического объекта $(V_{P1})_d$ определяется величина вектора его наклонной дальности ρ_{1d} в точке 1 первой области детектирования:

$$\rho_{1d} = \frac{(V_{P1})_d \cdot (\Delta t_{12})_d}{(\beta_{12})_d}, \quad (17)$$

где $(\beta_{12})_d = \arccos(\mathbf{L}_{1d} \cdot \mathbf{L}_{2d})$ – угол между векторами наклонной дальности ρ_{1d} и ρ_{2d} неизвестного космического объекта в точке 1 и 2; $\mathbf{L}_{1d}(\delta_{1d}, \alpha_{1d})$ и $\mathbf{L}_{2d}(\delta_{2d}, \alpha_{2d})$ – единичные вектора направленные вдоль векторов наклонной дальности и рассчитанные по формуле (10) через угловые измерения в точке 1 и 2; $(\Delta t_{12})_d = t_{2d} - t_{1d}$, $(t_{2d} > t_{1d})$ – интервал времени между угловыми измерениями неизвестного космического объекта в точке 1 и 2.

Аналогично проводим вычисления величины вектора его наклонной дальности ρ_{3d} в точке 3 второй области обнаружения.

Метод начального определения орбиты неизвестного космического объекта на основе оценки высоты орбиты космического объекта по угловым оптическим измерениям позволяет по измерениям топоцентрического прямого восхождения и склонения $(\alpha_{1d}, \delta_{1d})$ и $(\alpha_{3d}, \delta_{3d})$ в точке 1 первой области обнаружения и точке 3 второй области обнаружения определить величины векторов его наклонной дальности ρ_{1d} и ρ_{3d} . Рассмотрим определение наклонной дальности ρ_{1d} . Вначале по данным угловых измерений $(\alpha_{1d}, \delta_{1d})$ и известным координатам (широта ϕ , долгота λ и высота h) оптической системы наблюдения определяем по формуле (11) угол ψ_1 между вектором наклонной дальности ρ_{1d} и радиус-вектором положения $\mathbf{R}_{1d}$ оптической системы наблюдения на момент времени t_{1d} . Затем используя оценку высоты H неизвестного космического объекта по формуле (13) рассчитывается угол θ_1 между вектором наклонной дальности ρ_{1d} и геоцентрическим радиус-вектором $\mathbf{r}_{1d}$. Окончательно по формуле (14) определяется модуль наклонной дальности ρ_{1d} . Аналогично проводим вычисления модуль наклонной дальности ρ_{3d} в точке 3 второй области обнаружения.

Дальнейший расчет орбитальных параметров в двух методах проводится по следующему алгоритму. Рассчитываем вектора наклонной дальности ρ_{id} ($i = 1, 3$) в точке 1 первой области обнаружения и точке 3 второй области обнаружения:

$$\rho_{id} = \rho_{id} \cdot \mathbf{L}_{id} = \begin{pmatrix} \rho_{id} \cos \delta_{id} \cos \alpha_{id} \\ \rho_{id} \cos \delta_{id} \sin \alpha_{id} \\ \rho_{id} \sin \delta_{id} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Определяем радиус-вектора положения космического объекта в геоцентрической инерциальной системе координат $\mathbf{r}_{id}(x_{id}, y_{id}, z_{id})$ ($i = 1, 3$):

$$\mathbf{r}_{id} = \begin{pmatrix} x_{id} \\ y_{id} \\ z_{id} \end{pmatrix} = \rho_{id} + \mathbf{R}_{id} = \begin{pmatrix} \rho_{id} \cos \delta_{id} \cos \alpha_{id} \\ \rho_{id} \cos \delta_{id} \sin \alpha_{id} \\ \rho_{id} \sin \delta_{id} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_{\delta} \cos(\theta_{LSTi}) \\ r_{\delta} \sin(\theta_{LSTi}) \\ r_K \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Окончательно, используя метод Гаусса [1-3], решается задача Ламберта нахождения орбиты детектированного спутника (вектора скорости и орбитальных параметров) по двум известным радиус-векторам положения $\mathbf{r}_{1d}$ и $\mathbf{r}_{3d}$ в моменты времени t_{1d} и t_{3d} .

**Результаты определения высоты, коррекции наклонной дальности
и уточнения параметров орбиты неизвестного космического объекта**

С использованием данных мобильной оптической системы наблюдения Белорусского государственного университета [21] за 2024/08/25 и метода обнаружения рассмотренного выше и подробно описанного в работе [16] были получены данные детектирования спутника *Indefix/Ariane 42p* (NORAD: 27422) на основе согласованного фильтра с параметрами опорного спутника-маски *Seasat 1* (NORAD: 10967). В каждой области обнаружения были измерены две пары угловых топоцентрических координат – прямого восхождения и склонения с интервалом между измерениями $\Delta t_{12} \approx \Delta t_{34} = 0,1$ с и $\Delta t_{12} \approx \Delta t_{34} = 0,6$ с (рис. 4). Значения угловых измерений спутника *Indefix/Ariane 42p* (NORAD: 27422), а также спутника-маски *Seasat 1* (NORAD: 10967) в областях обнаружения представлены в табл. 1.

Согласно методу, описанному в выше, для оценки высоты орбиты обнаруженного спутника *Indefix/Ariane 42p* использовались как значения угловых координат точек детектирования α_{1d} , α_{2d} и δ_{1d} , δ_{2d} (табл. 1) так и значения смещения спутника в плоскости кадра Δx между этими точками для каждой области. Исходными значениями неизвестного оптического коэффициента f/ω для численного решения нелинейного уравнения (6) и оценки высоты орбиты обнаруженного спутника *Indefix/Ariane 42p* являлись предварительно рассчитанные значения f/ω опорного спутника *Seasat 1*. Значения f/ω опорного спутника *Seasat 1* были рассчитаны для соответствующих экспериментальных данных угловых измерений, которые использовались для построения набора согласованных фильтров. На рис. 5 представлена кривая зависимости угла места el и оптического коэффициента f/ω от времени пролета 2024/08/25 для опорного спутника *Seasat 1*, где для расчёта f/ω использовалось значение высоты $H=752,18$ км, вычисленное согласно модели прогнозирования SGP.

Таблица 1

**Значения угловых оптических измерений
для двух областей обнаружения спутника *Indefix/Ariane 42P*. Дата: 2024/08/25.**

Table 1

**Angular optical measurement values for the two detection regions
of the *Indefix/Ariane 42P* satellite. Date: 2024/08/25**

Область	Точка	t_m	α_m	δ_m
Спутник-маска <i>Seasat 1</i> , NORAD: 10967, интервал 0,6 с				
1	$i = 1$	23:42:44,7109	2 ч 48 мин 54,79 с	45 дн. 48 мин 25,84 с
	$i = 2$	23:42:45,3152	2 ч 48 мин 54,56 с	45 дн. 30 мин 30,30 с
2	$i = 3$	23:44:45,2720	14 ч 32 мин 0,15 с	77 дн. 6 мин 43,04 с
	$i = 4$	23:44:45,8763	14 ч 32 мин 7,74 с	76 дн. 54 мин 18,18 с
Детектированный спутник <i>Indefix/Ariane 42P</i> , NORAD: 27422, интервал 0,6 с				
1	$i = 1$	23:54:5,1710	4 ч 6 мин 28,49 с	51 день 26 мин 48,59 с
	$i = 2$	23:54:5,7754	4 ч 5 мин 4,20 с	51 день 18 мин 25,90 с
2	$i = 3$	23:56:17,2141	1 ч 10 мин 38,42 с	8 дн. 2 мин 49,13 с
	$i = 4$	23:56:17,8184	1 ч 10 мин 15,62 с	7 дн. 52 мин 37,64 с
Спутник-маска <i>Seasat 1</i> , NORAD: 10967, интервал 0,1 с				
1	$i = 1$	23:42:44,7109	2 ч 48 мин 54,56 с	45 дн. 30 мин 30,30 с
	$i = 2$	23:42:44,8117	2 ч 48 мин 54,63 с	45 дн. 33 мин 28,76 с
2	$i = 3$	23:44:45,4735	14 ч 32 мин 1,30 с	77 дн. 02 мин 29,72 с
	$i = 4$	23:44:45,5742	14 ч 32 мин 3,27 с	77 дн. 0 мин 28,97 с
Детектированный спутник <i>Indefix/Ariane 42P</i> , NORAD: 27422, интервал 0,1 с				
1	$i = 1$	23:54:5,6747	4 ч 5 мин 16,44 с	51 день 19 мин 48,47 с
	$i = 2$	23:54:5,7754	4 ч 5 мин 2,21 с	51 день 18 мин 25,90 с
2	$i = 3$	23:56:17,7178	1 ч 10 мин 19,20 с	7 дн. 54 мин 16,19 с
	$i = 4$	23:56:17,8184	1 ч 10 мин 15,62 с	7 дн. 52 мин 37,64 с

Оценка высоты H обнаруженного спутника *Indefix/Ariane 42p* проводилась для двух областей детектирования, где входной оптический коэффициент f/ω соответствовал значениям f/ω опорного спутника *Seasat 1* (рис. 5, зеленые маркеры): для 1-ой области $(f/\omega)_1=46,609$, для 2-ой области $(f/\omega)_2=45,891$. Согласно решению нелинейного уравнения (6) оценка высоты орбиты обнаруженного спутника *Indefix/Ariane 42p* показала следующие результаты: для исходных данных 1-ой области детектирования (угловые координаты область 1 α_m и δ_m табл. 1, $(f/\omega)_1=46,609$) значение H составило 800,39 км, что эквивалентно ошибке в $\sim 2,14$ км относительно теоретического значения SGP модели $H=798,25$ км; для исходных данных 2-ой области детектирования (угловые координаты область 2 α_m и δ_m табл. 1, $(f/\omega)_2=45,891$) значение H составило 796.07 км с ошибкой $\sim 2,18$ км.

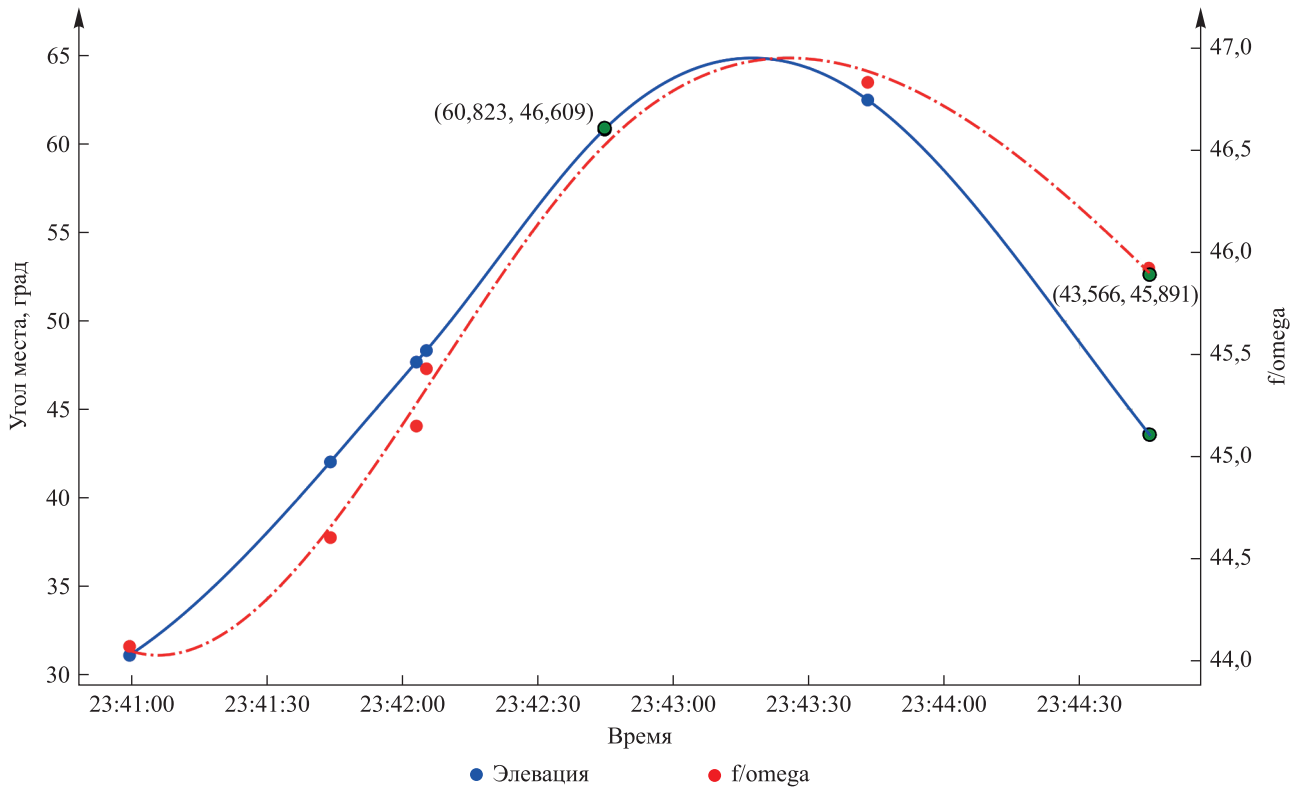


Рис. 5. Кривая зависимости угла места el и оптического коэффициента f/ω от времени пролета 2024/08/25 для опорного спутника *Seasat 1*

Fig. 5. Curve of the dependence of elevation angle el and optical coefficient f/ω on the pass time of the reference satellite *Seasat 1* on 2024/08/25

Согласно полученным результатам оценки высоты обнаруженного спутника *Indefix/Ariane 42p* были рассчитаны скорректированные значения наклонной дальности: для 1-ой и 2-ой области интервала 0,1 с ошибки ρ_{1d} и ρ_{3d} до корректировки составили 8,75 км и -1,17 км, а скорректированные значения позволили снизить ошибку ρ_{1d} и ρ_{3d} до 2,78 км и 0,74 км соответственно; для 1-ой и 2-ой области интервала измерения 0,6 с значения ошибки до корректировки ρ_{1d} и ρ_{3d} составили 18,27 км и -14,89 км, после корректировки ошибки ρ_{1d} и ρ_{3d} уменьшились до 2,83 км и -4,16 км, соответственно.

На основе полученных результатов проводился анализ влияния коррекции наклонной дальности через оценку высоты орбиты космического объекта на значение ошибки при определении параметров орбиты космического объекта. В таблице 2 и 3 представлены ошибки определения радиус-вектора положения, а также вектора скорости спутника *Indefix/Ariane 42p* относительно результатов, полученных в модели прогнозирования SGP, для 1-ой и 2-ой области обнаружения с интервалами между точками измерения 0,6 и 0,1 с без учета (методом начального определения орбиты неизвестного космического объекта по угловым оптическим измерениям на основе оценки величины вектора скорости в плоскости кадра) и с учетом коррекции наклонной дальности (методом начального определения орбиты на основе оценки высоты неизвестного космического объекта по угловым оптическим измерениям).

Таблица 2

Результат определения радиус-вектора положения и вектора скорости
обнаруженного спутника *Indefix/Ariane 42P*

Table 2

Results of determining the position radius vector and velocity vector
of the detected satellite *Indefix/Ariane 42P*

Параметр	Значение	Параметр	Значение
<i>Интервал 0,6 с (без коррекции)</i>		<i>Интервал 0,6 с (с коррекцией)</i>	
$\mathbf{r}_{1d}(x_{1d}, y_{1d}, z_{1d})$, км	(4028,24, 567,72, 5913,52)	$\mathbf{r}_{1d}(x_{1d}, y_{1d}, z_{1d})$, км	(4023,66, 559,26, 5901,45)
$(\Delta x_{1d}, \Delta y_{1d}, \Delta z_{1d})_{\text{abs}}^{\text{error}}$, км	(5,72, 10,52, 13,82)	$(\Delta x_{1d}, \Delta y_{1d}, \Delta z_{1d})_{\text{abs}}^{\text{error}}$, км	(1,14, 2,06, 1,75)
$(\Delta x_{1d}, \Delta y_{1d}, \Delta z_{1d})_{\text{rel}}^{\text{error}}$, %	(0,08, 0,15, 0,19)	$(\Delta x_{1d}, \Delta y_{1d}, \Delta z_{1d})_{\text{rel}}^{\text{error}}$, %	(0,02, 0,03, 0,02)
$\mathbf{V}_1(V_{1X}, V_{1Y}, V_{1Z})$, км/с	(6,005, -1,232, -4,202)	$\mathbf{V}_1(V_{1X}, V_{1Y}, V_{1Z})$, км/с	(6,117, -1,144, -4,099)
$\mathbf{r}_{3d}(x_{3d}, y_{3d}, z_{3d})$, км	(4780,67, 400,23, 5304,73)	$\mathbf{r}_{3d}(x_{3d}, y_{3d}, z_{3d})$, км	(4790,80, 403,46, 5306,24)
$(\Delta x_{3d}, \Delta y_{3d}, \Delta z_{3d})_{\text{abs}}^{\text{error}}$, км	(-13,79, -4,54, -3,71)	$(\Delta x_{3d}, \Delta y_{3d}, \Delta z_{3d})_{\text{abs}}^{\text{error}}$, км	(-3,66, -1,31, -2,20)
$(\Delta x_{3d}, \Delta y_{3d}, \Delta z_{3d})_{\text{rel}}^{\text{error}}$, %	(0,19, 0,06, 0,05)	$(\Delta x_{3d}, \Delta y_{3d}, \Delta z_{3d})_{\text{rel}}^{\text{error}}$, %	(0,05, 0,02, 0,03)
$(\Delta V_{1X}, \Delta V_{1Y}, \Delta V_{1Z})_{\text{abs}}^{\text{error}}$, км/с	(-0,148, -0,113, -0,129)	$(\Delta V_{1X}, \Delta V_{1Y}, \Delta V_{1Z})_{\text{abs}}^{\text{error}}$, км/с	(-0,036, -0,025, 0,026)

Как видно из табл. 2, измерения с интервалом 0,6 с показывают абсолютные ошибки компонент радиус-вектора положения без коррекции наклонной дальности в 1-й области обнаружения $(\Delta x_{1d}, \Delta y_{1d}, \Delta z_{1d})_{\text{abs}}^{\text{error}} = (5,72, 10,52, 13,82)$ км и во 2-й области $(\Delta x_{4d}, \Delta y_{4d}, \Delta z_{4d})_{\text{abs}}^{\text{error}} = (-13,79, -4,54, -3,71)$ км, соответственно. Что эквивалентно ошибке в величине радиус-вектора положения для 1-й области в 18,29 км, а для 2-й области в 14,49 км. Напротив, как видно из табл. 2, для того же интервала измерений в 0,6 с абсолютные ошибки компонент радиус-вектора положения с коррекцией наклонной дальности в 1-ой области обнаружения составили $(\Delta x_{1d}, \Delta y_{1d}, \Delta z_{1d})_{\text{abs}}^{\text{err}} = (1,14, 2,06, 1,75)$ км и во 2-ой области $(\Delta x_{4d}, \Delta y_{4d}, \Delta z_{4d})_{\text{abs}}^{\text{err}} = (-3,66, -1,31, -2,20)$ км, соответственно. Что соответствует уменьшению ошибок в величине радиус-вектора положения до 2,93 км для 1-ой области обнаружения и до 4,47 км для 2-ой области.

В свою очередь, абсолютная ошибка определения вектора скорости обнаруженного спутника *Indefix/Ariane 42p* без коррекции наклонной дальности составила $(\Delta V_{1X}, \Delta V_{1Y}, \Delta V_{1Z})_{\text{abs}}^{\text{err}} = (-0,148, -0,113, -0,129)$ км/с (эквивалентно ошибке в величине скорости 0,227 км/с), что также уступает в точности определения вектора скорости для измерений с коррекцией наклонной дальности, где абсолютная ошибка уменьшилась и составила $(\Delta V_{1X}, \Delta V_{1Y}, \Delta V_{1Z})_{\text{abs}}^{\text{err}} = (-0,036, -0,025, 0,026)$ км/с, с общим уменьшением ошибки в величине скорости до 0,051 км/с. Как видно из табл. 3, если использовать измерения с интервалом в 0,1 с без коррекции наклонной дальности в 1-ой и 2-ой области обнаружения, то абсолютные ошибки компонент радиус-вектора положения следующие: в 1-ой области $(\Delta x_{1d}, \Delta y_{1d}, \Delta z_{1d})_{\text{abs}}^{\text{err}} = (2,99, 5,25, 6,36)$ км и во 2-ой области $(\Delta x_{4d}, \Delta y_{4d}, \Delta z_{4d})_{\text{abs}}^{\text{err}} = (-0,84, -0,42, -1,80)$ км соответственно. Что эквивалентно ошибке в величине радиус-вектора положения для 1-ой области в 8,79 км, а для второй области в 2,03 км. Напротив, с коррекцией наклонной дальности, абсолютные ошибки компонент радиус-вектора положения для интервала измерений 0,1 составили: в 1-ой области обнаружения $(\Delta x_{1d}, \Delta y_{1d}, \Delta z_{1d})_{\text{abs}}^{\text{err}} = (1,20, 1,98, 1,71)$ км и во 2-ой области $(\Delta x_{4d}, \Delta y_{4d}, \Delta z_{4d})_{\text{abs}}^{\text{err}} = (0,96, 0,15, -1,55)$ км, соответственно. Что эквивалентно уменьшению ошибок в величине радиус-вектора положения до 2,88 км для 1-ой области обнаружения и до 1,82 км для 2-ой области.

Абсолютная ошибка определения вектора скорости обнаруженного спутника *Indefix/Ariane 42p* без коррекции наклонной дальности для интервала измерения 0,1 с составила $(\Delta V_{1X}, \Delta V_{1Y}, \Delta V_{1Z})_{\text{abs}}^{\text{err}} = (-0,030, -0,042, -0,058)$ км/с (эквивалентно ошибке в величине скорости 0,078 км/с), что также уступает в точности определения вектора скорости для измерений с коррекцией наклонной дальности, где абсолютная ошибка уменьшилась и составила $(\Delta V_{1X}, \Delta V_{1Y}, \Delta V_{1Z})_{\text{abs}}^{\text{err}} = (-0,002, 0,013, 0,021)$ км/с (эквивалентно уменьшению ошибки в величине скорости 0,024 км/с).

Результаты начального определения орбиты спутника *Indefix/Ariane 42p* в виде орбитальных параметров для интервалов измерения 0.6 и 0.1 с без коррекции и с коррекцией наклонной дальности представлены в таблице 4.

Таблица 3

Результат определения радиус-вектора положения и вектора скорости
обнаруженного спутника *Indefix/Ariane 42P*

Table 3

Results of determining the position radius vector and velocity vector
of the detected satellite *Indefix/Ariane 42P*

Параметр	Значение	Параметр	Значение
Интервал 0,1 с (без коррекции)		Интервал 0,1 с (с коррекцией)	
$\mathbf{r}_{1d}(x_{1d}, y_{1d}, z_{1d})$, км	(4028,61, 561,89, 5904,01)	$\mathbf{r}_{1d}(x_{1d}, y_{1d}, z_{1d})$, км	(4026,82, 558,62, 5899,36)
$(\Delta x_{1d}, \Delta y_{1d}, \Delta z_{1d})_{\text{abs}}^{\text{error}}$, км	(2,99, 5,25, 6,36)	$(\Delta x_{1d}, \Delta y_{1d}, \Delta z_{1d})_{\text{abs}}^{\text{error}}$, км	(1,20, 1,98, 1,71)
$(\Delta x_{1d}, \Delta y_{1d}, \Delta z_{1d})_{\text{rel}}^{\text{error}}$, %	(0,04, 0,07, 0,09)	$(\Delta x_{1d}, \Delta y_{1d}, \Delta z_{1d})_{\text{rel}}^{\text{error}}$, %	(0,02, 0,03, 0,02)
$\mathbf{V}_1(V_{1X}, V_{1Y}, V_{1Z})$, км/с	(6,149, -1,132, -4,097)	$\mathbf{V}_1(V_{1X}, V_{1Y}, V_{1Z})$, км/с	(6,149, -1,132, -4,097)
$\mathbf{r}_{3d}(x_{3d}, y_{3d}, z_{3d})$, км	(4780,67, 400,23, 5304,73)	$\mathbf{r}_{3d}(x_{3d}, y_{3d}, z_{3d})$, км	(4798,20, 404,32, 5304,44)
$(\Delta x_{3d}, \Delta y_{3d}, \Delta z_{3d})_{\text{abs}}^{\text{error}}$, км	(-0,84, -0,42, -1,80)	$(\Delta x_{3d}, \Delta y_{3d}, \Delta z_{3d})_{\text{abs}}^{\text{error}}$, км	(0,96, 0,15, -1,55)
$(\Delta x_{3d}, \Delta y_{3d}, \Delta z_{3d})_{\text{rel}}^{\text{error}}$, %	(0,01, 0,01, 0,03)	$(\Delta x_{3d}, \Delta y_{3d}, \Delta z_{3d})_{\text{rel}}^{\text{error}}$, %	(0,01, 0,002, 0,02)
$(\Delta V_{1X}, \Delta V_{1Y}, \Delta V_{1Z})_{\text{abs}}^{\text{error}}$, км/с	(-0,030, -0,042, -0,058)	$(\Delta V_{1X}, \Delta V_{1Y}, \Delta V_{1Z})_{\text{abs}}^{\text{error}}$, км/с	(-0,002, 0,013, 0,021)

Таблица 4

Орбитальные параметры обнаруженного спутника *Indefix/Ariane 42P*

Table 4

Orbital parameters of the detected satellite *Indefix/Ariane 42P*

Оценка	Интервал, с	a , км	i , град	e	Ω , град	u , град
IOD	0,6 (без кор.)	7138,53	99,032	0,0261	174,662	123,465
	0,6 (с кор.)	7149,71	98,643	0,0045	175,156	123,574
IOD	0,1 (без кор.)	7210,76	98,709	0,0094	175,093	123,583
	0,1 (с кор.)	7195,53	98,585	0,0044	175,244	123,618
$\Delta_{\text{abs}}^{\text{error}}$	0,6 (без кор.)	-30,78	0,501	0,0240	-0,638	0,133
	0,6 (с кор.)	-19,60	0,112	0,0024	-0,144	0,024
$\Delta_{\text{abs}}^{\text{error}}$	0,1 (без кор.)	41,45	0,179	0,0073	-0,207	-0,045
	0,1 (с кор.)	26,22	0,054	0,0023	-0,056	-0,010
$\Delta_{\text{rel}}^{\text{error}}$, %	0,6 (без кор.)	0,43	0,51	—	0,36	0,11
	0,6 (с кор.)	0,27	0,11	—	0,08	0,02
$\Delta_{\text{rel}}^{\text{error}}$, %	0,1 (без кор.)	0,58	0,18		0,12	0,04
	0,1 (с кор.)	0,37	0,05		0,03	0,01

Как видно из таблицы 4, результаты определения всех орбитальных параметров большой полу-оси a , эксцентриситета e , наклонения орбиты i , долготы восходящего узла Ω и аргумента широты u

для двух интервалов измерений (0.1 с и 0.6 с) показывают наименьшее значение абсолютных ошибок при проведении коррекции наклонной дальности из оценки высоты. В частности, для интервала 0.6 с с *коррекцией наклонной дальности* абсолютная ошибка в значении большой полуоси составила -19.60 км, эксцентриситета - 0.0024, наклона $i - 0.112^\circ$, долготы восходящего узла (-0.144°) и в значении аргумента широты -0.024° , что меньше в соответствующих параметрах на 11.18 км, 0.0216, 0.389°, 0.494° и 0.109° чем без использования *коррекции наклонной дальности*. Аналогично, как видно из таблицы 4, для интервала 0.1 с с *коррекцией наклонной дальности* абсолютная ошибка в значении а составила 26.22 км, $e - 0.0023$, $i - 0.054^\circ$, $\Omega - (-0.056^\circ)$ и в $u - (-0.010)^\circ$, что меньше в соответствующих параметрах на 15.23 км, 0.005, 0.125°, 0.151° и 0.035° чем для решения без коррекции наклонной дальности.

Заключение

В работе представлен метод оценки высоты и коррекции величины наклонной дальности для решения задач определения орбит неизвестных космических объектов с использованием данных оптических датчиков. Предложенный метод позволяет определить высоту космического объекта в приближении круговой орбиты на основе данных угловых измерений и геометрического соотношения между высотой орбиты и скоростью смещения космического объекта в плоскости кадра. Оценка высоты решает проблему отсутствия информации о дальности до космического объекта в угловых оптических измерениях и использована для корректирующего расчета наклонной дальности в методе начального определения орбиты по двум радиус-векторам. Начальное определение орбиты и оценка высоты обрабатывают данные двух областей обнаружения космического объекта, которые получены методом согласованной фильтрации на основе связи формы Фурье спектра разностного кадра и величины проекции линейной скорости движения на плоскость кадра [15]. Данный метод обнаружения обеспечивает оценку величины проекции линейной скорости в плоскости кадра неизвестного космического объекта по опорному спутнику с известными орбитальными параметрами. Величина же проекции линейной скорости на плоскость кадра используется для расчета величины наклонной дальности в методе определения орбиты по двум областям обнаружения [20], для которого оценка высоты позволяет скорректировать соответствующие значения дальности и уменьшить ошибку в значениях орбитальных параметров.

Согласно полученным результатам для обнаруженного спутника *Indefix/Ariane 42p* метод определения высоты позволил рассчитать параметр орбиты H с ошибкой в 2.141 км для 1-ой области детектирования и с ошибкой в 2.180 км для 2-ой области. На основе данных высоты рассчитаны корректирующие значения наклонной дальности для угловых измерений с интервалом 0.1 с и 0.6 с в 1-ой и 2-ой области детектирования, которые обеспечили уменьшение ошибки ρ_{1d} и ρ_{3dc} 8.75 км и -1.17 км (при расчете наклонной дальности через оценку проекции линейной скорости на плоскость кадра) до 2.78 км и 0.74 км для измерений с интервалом 0.1 с и с 18.27 км и -14.89 км до 2.83 км и -4.16 км для измерений с интервалом 0.6 с. Стоит заметить, что использование нелинейной зависимости уравнения (6) для определения высоты справедливо только для зенитных пролетов при максимальном угле места $e > 70$. Это объясняется тем, что при выводе уравнения (6) допущено приближение о равенстве углов между радиус-вектором и наклонной дальностью и между радиальной скоростью и проекцией линейной скорости на плоскость кадра, что является корректным только для зенитной области и указывает на основное ограничение рассмотренного метода. Поэтому, для не зенитных пролетов дополнительно получено нелинейное уравнение (8) оценки высоты орбиты неизвестного космического объекта по угловым оптическим измерениям.

Коррекция наклонной дальности позволила уменьшить ошибки в определении орбитальных параметров большой полуоси a , эксцентриситета e , наклона орбиты i , долготы восходящего узла Ω и аргумента широты u для интервала измерения 0.1 с на следующие значения: абсолютная ошибка в значении a составила 26.22 км, $e - 0.0023$, $i - 0.054^\circ$, $\Omega - (-0.056^\circ)$ и в $u - (-0.010)^\circ$, что уменьшено на 15.23 км, 0.005, 0.125°, 0.151° и 0.035° в соответствующих параметрах до корректировки. Аналогично, для интервала измерения 0.6 с абсолютная ошибка в значении a составила -19.60 км, $e - 0.0024$, $i - 0.112^\circ$, $\Omega - (-0.144^\circ)$ и в $u - 0.024^\circ$, что было уменьшено в соответствующих параметрах на 11.18 км, 0.0216, 0.389°, 0.494° и 0.109° до корректировки.

Предложенный метод прямого расчета высоты орбиты космического объекта по угловым оптическим измерениям имеет общий характер и может применяться в условиях ограниченных данных для решения задач наблюдения и начального определения орбит как астероидов так и техногенного космического мусора, образовавшегося в результате столкновения, распада или взрыва. Кроме того, данный метод актуален для оперативного поиска и обнаружения запущенных космических аппаратов в первые сутки полета, в том числе группировок малых спутников [22].

Библиографические ссылки

1. Vallado DA. *Fundamentals of astrodynamics and applications*. 4th edition. Hawthorne: Microcosm Press; 2013. XXII, 1106 p. (Space technology library).
2. Herrick S. *Astroynamics. Volume 1, Orbit determination, space navigation, celestial mechanics*. London: Van Nostrand Reinhold Company; 1971. XXVI, 540 p.
3. Escobal PR. *Methods of orbit determination*. Huntington: R. E. Krieger; 1976. XIX, 479 p.
4. Battin RH. *An introduction to the mathematics and methods of astrodynamics*. Reston: American Institute of Aeronautics and Astronautics; 1999. XXXII, 799 p. (Przemieniecki JS, editor. AIAA education series).
5. Bate RR, Mueller DD, White JE. *Fundamentals of astrodynamics*. New York: Dover Publications; 1971. XII, 455 p.
6. Christian JA. Initial orbit determination from only heading measurements. *Journal of Spacecraft and Rockets*. 2023;60(4):1169–1175. DOI: 10.2514/1.A35593
7. Kazemi S, Azad NL, Scott KA, Oqab HB, Dietrich GB. Orbit determination for space situational awareness: a survey. *Acta Astronautica*. 2024;222:272–295. DOI: 10.1016/j.actaastro.2024.06.015.
8. Lei X, Wang K, Zhang P, Pan T, Li H, Sang J, et al. A geometrical approach to association of space-based very short-arc LEO tracks. *Advances in Space Research*. 2018;62(3):542–553. DOI: 10.1016/j.asr.2018.04.044.
9. Fossà A, Armellini R, Delande E, Losacco M, Sanfedino F. A multifidelity approach to robust orbit determination. *Acta Astronautica*. 2024;214:277–292. DOI: 10.1016/j.actaastro.2023.10.040.
10. Gronchi GF, Dimare L, Milani A. Orbit determination with the two-body integrals. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2010;107(3):299–318. DOI: 10.1007/s10569-010-9271-9.
11. Milani A, Gronchi GF, Vitturi MDM, Knežević Z. Orbit determination with very short arcs. I admissible regions. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2004;90(1–2):57–85. DOI: 10.1007/s10569-004-6593-5.
12. Cai H, Yang Y, Gehly S, Wu S, Zhang K. Improved tracklet association for space objects using short-arc optical measurements. *Acta Astronautica*. 2018;151:836–847. DOI: 10.1016/j.actaastro.2018.07.024.
13. Bakhshiyani BT, Sukhanov AA, Fedyaev KS. Estimation of the determination accuracy of orbit parameters of the Apophis asteroid from measurement results. *Cosmic Research*. 2010;48(5):417–423. DOI: 10.1134/S0010952510050072.
14. Mironov VV. A technique for estimating the space debris density from the data of onboard recording systems. *Cosmic Research*. 2003;41(3):204–208. DOI: 10.1023/A:1023395300193.
15. Baranova V, Spiridonov A, Ushakov D, Kozlov V, Cherny V, Saetchnikov V. Geometric approach to determining the space object orbit altitude using angles-only measurements. In: Institute of Electrical and Electronics Engineers. *Proceedings of 11th International workshop on metrology for aerospace; 2024 June 3–5; Lublin, Poland*. [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 2024. p. 173–177. DOI: 10.1109/MetroAeroSpace61015.2024.10591574.
16. Baranova V, Spiridonov A, Ushakov D, Saetchnikov V. The resident space object detection method based on the connection between the Fourier domain image of the video data difference frame and the orbital velocity projection. *Journal of Astronomy and Space Sciences*. 2024;41(3):159–170. DOI: 10.5140/JASS.2024.41.3.159.
17. Kovalevsky J, Seidelmann PK. *Fundamentals of astrometry*. Cambridge: Cambridge University Press; 2004. 422 p.
18. Zhi Z, Qu H, Tao S, Zheng L, Ying Sh, Zhu H. The design of cone and pendulum scanning mode using dual-camera with multi-dimensional motion imaging micro-nanosatellite. *Remote Sensing*. 2022;14(18):4613–4641. DOI: 10.3390/rs14184613.
19. Pineau D, Felicetti L. Design of an optical system for a Multi-CubeSats debris surveillance mission. *Acta Astronautica*. 2023;210:535–546. DOI: 10.1016/j.actaastro.2023.04.027.
20. Баранова ВС, Спиридонов АА, Ушаков ДВ, Саечников ВА. Метод начального определения орбиты космического объекта по ограниченным данным угловых оптических измерений. *Приборы и методы измерений*. 2025;16(2):121–132. DOI: 10.21122/2220-9506-2025-16-2-121-132.
21. Spiridonov A, Baranova V, Ushakov D, Saetchnikov V, Kenko Z, Zasmuzhats D, et al. University mobile optical surveillance system for low-Earth space object orbit determination. In: Institute of Electrical and Electronics Engineers. *Proceedings of 9th International workshop on metrology for aerospace; 2022 June 27–29; Pisa, Italy*. [S. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 2022. p. 566–570. DOI: 10.1109/MetroAeroSpace54187.2022.9855955.
22. Спиридонов АА, Баранова ВС, Саечников ВА, Ушаков ДВ. Моделирование построения региональной группировки наноспутников путем попутного запуска с различных космодронов. *Журнал Белорусского государственного университета. Физика*. 2022;2:50–59. DOI: 10.33581/2520-2243-2022-2-50-59.

Получена 16.05.2025 / исправлена 18.05.2025 / принята 19.05.2025.
Received 16.05.2025 / revised 18.05.2025 / accepted 19.05.2025.

Авторы:

Василина Сергеевна Баранова – научный сотрудник кафедры физики и аэрокосмических технологий факультета радиофизики и компьютерных технологий.
Александр Александрович Спиридонов – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры физики и аэрокосмических технологий факультета радиофизики и компьютерных технологий.

Authors:

Vasilina S. Baranova, researcher at the department of the physics and aerospace technologies, faculty of radiophysics and computer technology.
vbaranova@bsu.by
<https://orcid.org/0000-0002-8060-6015>
Alexander A. Spiridonov, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of physics and aerospace technologies, faculty of radiophysics and computer technology.
spirid@bsu.by
<https://orcid.org/0000-0003-2047-2147>

Владимир Леонидович Козлов – доктор технических наук, профессор; профессор кафедры квантовой радиофизики и оптоэлектроники факультета радиофизики и компьютерных технологий.

Дмитрий Владимирович Ушаков – доктор физико-математических наук, доцент; декан факультета радиофизики и компьютерных технологий факультета радиофизики и компьютерных технологий.

Владимир Алексеевич Саечников – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой физики и аэрокосмических технологий факультета радиофизики и компьютерных технологий.

Vladimir L. Kozlov, doctor of science (engineering), full professor; professor at the department of quantum radiophysics and optoelectronics, faculty of radiophysics and computer technology.

kozlovvl@bsu.by

<https://orcid.org/0000-0003-3309-7470>

Dmitrii V. Ushakov, doctor of science (physics and mathematics), docent; dean of the faculty of radiophysics and computer technology.

ushakovdv@bsu.by

<https://orcid.org/0000-0002-2108-7024>

Vladimir A. Saetchnikov, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of physics and aerospace technologies, faculty of radiophysics and computer technology

saetchnikov@bsu.by

<https://orcid.org/0000-0001-9064-4384>
